



Από τον Ηλεκτρομαγνητισμό στις Τηλεπικοινωνίες

Επιπλέον χαρακτηριστικά

- ▶ Εμπέδηση κεραίας: μία κεραία σαν στοιχείο του κυκλώματος του πομπού έχει εμπέδηση $Z_A = R_A + jX_A$ με $R_A = R_{rad} + R_{loss}$ τις γνωστές μας αντιστάσεις ακτινοβολίας και απωλειών αντίστοιχα. Τι συμβαίνει όμως με την X_A την οποία μέχρι τώρα αγνοούσαμε επιδεικτικά !!!
- ▶ Σε περίπτωση συντονισμού $X_A(\omega) = 0$
- ▶ Όπως είπαμε μια κεραία μπορεί να λειτουργήσει τόσο ως κεραία εκπομπής αλλά και ως κεραία λήψης.
- ▶ Για να έχουμε μέγιστη απορρόφηση θα πρέπει και ως κεραία λήψης να έχουμε και πάλι $X_A = 0$

Ενεργός επιφάνεια κεραίας

➤ Ορίζεται ως η ισοδύναμη επιφάνεια A_{eff} η οποία όταν δέχεται κάθετα προσπίπτουσα πυκνότητα ισχύος P_{inc} παρέχει στην έξοδο της κεραίας την πραγματικά λαμβανόμενη πυκνότητα ισχύος P_r δηλαδή: $P_r = A_{eff} P_{inc}$ Για να τα δούμε λίγο καλύτερα.

➤ Μια κεραία μπορεί να λειτουργήσει σαν πηγή σε ένα φορτίο τερματισμού Z_T από την οποία θα επάγεται τάση V_r και η οποία εσωτερική αντίσταση Z_A

$$Z_T = R_T + jX_T$$

$$Z_A = R_A + jX_A \text{ με } R_A = R_r + R_L \text{ και } P_r = I^2 R_T \text{ ενώ } I = \frac{V_r}{\sqrt{(R_r + R_L + R_T)^2 + (X_A + X_T)^2}} \text{ άρα } P_r = \frac{V_r^2 R_T}{(R_r + R_L + R_T)^2 + (X_A + X_T)^2}$$

➤ Άρα μπορούμε να ορίσουμε τελικά την Ενεργό επιφάνεια ως :

$$A_{eff} \equiv \frac{P_r}{S} \text{ άρα } A_{eff} = \frac{V_r^2 R_T}{S \cdot [(R_r + R_L + R_T)^2 + (X_A + X_T)^2]}$$

➤ Όπου V_r η ενεργός τάση που επάγεται στο R_T .

Ενεργός Επιφάνεια

➤ Όταν σε μία κεραία λήψης προσπίπτει Η/Μ κύμα με ισχύ (διάνυσμα Pointing) P_{inp} στα άκρα της συλλέγεται ισχύς $P_r = A_e P_{inp}$. Η ποσότητα A_e ορίζεται ως **ενεργός επιφάνεια της κεραίας**. Αποδεικνύεται αρχικά ότι το εμβαδόν δέσμης $\lambda^2 = A_e \Omega_A$

➤ Και τελικά η κατευθυντικότητα $D = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2} = \frac{4\pi f^2 A_e}{c^2}$

➤ Για την ισοτροπική κεραία $D = 1$ άρα $A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi}$

➤ Για στοιχειώδες δίπολο $D = \frac{3}{2}$ άρα $\frac{3}{2} = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2} \Leftrightarrow A_e = \frac{3\lambda^2}{8\pi}$

➤ Για τη κεραία $\lambda/2$ $D = \frac{4\pi 15}{R_r / 2} = \frac{8\pi 15}{R_r} = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2} \Leftrightarrow A_e = \frac{30\lambda^2}{73\pi}$

Ενεργό Μήκος Κεραίας

- *Ενεργό μήκος κεραίας*: Το μήκος μιας άλλης ισοδύναμης γραμμικής κεραίας η οποία έχει σταθερή κατανομή ρεύματος I_0 και η οποία παράγει το ίδιο η/μ πεδίο ακτινοβολίας.
- Άρα για κεραία τυχαίας κατανομής ρεύματος $I(z)$
$$L_e = \frac{I}{I_0} \int_{-l/2}^{l/2} I(z) dz$$
- Για κεραία με αντίσταση Ακτινοβολίας R_r προσαρμοσμένη σε φορτίο αποδίδει ισχύ $P = \frac{L_e^2 E^2}{4R_r}$ αφού η τάση που αναπτύσσεται στο φορτίο είναι $V = L_e E$
- Στην γενική περίπτωση κεραίας γραμμικής ή άλλου τύπου με πεδίο ακτινοβολίας $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ το ενεργό μήκος $L_e(\theta, \phi)$ της κεραίας αυτής ορίζεται ως:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -jnkI\vec{L}_e(\theta, \phi) \frac{e^{(-jkr)}}{4\pi r}$$

- Αποδεικνύεται ότι:
$$A_e = \frac{l_e^2 Z_0}{4R_r}$$

Συντονισμός Κεραίας

- Στην πράξη, επιδιώκεται η χρησιμοποίηση κεραιών με καθαρά ωμική αντίσταση εισόδου διότι μόνον τότε καθίσταται εφικτή η προσαρμογή της προς τη γραμμή μεταφοράς ή τον κυματοδηγό τροφοδοσίας που εμφανίζουν ωμική χαρακτηριστική αντίσταση. Άλλωστε, το φανταστικό μέρος της αντίστασης εισόδου αντιπροσωπεύει κατανάλωση αέργου ισχύος στην κοντινή περιοχή της κεραίας.
- Τέλος, μεγάλες τιμές του φανταστικού μέρους απαