Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα – Κεραίες

Περίγραμμα Μαθήματος

- Νόμοι του Maxwell Βασικές εξισώσεις Η/Μ
- Εξίσωση κύματος-Χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία
- Ιδιότητες Η/Μ κυμάτων (ταχύτητα φάσης-ομάδας ανάκλαση – διάθλαση κ.α)
- Γραμμές μεταφοράς: ΗΜ σε αγώγιμο μέσο, μεταφορά ισχύος
- Βασικές έννοιες κεραιών: ακτινοβολία από επιταχυνόμενα φορτία, βασικές έννοιες κεραία, κατευθυντικότητα, βασικές ιδιότητες κεραίας
- Βασικά είδη κεραιών: στοιχειώδες δίπολο, βρογχοκεραία, διπολική κεραία λ/2, ελικοειδής κεραία, κατακόρυφη κεραία λ/4
- Άλλα είδη κεραιών: συστοιχίες κεραιών, κεραία Yagi-Uda, κεραίες με ανακλαστήρα, κεραίες με χοάνη, κεραίες τύπου φακού
- Διάδοση ΗΜ κυμάτων στο περιβάλλον: τρόποι διάδοσης ΗΜ κυμάτων στην ατμόσφαιρα, επίδραση περιβάλλοντος σε διάφορες κατηγορίες κυμάτων, τύπο ζεύξεων

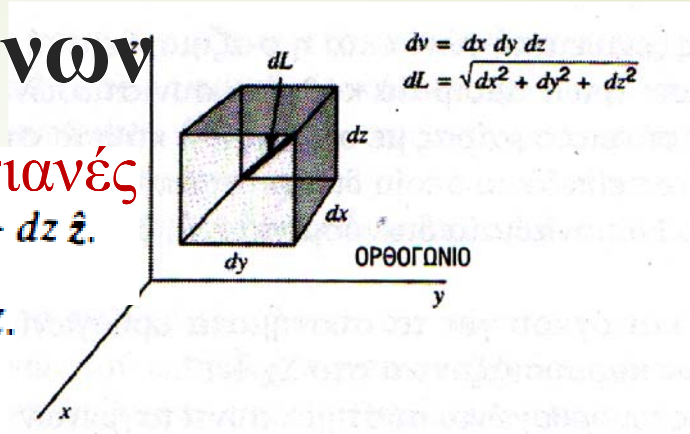
Μαθηματικά Απαιτούμενα

- Διανυσματική Ανάλυση
- Μιγαδική Ανάλυση
- Συστήματα Συντεταγμένων
- Εσωτερικά – Εξωτερικά Γινόμενα
- Ολοκληρωτικό Λογισμό
- Διαφορικές Εξισώσεις

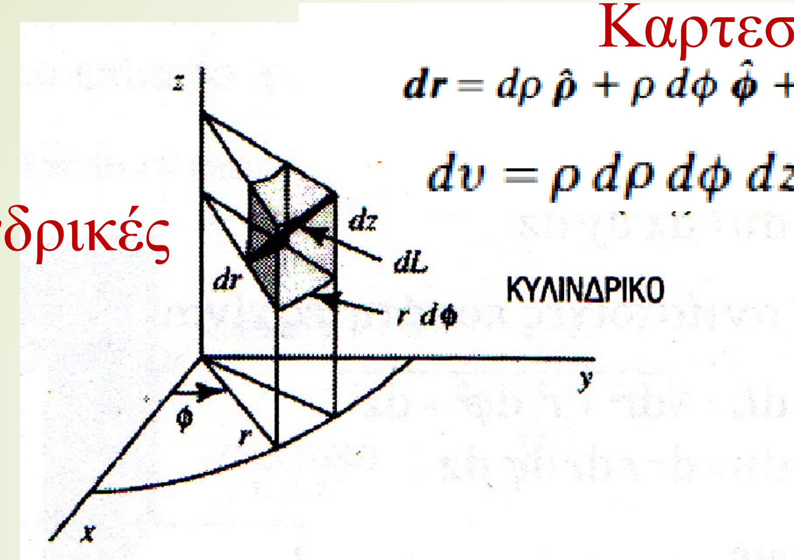
Αλλά το βασικό καλή διάθεση και όρεξη για διάβασμα !!!!

Συστήματα συντεταγμένων

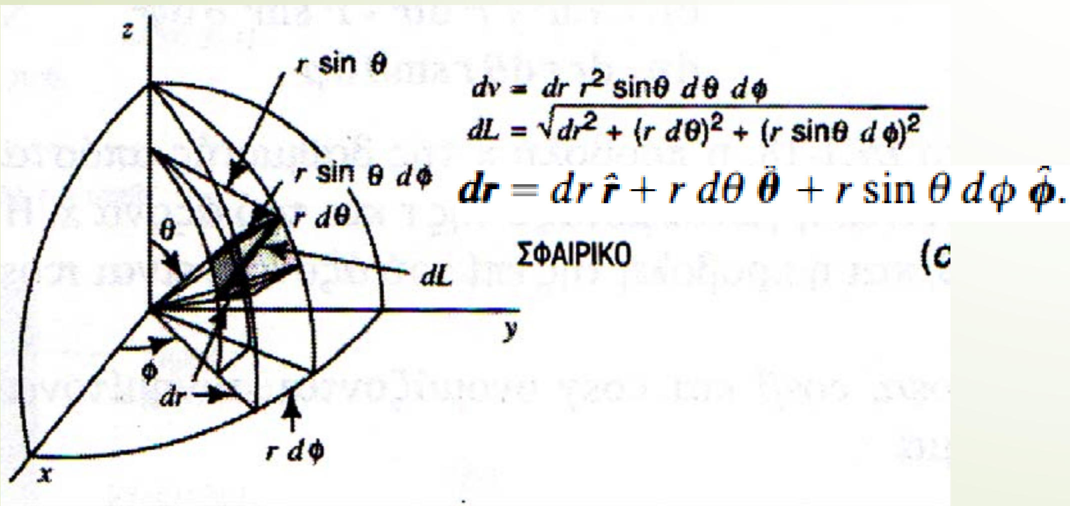
- Καρτεσιανές



- Κυλινδρικές



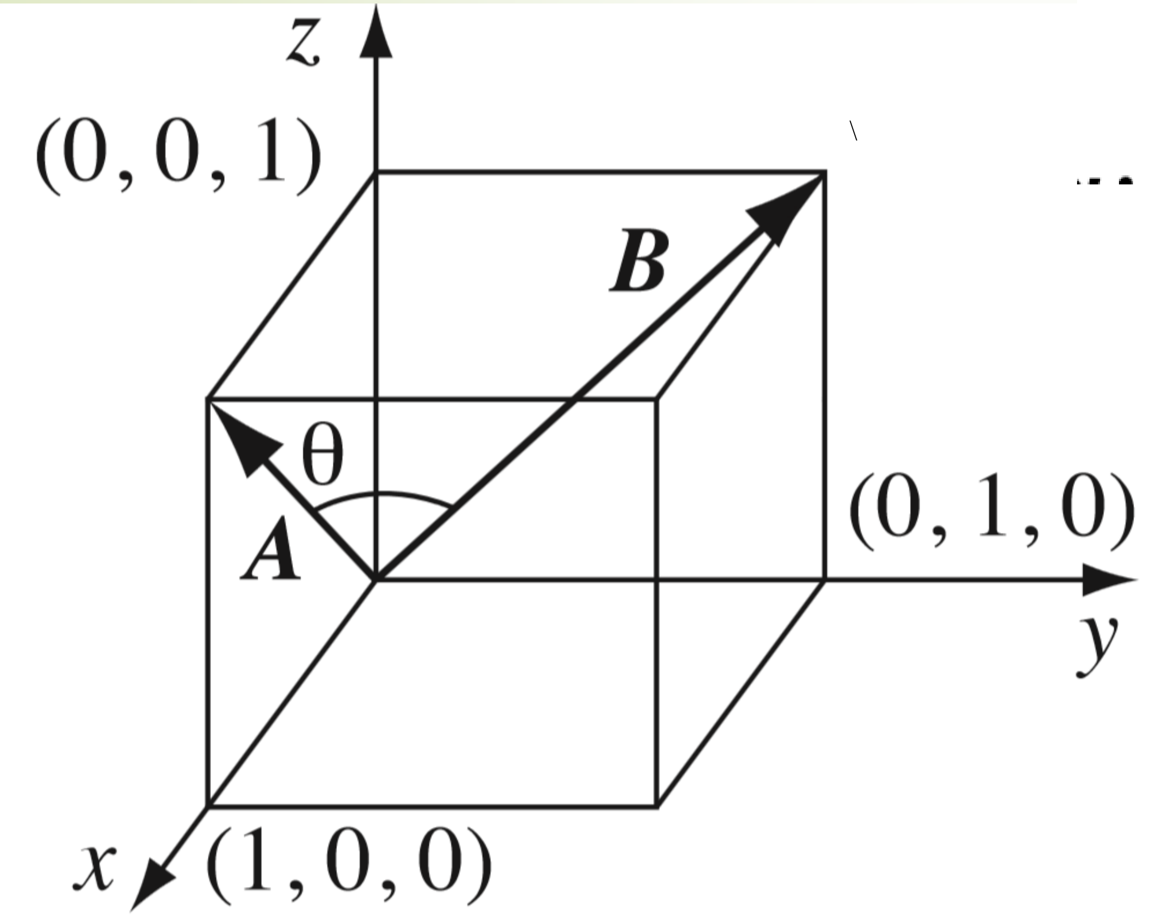
- Σφαιρικές



Καρτεσιανές

$$d\vec{\ell} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$dV = dxdydz$$



Σφαιρικές

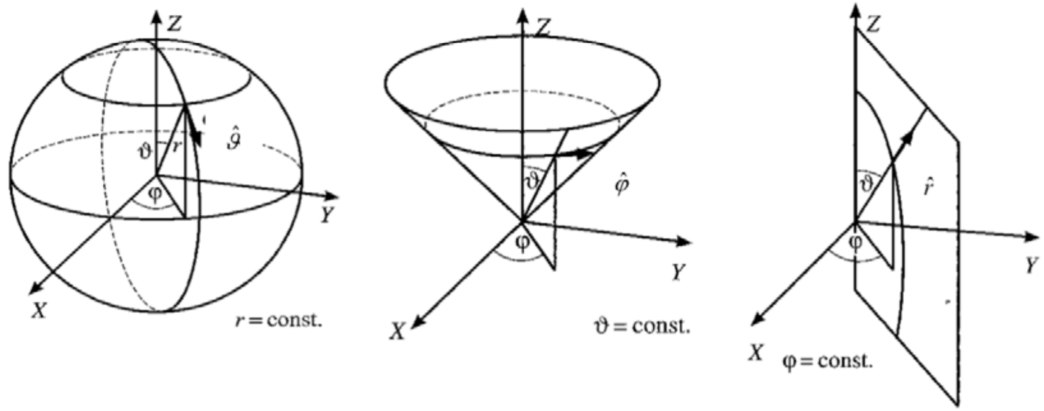
x = r sinθ cosφ
y = r sinθ sinφ
z = r cosθ

Στοιχειώδες Μήκος : $d\vec{\ell} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\vartheta} + r\sin\theta d\varphi\hat{\phi}$

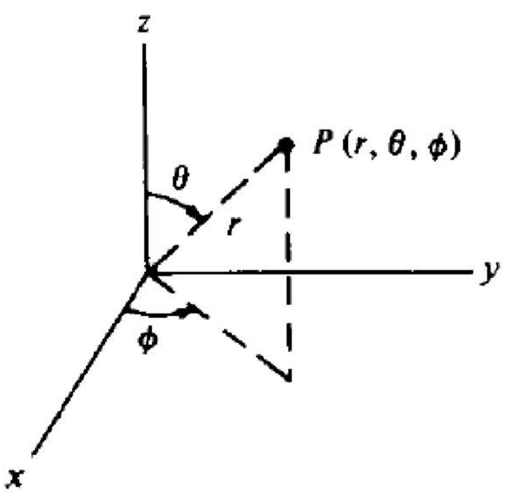
Στοιχειώδης όγκος [από r$\Longrightarrow$ r+dr, θ$\Longrightarrow$ θ+dθ, φ$\Longrightarrow$ φ+dφ]: dV = r^2 sinθ dr dθ dφ

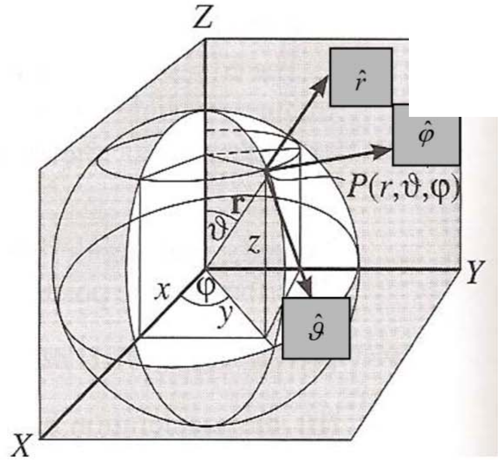
Στοιχειώδης επιφάνεια :

$$dA = \begin{cases} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi, r = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha \ [\theta \Rightarrow \theta + d\theta,\ \varphi \Rightarrow \varphi + d\varphi] \\ r\sin\theta dr d\varphi, \theta = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha \ [r \Rightarrow r + dr,\ \varphi \Rightarrow \varphi + d\varphi] \\ r dr d\theta,\ \varphi = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha \ [r \Rightarrow r + dr,\ \theta \Rightarrow \theta + d\theta] \end{cases}$$



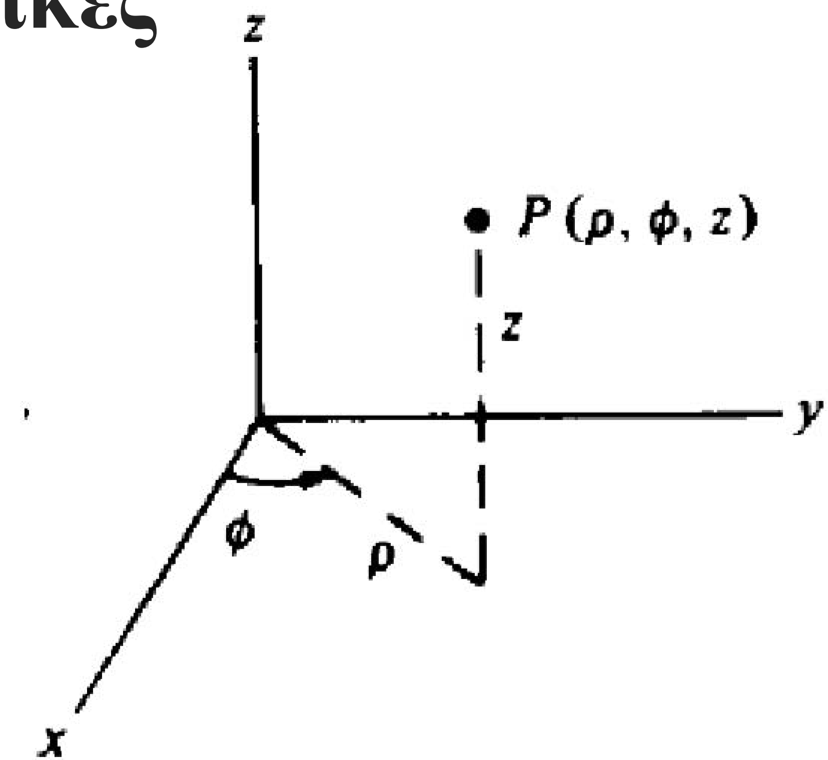
Δ. Σφαιρικές Συντεταγμένες (r,θ,φ)

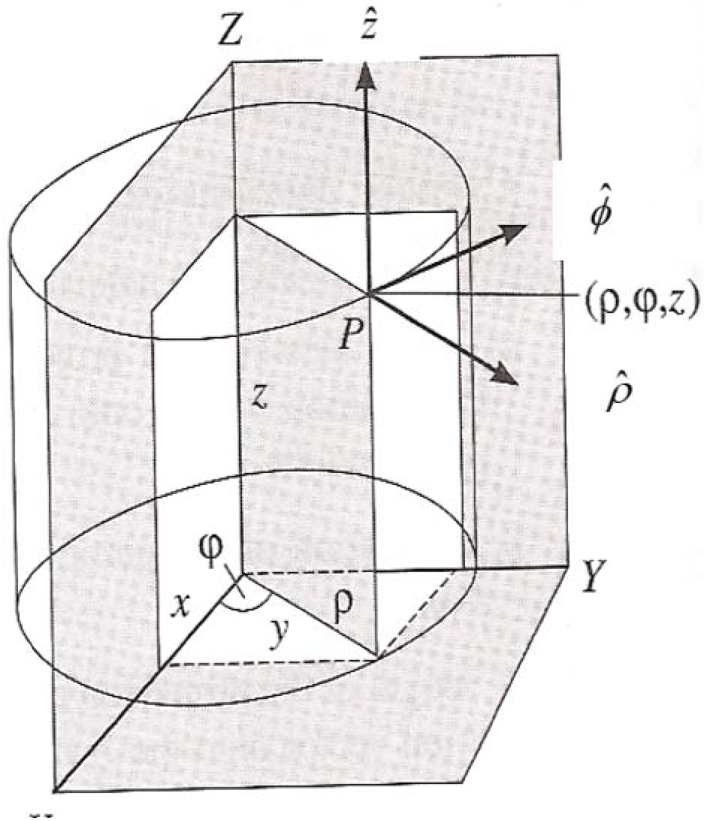




x = r sinθ cosφ
y = r sinθ sinφ
z = r cosθ

Κυλινδρικές





x = ρcosφ
y = ρsinφ
z = z
Στοιχειώδες Μήκος : $d\vec{\ell} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\phi} + dz\hat{z}$
Στοιχειώδης όγκος [από ρ⟹ ρ+dρ, φ⟹ φ+dφ, z⟹z+dz] : dV = ρ dρ dφ dz

Διαφορικοί τελεστές (Differential operators)

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

∇ Η κλίση μιας συνάρτησης $\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

$\nabla \cdot$ Ο τελεστής απόκλισης div

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{A_\rho}{\rho} + \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{2}{r}A_r + \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r}cot\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$\nabla \times$ Ο τελεστής περιστροφής curl, rot

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_\rho & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

$\frac{\partial}{\partial t}$ η μερική παράγωγος ως προς το χρόνο

Ενδεικτική Βιβλιογραφία

- J. Kraus “Κεραίες", 2η εκδ., Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη 1998 (υπάρχει και 3η έκδοση 2015)
- J. Kraus "Ηλεκτρομαγνητισμός", 4η εκδ., Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη
- E. Roubine & J. Bolomey: “Antennas General Principles”, Vol.1, North Oxford Academic
- P. Lorrain & D. R. Corson Electromagnetic Fields and Waves w. H. Freeman and Company New York 1987
- Σ. Κουρή Στοιχεία Θεωρίας κεραιών εκδ. Ζητη Θεσ/κη 1996
- J.D. Jackson Classical Electrodynamics Wiley 1999
- Melvin Schwartz Principles of Electrodynamics
- Σημειώσεις εργαστηρίου καθηγητή Κουδουμά Εμμ.

Ας αρχίσουμε: ΚΑΙ ΕΙΠΕΝ Ο ΘΕΟΣ

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \quad ή \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \quad (\text{N.}\,Gauss)(1)$$

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \quad ή \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad (\text{N.}\,Gauss\,για\ μαγνητισμό)(2)$$

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0(\mathrm{I}_C + \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_{\mathrm{E}}}{\partial t}) \quad ή \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\mathrm{J}} \quad (\text{N.}\,Ampere)(3)$$

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \varphi_B}{\partial t} \quad ή \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{N.}\,Faraday)(4)$$

ΚΑΙ ΕΓΕΝΕΤΟ ΦΩΣ

(αλλά και τηλεόραση, ραδιόφωνο, κινητό τηλέφωνο κλπ)

- Οι 4 νόμοι του Maxwell που περιγράφουν όλα τα φαινόμενα που έχουν σχέση με τον ηλεκτρομαγνητισμό

Να θυμηθούμε

- **E** Ένταση ηλεκτρικού πεδίου (V/m) (=1/3x10^{-4} Esu)
- **D** πυκνότητα ηλεκτρικής ροής $\mathbf{D}=\varepsilon_o\mathbf{E}$ (C/m^2) (=12π x 10^5 Esu)
- **B** πυκνότητα μαγνητικής ροής (T=Vs/m^2) (=10^4 Gauss)
- **H** ένταση του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu_o$ (A/m) (=4πx10^{-3} oersted)
- **Q** ηλεκτρικά φορτία (C) (=12π x 10^9 stat-c)
- *ρ* πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου (C/m^3)
- **J** πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος (A/m^2)
- Τα παραπάνω φυσικά μεγέθη καθώς και μεγέθη όπως η πυκνότητα ισχύος(W) ένταση ακτινοβολίας (P) συχνότητα (f) μήκος κύματος (λ) στερεά γωνία (Ω), Εμπέδηση (Z), διανυσματικό, Δυναμικό (A) κ.α. θα μας απασχολήσουν στο μάθημα αυτό αλλά και οι πάσης φύσεως ροές ($d\Phi = dE \cdot dS$).

Νόμος Gauss (Ηλεκτρισμός)

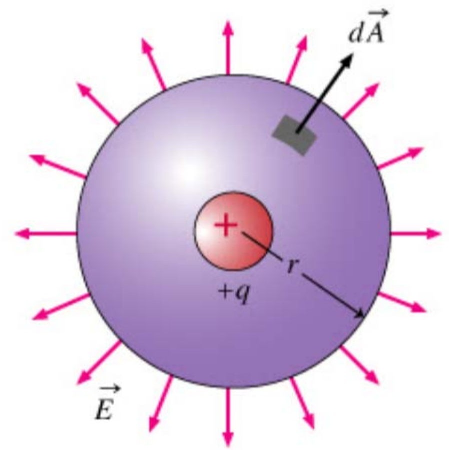
- Η συνολική ηλεκτρική ροή μέσα από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια ισούται με το καθαρό φορτίο μέσα σε αυτή την επιφάνεια διαιρούμενο με το ε_o.

$$\oint_{\Delta S} \vec{D} \bullet ds = \int_{\Delta v} \rho_v dv \qquad \nabla \; D = \rho_v \qquad \oint_{\Delta S} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Ο νόμος σχετίζει το ηλεκτρικό πεδίο με την κατανομή φορτίου, όπου γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου προέρχονται από θετικά φορτία και τερματίζουν σε αρνητικά φορτία και εμπεριέχει το νόμο του Coulomb.

Αφού αν ολοκληρώσουμε στην επιφάνεια μιας σφαίρας:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$



Συνέπειες

- Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδέν
- Το ηλεκτρικό φορτίο ενός φορτισμένου αγωγού, είναι συγκεντρωμένο στην επιφάνειά του.
- Το πεδίο Ε λίγο «έξω» από τον αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού με μέτρο, $E=\sigma/\varepsilon_o$ (σ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου).
- Το φορτίο τείνει να συσσωρευτεί σε σημεία όπου η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας είναι μικρότερη (ακίδες ή αιχμές).

Νόμος Gauss (Μαγνητισμός)

$$\oint_{\Delta S} \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0 \qquad \nabla \bullet \vec{B} = 0$$

- Η ολική μαγνητική ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν.
- Ο αριθμός των γραμμών του μαγνητικού πεδίου που εισάγεται σε ένα κλειστό όγκο πρέπει να ισούται με τον αριθμό των γραμμών του μαγνητικού πεδίου που εγκαταλείπουν αυτόν τον όγκο.
- Γραμμές του μαγνητικού πεδίου δεν μπορεί να αρχίζουν ή να τελειώνουν σε οποιοδήποτε σημείο.
- Πράγμα που σημαίνει ότι **ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ Μαγνητικά μονόπολα.**

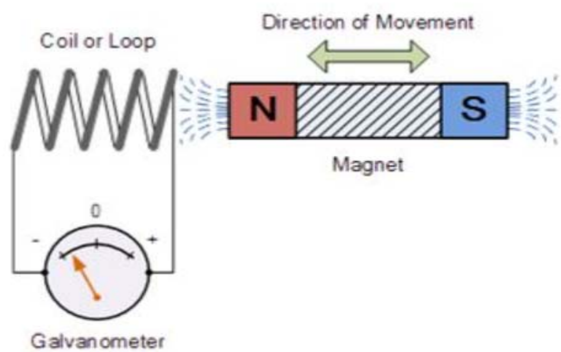
Νόμος επαγωγής Faraday

- Ο Νόμος της επαγωγής του Faraday περιγράφει τη σχέση ανάμεσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο και την μεταβολή της μαγνητικής ροής.

$$\boxed{\oint_{\Delta L} \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_{\Delta s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{s}}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

- Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του ηλεκτρικού πεδίου γύρω από κάθε κλειστή διαδρομή ισούται με το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής μέσα από κάθε περιοχή της επιφάνειας που οριοθετείται από την εν λόγω διαδρομή.
- Με απλά λόγια μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο παράγει ηλεκτρικό πεδίο.
- Αρχή λειτουργίας όλων των γεννητριών.
- Αφού $\boxed{E = -\dfrac{d\Phi_E}{dt}}$



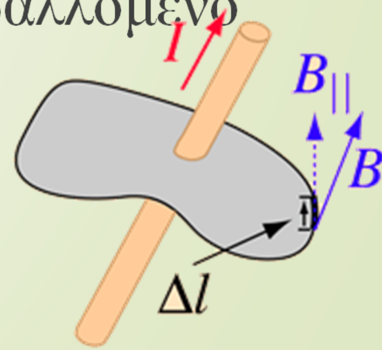
Νόμος των Ampere-Maxwell

- Ο νόμος των Ampere-Maxwell περιγράφει τη σχέση μεταξύ μαγνητικών και ηλεκτρικών πεδίων και ηλεκτρικών ρευμάτων.

$$\boxed{\oint_{\Delta L} \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_{\Delta s} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) \bullet d\vec{s}}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

- Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου γύρω από οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή καθορίζεται από το άθροισμα του συνολικού ρεύματος αγωγιμότητας μέσα από αυτό το μονοπάτι και το ρυθμό μεταβολής της ηλεκτρικής ροής (ρεύμα μετατόπισης) μέσα από οποιαδήποτε επιφάνεια που οριοθετείται από αυτό το μονοπάτι.
- Εμπεριέχει το νόμο των Biot-Savart και στην ουσία προβλέπει ότι μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο ή κινούμενο φορτίο παράγει Μαγνητικό πεδίο.
- Είναι η αρχή λειτουργίας όλων των ηλεκτρομαγνητών.

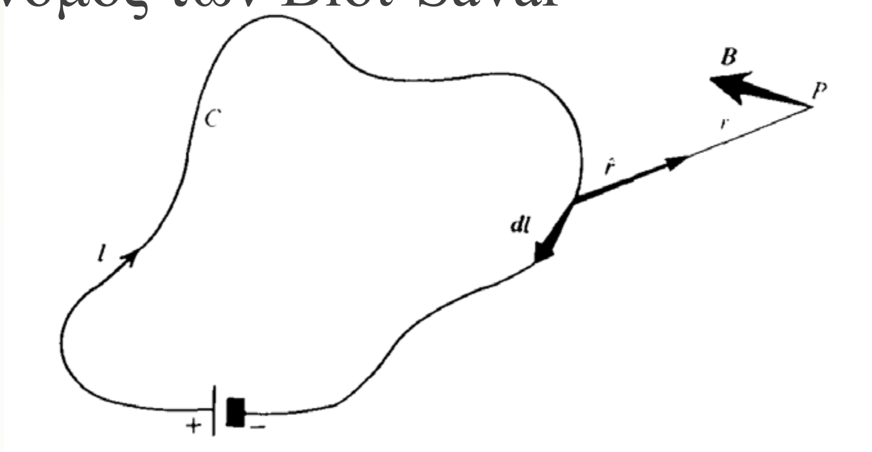


Συνέπειες

$$\oint_{\Delta L} \vec{B}\bullet d\vec{l} = \int_{\Delta s} \vec{J}\bullet d\vec{s} = \mu_0 I$$

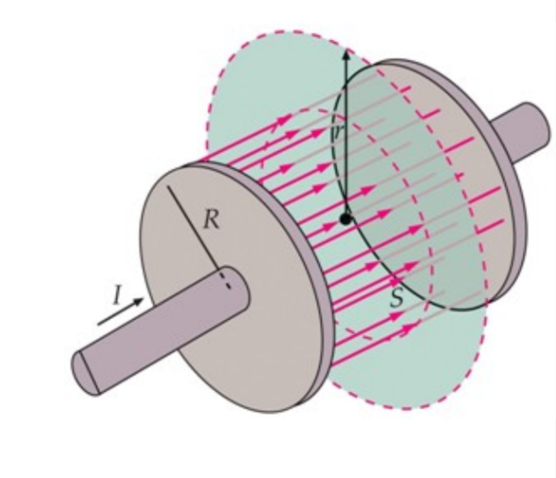
- Χωρίς το ρεύμα μετατόπισης ο νόμος του Ampere γίνεται:
- Από το νόμο του Ampere αποδεικνύεται και ο νόμος των Biot-Savar

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \frac{dl\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_\upsilon \frac{\vec{j}\times\hat{r}}{r^2}d\upsilon'$$



- Ρεύμα μετατόπισης

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt}$$



Ορισμένες χρήσιμες συνέπειες

- Διατήρηση του Φορτίου εξίσωση της συνέχειας.
- Αν δράσουμε με το τελεστή της απόκλισής και στα δύο μέλη της του ν. Ampere έχουμε:

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\Leftrightarrow\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\nabla\cdot\vec{J}+\nabla\cdot\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\Leftrightarrow$$

$$0=\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)\Leftrightarrow\boxed{\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}}$$

Ρυθμός μείωσης του ηλεκτρικού φορτίου (ανά μονάδα όγκου)

Ροή του ηλεκτρικού ρεύματος έξω από κάποιο όγκο (ανά μονάδα όγκου)

Δύο Δυναμικά

- Ας γνωρίσουμε το δυναμικό V κάπως διαφορετικά μπορούμε να το δούμε και ως *Φ*
- Ορίζεται μαθηματικά ως $\boxed{\vec{E}(r) = -\nabla\Phi(r)}$ και είναι βαθμωτή ποσότητα αν πάρουμε την απόκλιση της ποσότητας και από το νόμο του Gauss έχουμε:

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{E}(r) = -\nabla^2\Phi(r) = \frac{\rho_f}{\epsilon_0}}$$ εξίσωση Poisson ή

στον ελεύθερο χώρο $\boxed{\nabla^2\Phi(r) = 0}$ εξίσωση Laplace με οριακές συνθήκες

- Διανυσματικό δυναμικό A όπως και στο γνωστό μας βαθμωτό δυναμικό το διανυσματικό ορίζεται :

$\boxed{\vec{B}(r) = \nabla\times\vec{A}(r) \text{ πράμα που μας δίδει τη δυνατότητα να } \nabla\cdot\vec{A} = 0}$ αλλά και

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}}$$

Επαλληλία

- Στον Ηλεκτρομαγνητισμό βασική αρχή είναι η αρχή της Επαλληλίας

Πχ

- Η δύναμη που ασκείται σε ένα φορτίο εξαιτίας 2 άλλον φορτίων είναι το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που θα ασκούνταν στο φορτίο εξαιτίας του κάθε φορτίου ξεχωριστά.
- Το ίδιο ισχύει και για άλλα μεγέθη στον Η/Μ πχ

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{B}}_1 + \vec{\mathrm{B}}_2, \vec{\mathrm{A}} = \vec{\mathrm{A}}_1 + \vec{\mathrm{A}}_2}$$

- Είναι μια βασική αρχή που θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη.

Ενέργεια στο Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο

- Είχαμε ορίσει… το δυναμικό σε ένα σημείο ως $V = \Phi(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q}$
- Άρα $U = q \cdot V(\vec{r})$ και γενικά $U = q \cdot V(\vec{r})$ (για 2 φορτία $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}}$)
- Γενικεύοντας $dU = \Phi dQ$ … $\mathrm{U} = \frac{1}{2}\int_V \rho \Phi dV$ και τελικά $U = \frac{\epsilon_0}{2}\int \vec{E} \cdot \vec{E} dV$ ή $\frac{dU}{dV} = u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$
- Δηλαδή η πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτροστατικού πεδίου είναι ανάλογη του E^2
- Με όμοιο τρόπο επιδεικνύεται ότι και η πυκνότητα ενέργεια του μαγνητικού πεδίου είναι $u = \frac{\mu_0}{2} H^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$
- Η ενέργεια μαγνητικού πεδίου είναι κατ' αναλογία $\mathrm{U} = \frac{1}{2}\int_V \vec{j} \cdot \vec{A} dV$

Πυκνότητα Ενέργειας

- Σε πυκνωτή το στοιχειώδες έργο

$$dw = vdq \Rightarrow dw = \frac{q}{C}dq \Rightarrow W = \int \frac{q}{C}dq \Rightarrow W = U = \frac{Q^2}{2C}$$

$$Q = CV \quad ά\rho\alpha \quad U = \frac{V^2 C}{2}$$

$$V = El, C = \epsilon_o \frac{A}{l} \quad \text{αρα } U = \epsilon_o \frac{E^2 Al}{2} \Rightarrow \frac{U}{Al} = u = \epsilon_o \frac{E^2}{2} \text{ Πυκνότητα Ενέργειας}$$

Εγένετο φως ;

- Οι εξισώσεις Maxwell οδηγούν σε Κυματική εξίσωση ;
- Σε ελεύθερο χώρο οι εξισώσεις γίνονται

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho_v = 0 \Leftrightarrow \nabla \bullet \vec{E} = 0 \ \ (\rho_v = 0)$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\vec{J} = 0)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Δηλαδή :

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0 \qquad (1)$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (4)$$

Εγένετο Φως;

- Παραγωγίζουμε την (3) ως προς χρόνο έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \overrightarrow{H}\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla \times \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$$

- Όμως B=μH και στο κενό $B=\mu_o H$ αντικαθιστώντας έχουμε

$$\nabla \times \frac{\partial}{\partial t}\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla \times \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$$

Αν αντικαταστήσουμε το $\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ από την (4) έχουμε

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

χρησιμοποιώντας την σχέση

$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \bullet \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ μιας και $\nabla(\nabla \bullet \vec{E}) = 0$ (σχέση (1) έχουμε

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

ΚΑΙ ΕΓΕΝΕΤΟ ΦΩΣ

- Με παρόμοιες πράξεις σε (4) και (3) καταλήγουμε στις δύο εξισώσεις

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5\alpha) \qquad \nabla^2 \vec{H} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (5\beta)$$

- Οι οποίες αντιστοιχούν σε δύο κυματικές εξισώσεις με ταχύτητα κύματος

$C = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ αφού οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$

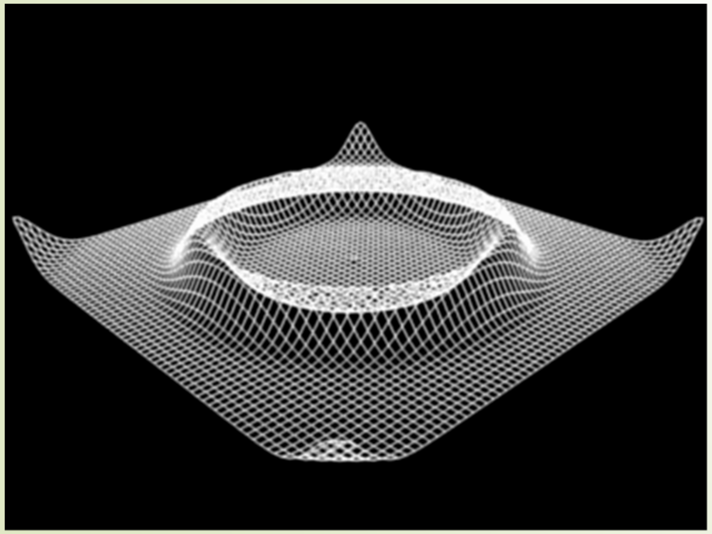
έχουν σαν λύση κύματα τα οποία οδεύουν με ταχύτητα *c*.

- Οι λύσεις λοιπόν των (5) είναι κύματα !!!! Τα οποία ταξιδεύουν με ταχύτητα C

- **Θα το δούμε παρακάτω**

Κύμα ορισμοί

- **Κύμα** ονομάζεται μια διαταραχή που μεταδίδεται στο χώρο και το χρόνο. Ο όρος **Κύμα** (από το αρχαίο ελληνικό ρήμα "κύω" = φουσκώνομαι) χαρακτηρίζει τη μεταφορά της διαταραχής συνήθως διαμέσου ενός *μέσου*. Η μεταφορά αυτή (μετάδοση) γίνεται, στα υλικά μέσα, ως παλμική κίνηση μεταξύ των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου, όμως ορισμένα είδη κυμάτων, όπως τα ηλεκτρομαγνητικά, μπορούν να διαδίδονται και στο κενό.(Wikipedia)



Κύμα

- Αφού είναι μια διαταραχή που διαδίδεται στο χώρο και στο χρόνο θα είναι της μορφής $\Psi(r,t) = f(k\cdot r - \omega t)$
- Είναι όπως είπαμε λύση της Δ.Ε η οποία σε 1-Δ γίνεται : $\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$
- Αν τώρα η συνάρτηση *f* είναι περιοδική έχουμε αρμονικό κύμα.
- Ένα απλό αρμονικό κύμα είναι η διάδοση μιας ταλάντωσης στο χώρο
- Αν η διαταραχή είναι κάθετη στην διάδοση μετάδοσης του κύματος έχουμε εγκάρσιο κύμα ενώ αν είναι παράλληλη διάμηκες.
- Ένα ημιτονοειδές αρμονικό κύμα σε μια διάσταση μπορεί να γραφεί :

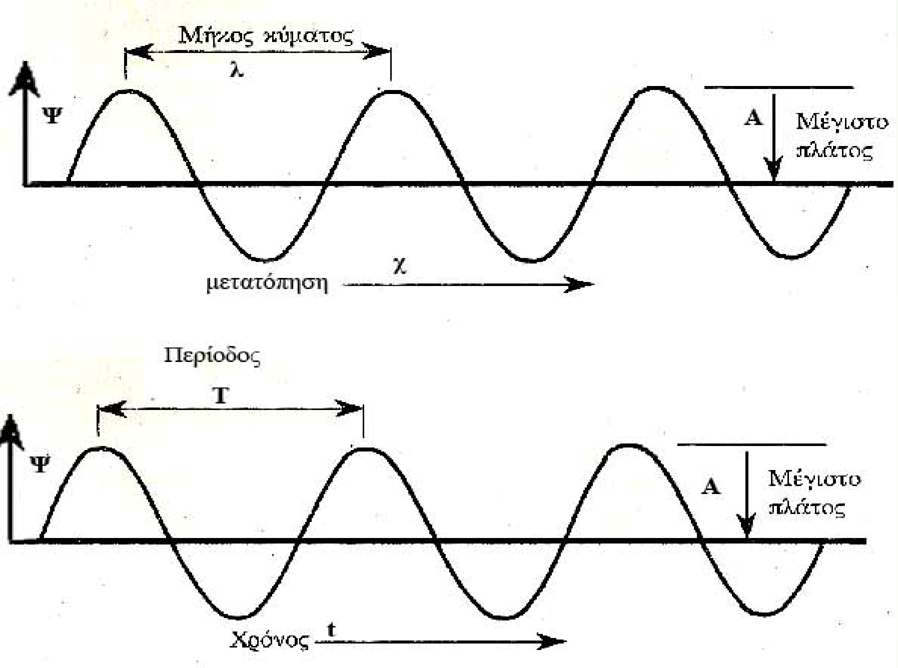
$$\Psi(\mathrm{x},t) = A\sin(\omega t - kx) = \mathrm{Re}(Ae^{-i(kx-\omega t)})$$

οπότε μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα κύμα με τη συνάρτηση :

$\Psi(\mathrm{x},t) = Ae^{-i(kx-\omega t)}$ ή $\Psi(\mathrm{x,t})=\mathrm{A}\mathrm{e}^{-j(kx-\omega t)}$ όπου j ή i η φανταστική μονάδα $i^2 = j^2 = -1$

Κάτι πολύ οικείο σε σας αφού **Ξέρετε** πολύ καλά τα εναλλασσόμενα ρεύματα!!!!!!

Χαρακτηριστικά του Κύματος

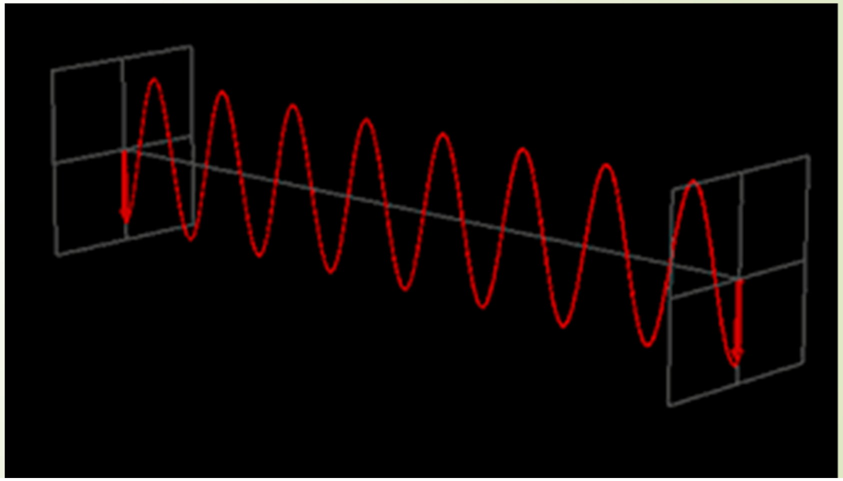


$$\Psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx) = \mathrm{Re}(Ae^{-j(kx-\omega t)})$$

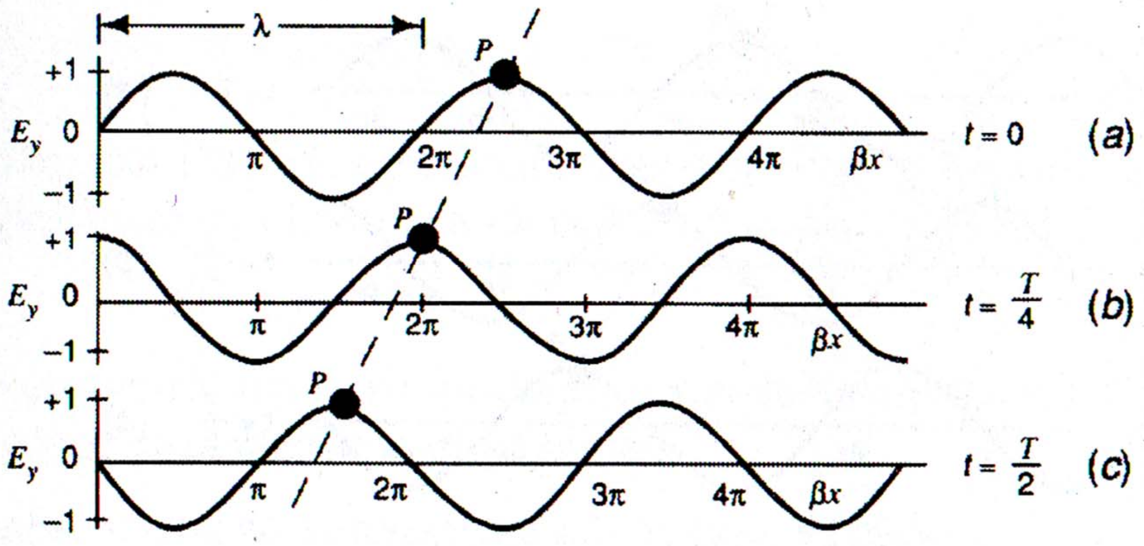
$$\acute{\eta} \quad \Psi(x,t) = Ae^{-j(kx-\omega t)}$$

λ:Μήκος κύματος (m)
T: Περίοδος κύματος (sec)
$f=T^{-1}$ Συχνότητα (Hz)
$k=2\pi\lambda^{-1}$:Κυματάριθμος (m^{-1})
$\omega=2\pi f$: Κυκλική συχνότητα

A: Πλάτος κύματος
Η ποσότητα $\omega t - kx$ ονομάζεται φάση του κύματος και
$c = \dfrac{\omega}{k} = \lambda \cdot f$ η ταχύτητα (φάσης) ενός κύματος



Ταχύτητα κύματος



- Το σημείο p έχει σταθερή φάση. Άρα

$$kx - \omega t = \text{σταθερό}$$

$$\frac{d(\mathrm{k}\,x - \omega t)}{dt} = 0 \Rightarrow k\frac{dx}{dt} = \omega \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\omega}{k}$$

- Η ταχύτητα μετάδοσης δηλαδή του ενός αρμονικού κύματος

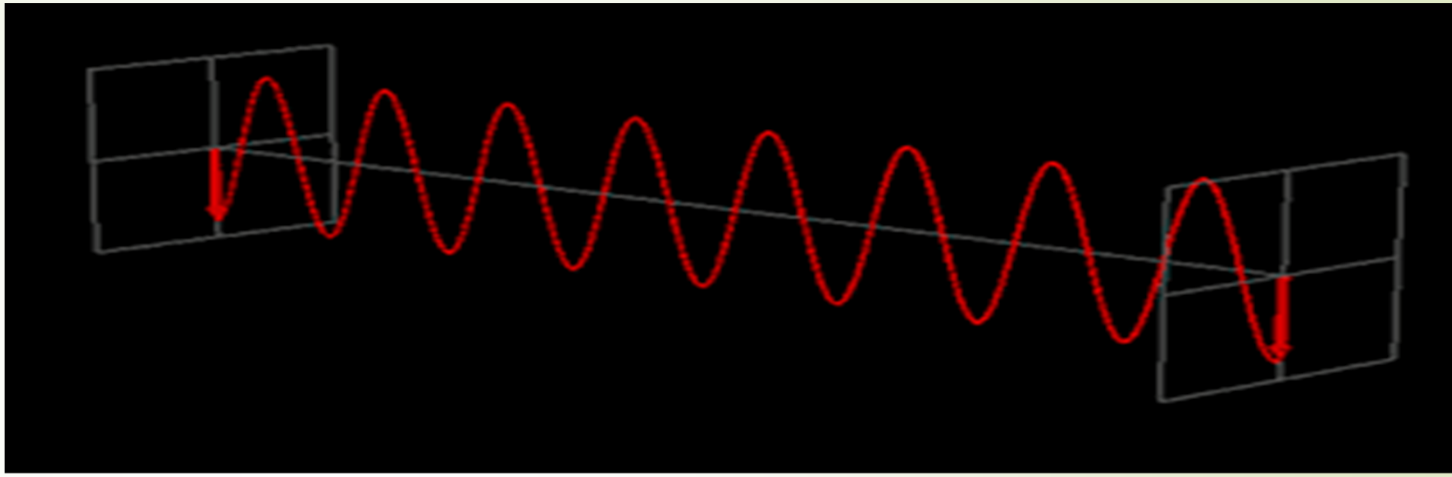
Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

- Δοκιμάζουμε σαν λύση της (5α) μια συνάρτηση της μορφής

$$E = E_0 e^{j(kx-\omega t)}\hat{y} \quad (6)$$

έχουμε δηλαδή μια μορφή :

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$



Αντικαθιστώντας :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial^2 x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 E_0 e^{-j(kx-\omega t)} y}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_0 e^{-j(kx-\omega t)} y}{\partial t^2} \Leftrightarrow$$

$$-k^2 E_0 e^{-j(kx-\omega t)} y = -\frac{\omega^2}{c^2} E_0 e^{-j(kx-\omega t)} y \Leftrightarrow \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow c = \frac{\omega}{k} \quad (7)$$

Αν λοιπόν η (6) είναι λύση της (5α) τότε ισχύει η (7) όπου C είναι η ταχύτητα φάσης σε μονοχρωματικό κύμα ή η ταχύτητα του κύματος . Για να δούμε τώρα τι θα ισχύει για το Η

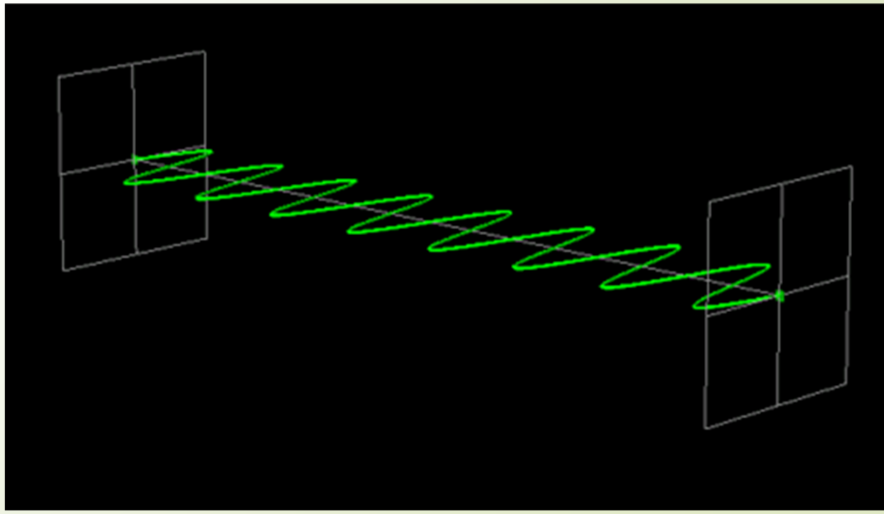
Μαγνητικό πεδίο

- Αντικαθιστώντας στο νόμο του Ampere (3) τη σχέση (6) έχουμε $\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
- $$\nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_o \frac{\partial E_0 e^{-j(kx-\omega t)} \hat{y}}{\partial t} \Leftrightarrow -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_z \end{vmatrix} \hat{y} = j\omega \epsilon_o E_o e^{-j(kx-\omega t)} \hat{y}$$

$$-\left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}\right)\hat{y} = j\omega\epsilon_o E_o e^{-j(kx-\omega t)}\hat{y} \Leftrightarrow -\frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\epsilon_o E_o e^{-j(kx-\omega t)}$$ άρα ολοκληρόνοντας $H_z = \dfrac{\omega}{k}\epsilon_o E_o e^{-j(kx-\omega t)}$

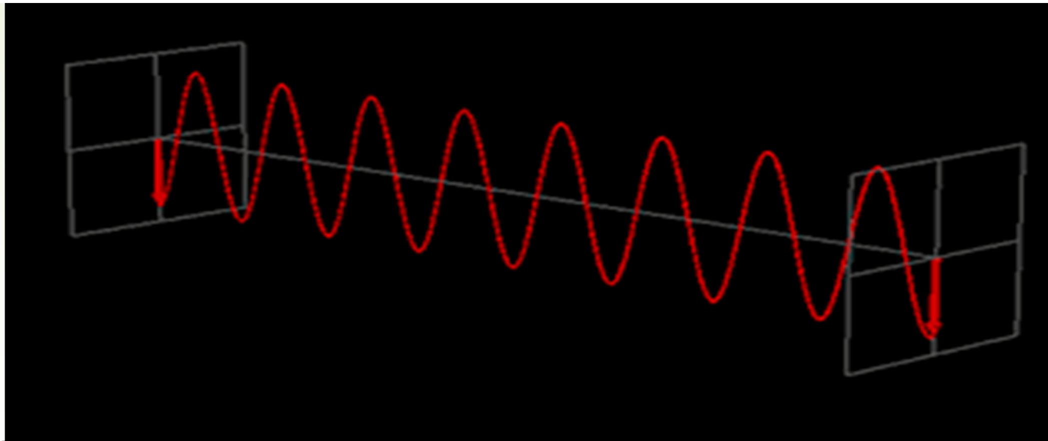
$$\vec{H} = c\epsilon_o E_o e^{-j(kx-\omega t)}\hat{z} = H_o e^{-j(kx-\omega t)}\hat{z}$$

- $$\boxed{\vec{B} = \frac{E_o}{C} e^{-j(kx-\omega t)} \hat{z} \text{ με } \mathrm{E}_o = C B_o}$$

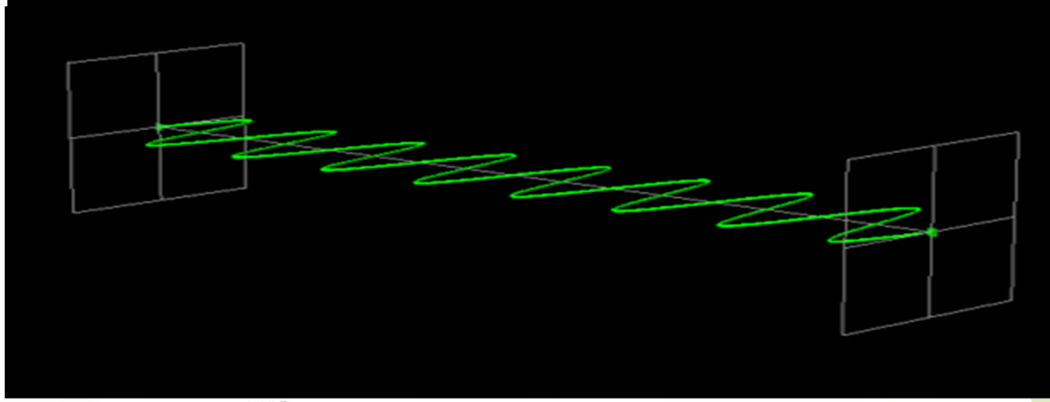


- Δηλαδή το Μαγνητικό πεδίο ταλαντώνεται κάθετα στο ηλεκτρικό.

Τι έχουμε δει μέχρι τώρα

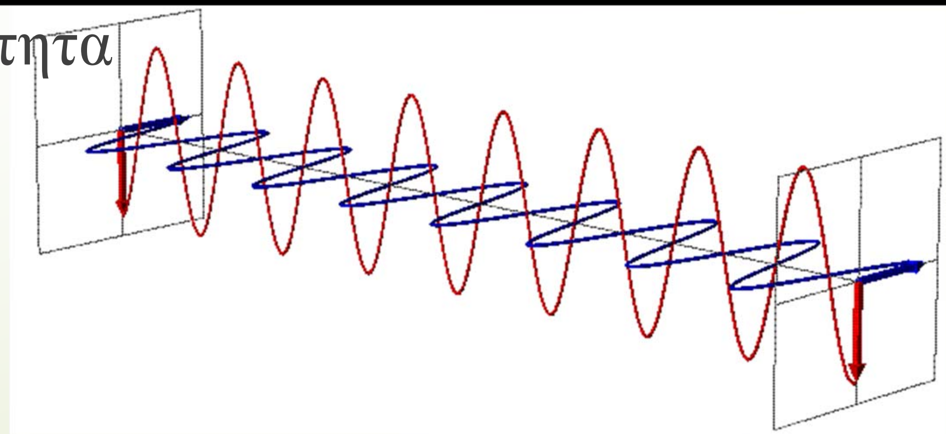


- Ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = E_0 e^{-j(kx-\omega t)} y$



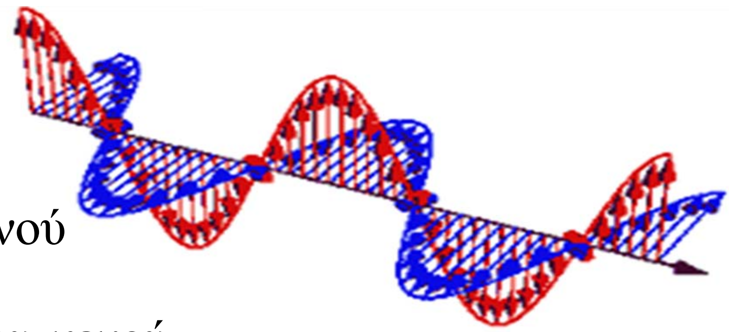
- Μαγνητικό πεδίο $\vec{H} = H_o e^{-j(kx-\omega t)} \hat{z}$

- Και για τα δύο η ταχύτητα διάδοσης ή ταχύτητα φάσης είναι όπως είπαμε



$$C = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi / \lambda} = \lambda \cdot f = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

Για να δούμε λίγο καλύτερα



$\varepsilon_0 = 8.8541878 \times 10^{-12}$ [F/m] Διηλεκτρική σταθερά του κενού (permittivity)

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] Μαγνητική διαπερατότητα του κενού (permeability)

$$\boxed{C_0^{\,2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{1}{8.9 \cdot 4\pi \cdot 10^{19} \dfrac{FH}{m^2}} \Leftrightarrow C_0 \approx \frac{1}{\sqrt{910^{16} \dfrac{s^2}{m^2}}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{\sec}}$$

Προφανώς για οποιοδήποτε άλλο μέσο με: $\mu = \mu_r \mu_0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

Η ταχύτητα διάδοσης του Η/Μ κύματος θα είναι: $C = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}}$

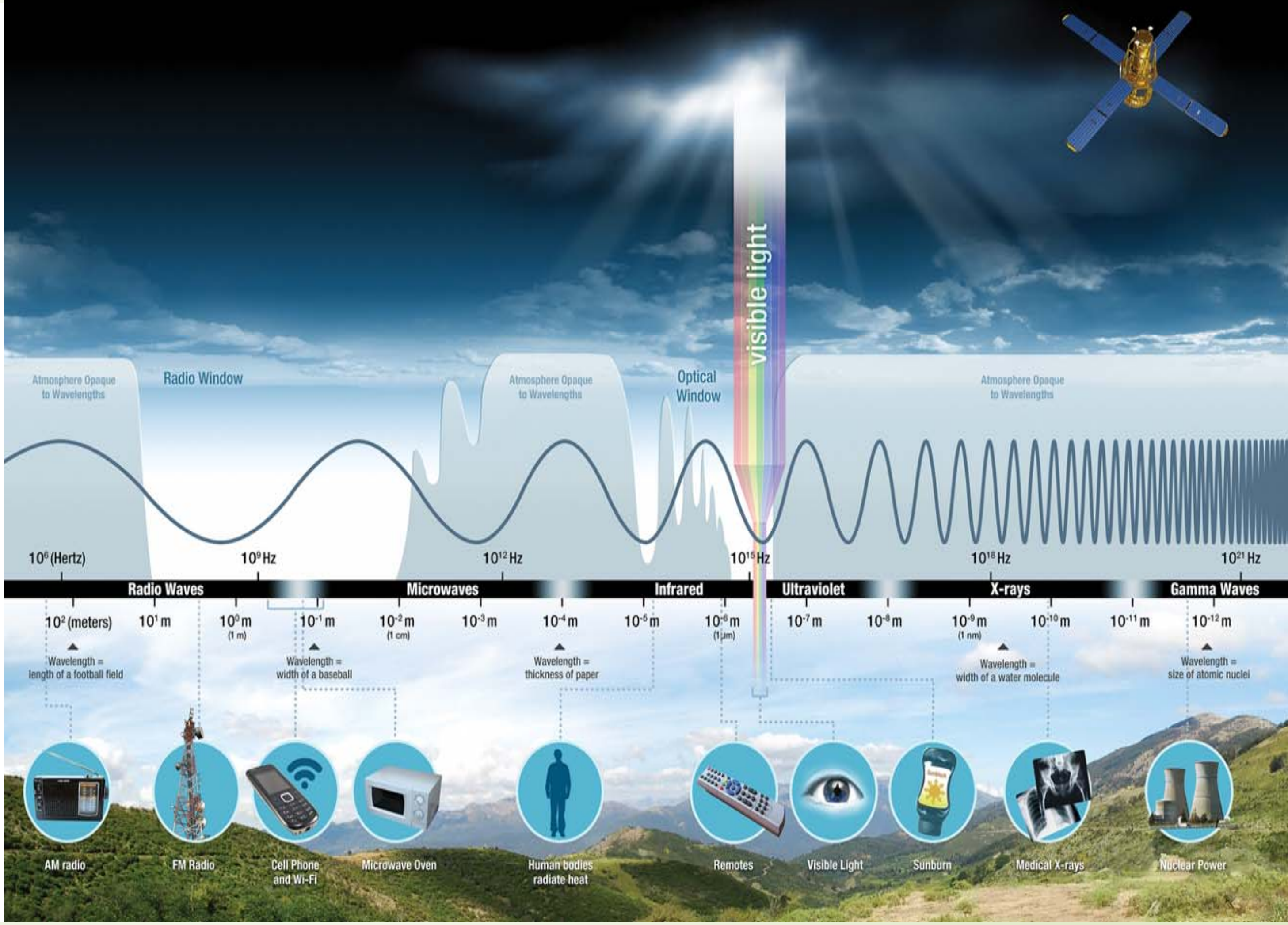
Στα διάφορα υλικά η ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι διαφορετική από αυτή στο κενό και ο λόγος της ταχύτητας του Η/Μ κύματος στο κενό προς αυτήν είναι ο δείκτης διάθλασης του υλικού.

$$n = \frac{C_0}{C} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$$

Ηλεκτρομαγνητικό Φάσμα

Ανάλογα με τη συχνότητα του Η/Μ κύματος μπορούμε να το κατατάξουμε σε διάφορες μπάντες του Η/Μ ΦΑΣΜΑΤΟΣ

Low Frequency Long Wavelength	Type of wave	Typical source	Example of detector	Approximate wavelength	Typical users	Dangers of over exposure
	Radio: LW MW VHF	electronic circuits, cool objects	aerial and electronic circuit	1km 100m 1m	communica-tions, radio, TV	safe (unless very concentrated)
	Microwaves	electronic circuits, cool objects	aerial and electronic circuit	1cm (10^{-2}m)	communica-tions satellites, telephony, heating water and food	burning, if concentrated
	Infra-red (ir)	electronic devices, warm objects, sun	electronic detectors, special film, blackened thermometer	0.1mm (10^{-4}m)	magic eyes in security lighting, remote control (e.g. TV)	burning, if concentrated
	Light: Red, Orange, Yellow, Green, Blue, Indigo, Violet	electronic devices(LED), hot objects, sun	eye, film, electronic devices (e.g.LDR)	0.001mm (10^{-6}m)	seeing, photography	burning, blindness, if concentrated
	Ultra-violet (uv)	gas discharge, very hot objects, amps, sun	film	0.00001mm (10^{-8}m)	sun-tan lamp, making ions, making Vitamin D	sunburn, skin cancer
	X-rays	very fast electrons hitting a metal target	film	10^{-10}m	imaging defects in bones, hidden devices	cell destruction, cell mutation, cancer
High Frequency Short Wavelength	Gamma rays (γ)	radioactive nuclei decaying	film, GM tube	10^{-12}m	medical tracers, killing cancerous cells, sterilisation	cell destruction, cell mutation, cancer



Το θεώρημα και το διάνυσμα Poynting

Είναι συχνά αναγκαίο να προσδιοριστεί η κατεύθυνση ροής ισχύος. Στις περιπτώσεις αυτές εφαρμόζεται το θεώρημα του Poynting. Αν υποθέσουμε ένα τυχαίο όγκο και δεδομένου ότι ισχύουν οι εξισώσεις του Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Λαμβάνοντας την απόκλιση του διανύσματος Ex*H* $\nabla \bullet (\vec{E} \times \vec{H})$ *και αφού χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα* $\nabla \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \bullet \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \bullet \nabla \times \vec{B}$ *αλλά και τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε:*

$$\nabla \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \bullet \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \bullet \nabla \times \vec{H} = -\vec{H} \bullet \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \bullet \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

Το θεώρημα του Poynting

Δηλαδή :

$$\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H}) = -\vec{H}\bullet\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\bullet\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \vec{E}\bullet\vec{J}$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad \& \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$

Και λαμβάνοντας υπόψιν ότι: $\vec{H}\bullet\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\vec{H}\bullet\vec{B}}{2}) = \frac{\mu}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t} \quad \& \quad \vec{E}\bullet\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\vec{E}\bullet\vec{D}}{2}) = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}$

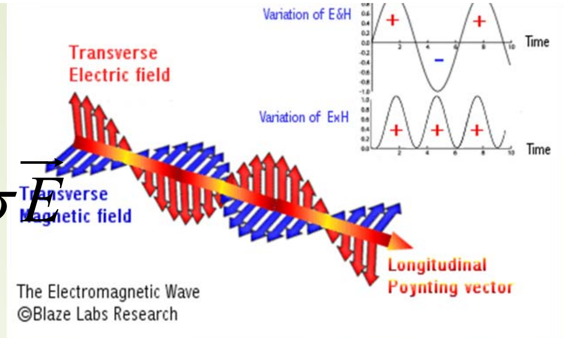
θα έχουμε: $\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\vec{H}\bullet\vec{H} + \varepsilon\vec{E}\bullet\vec{E}\right) - \vec{E}\bullet\vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\mu H^2 + \varepsilon E^2\right) - \vec{E}\bullet\vec{J}$

Βαφτίζουμε $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ Διάνυσμα Poynting

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη πάνω στον ίδιο όγκο *ΔV* λαμβάνουμε:

$$\int_{\Delta V}\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H})dV = \int_{\Delta V}\nabla\bullet\vec{S}dV = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Delta V}\frac{1}{2}\left(\mu H^2 + \varepsilon E^2\right)dV - \int_{\Delta V}\vec{E}\bullet\vec{J}dV$$

Το θεώρημα του Poynting

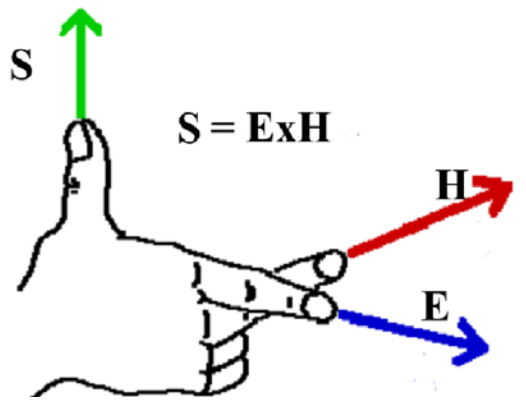


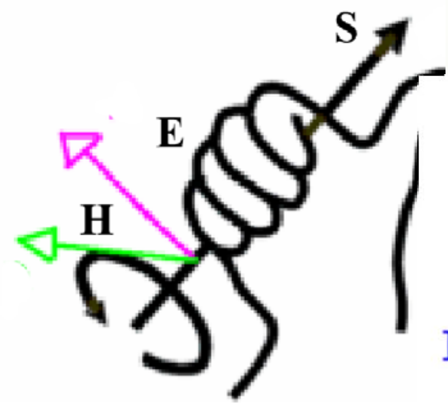
Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης και το νόμο του Ohm $\vec{J} = \sigma\vec{E}$
Έχουμε το θεώρημα Poynting:

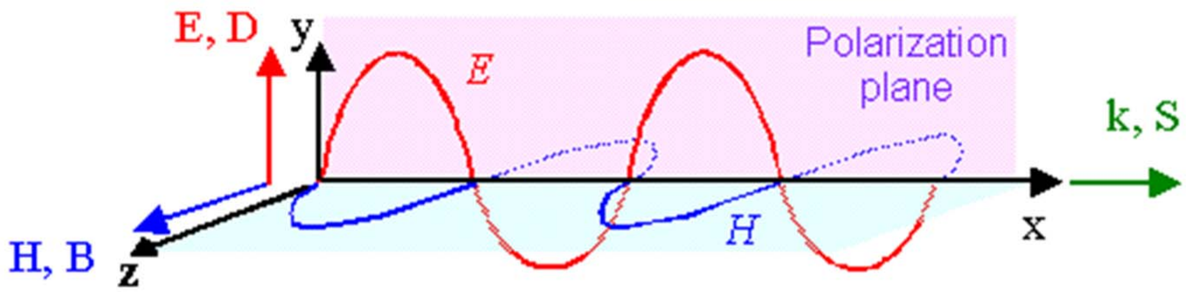
$$\int_{\triangle v} \nabla \bullet (\vec{E}\times\vec{H})dV = \oint_{\triangle s} (\vec{E}\times\vec{H})\bullet d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\triangle v}\frac{1}{2}\left(\mu H^2 + \varepsilon E^2\right)dV - \int_{\triangle v}\sigma E^2 dV$$

$$ή \quad \oint_{\triangle s}\vec{S}\bullet d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\triangle v}\frac{1}{2}\left(\mu H^2 + \varepsilon E^2\right)dV - \int_{\triangle v}\sigma E^2 dV$$

Άρα το διάνυσμα Poynting $\vec{S}$ ή $\vec{P}$ δίνει τη στιγμιαία ροή ισχύος ανά μονάδα επιφανείας – πυκνότητα ισχύος σε W/m^2 που δηλώνει ταυτόχρονα και την κατεύθυνση του ακτινοβολούμενου Η/Μ πεδίου δηλαδή η ισχύος γίνεται στην κατεύθυνση διάδοσης και είναι κάθετη στα διανύσματα ***E*** και ***H***.







Το θεώρημα του Poynting

Σύμφωνα με το θεώρημα Poynting η ισχύς που ρέει από μια επιφάνεια που περιβάλλει κάποιο όγκο, είναι ίση με την ταχύτητα μείωσης της ενέργειας που είναι αποθηκευμένη μέσα στον όγκο που περιβάλλεται από αυτή την επιφάνεια μείον την ισχύ που διαχέεται ως θερμότητα μέσα σε αυτόν (ισχύ απωλειών στον όγκο V) - διατήρηση της ενέργειας.

Η πυκνότητα ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας είναι:

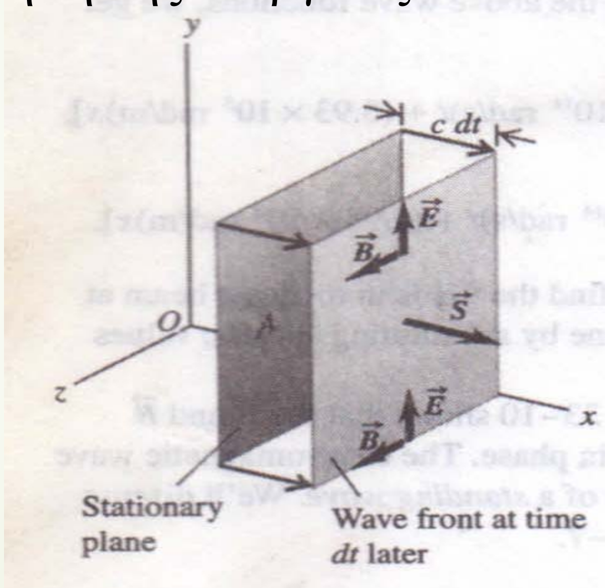
$$w = \frac{1}{2}\left[\mu H^2 + \varepsilon E^2\right]$$

Η πυκνότητα απωλειών ισχύος είναι:

$$p_L = \sigma E^2$$

Η διαφορική μορφή του θεωρήματος του Poynting είναι:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -p_L$$



33–11 Wave front at a time *dt* after it passes through the stationary plane with area *A*. The volume between the plane and the wave front contains an amount of electromagnetic energy *uAc dt*.

Μιγαδικό Διάνυσμα Poynting

- Όπως είδαμε τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία μεταβάλλονται ημιτονοειδώς με το χρόνο οπότε μπορούν να παρασταθούν με μιγαδικά διανύσματα (phasors). Στην περίπτωση αυτή οι στιγμιαίες τιμές του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου μπορούν να γραφούν με την μορφή:

$$\mathrm{Re}(\vec{E}e^{j\omega t}) = \frac{1}{2}(\vec{E}e^{j\omega t} + \vec{E}^* e^{-j\omega t})$$

$$\mathrm{Re}(\vec{H}e^{j\omega t}) = \frac{1}{2}(\vec{H}e^{j\omega t} + \vec{H}^* e^{-j\omega t})$$

- Ας υπολογίσουμε την ποσότητα $\vec{S}_c$ (αφού η ισχύς είναι πραγματική)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{2}(\vec{E}e^{j\omega t} + \vec{E}^* e^{-j\omega t}) \times \frac{1}{2}(\vec{H}e^{j\omega t} + \vec{H}^* e^{-j\omega t}) = \frac{1}{4}(\vec{E} \times \vec{\mathrm{H}}^* + \vec{E}^* \times \vec{\mathrm{H}}) + \frac{1}{4}(\vec{E} \times \vec{\mathrm{H}} e^{j2\omega t} + \vec{E}^* \times \vec{\mathrm{H}}^* e^{-j2\omega t}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E} \times \vec{\mathrm{H}}^*) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E} \times \vec{\mathrm{H}} e^{j2\omega t}) \qquad \text{αφού ισχύει } \vec{E}^* \times \vec{\mathrm{H}} = (\vec{E} \times \vec{\mathrm{H}}^*)^* \ \& \ \vec{E}^* \times \vec{\mathrm{H}}^* = (\vec{E} \times \vec{\mathrm{H}})^*$$

Στην παραπάνω σχέση ο πρώτος όρος είναι ανεξάρτητος του χρόνου και ο δεύτερος μεταβάλλεται με διπλάσια συχνότητα και συνεπώς η μέση χρονική τιμή του σε διάστημα μιας περιόδου είναι μηδενική.

Μιγαδικό διάνυσμα Poynting Μέση Ισχύς

- Εφόσον στις πρακτικές περιπτώσεις κεραιών συνήθως ενδιαφέρει η μέση τιμή της επιφανειακής πυκνότητας ισχύος κατά τη διάρκεια μιας περιόδου και όχι η στιγμιαία τιμή ισχύος οδηγούμαστε στον ορισμό του μιγαδικού διανύσματος του Poynting:

$$\boxed{\vec{\mathrm{S}}_c = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{\mathrm{H}}^*)}$$

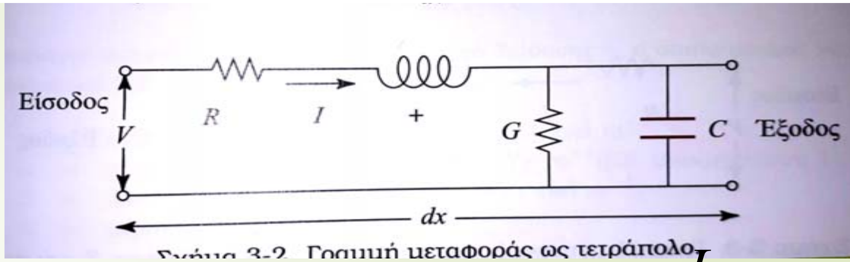
- το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της επιφανειακής πυκνότητας ισχύος που ακτινοβολείται:

$$\boxed{\vec{S}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E} \times \vec{\mathrm{H}}^*)}$$

- Επομένως η μέση ισχύς που ακτινοβολείται από μία πηγή εκπομπής (κεραία) θα δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{W_{rad} = \oint_{\triangle s} \vec{S} \bullet d\vec{s} = \frac{1}{2} \oint_{\triangle s} \mathrm{Re}(\vec{E} \times \vec{\mathrm{H}}^*) \bullet d\vec{s}}$$

Γραμμές Μεταφοράς



- Ας θυμηθούμε λίγο τις γραμμές μεταφοράς
- $\mathcal{R}, \mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{C}$ (Αντ/ση-Αγωγιμότητα,Επαγωγή, Χωρ/τα ανά μονάδα μήκους $\pi.\chi.\mathcal{L} = \dfrac{L}{\Delta x}$)
- Αν δεν έχουμε απώλειες $\mathcal{R} = \mathcal{G} = 0$

$$\frac{dV}{dx} = \mathcal{L}\frac{dI}{dt} \quad \text{και} \quad \frac{d\mathrm{I}}{dx} = \mathcal{C}\frac{dV}{dt}$$ παγ/ντας την πρώτη προς x και τη 2η προς t

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \mathcal{L}\frac{d}{dx}\frac{dI}{dt} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\mathcal{L}}\frac{d^2V}{dx^2} \quad \text{και} \quad \frac{d}{dt}\frac{dI}{dx} = \mathcal{C}\frac{d^2V}{dt^2}$$

$$\frac{1}{L}\frac{d^2V}{dx^2} = \mathcal{C}\frac{d^2V}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = \mathcal{C}\mathcal{L}\frac{d^2V}{dt^2}$$

Η παραπάνω είναι κυματική εξίσωση με ταχύτητα $\upsilon_{ph} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}}$

Η εικόνα είναι από το βιβλίο Η/Μ και εφαρμογές Krauss – Fleisch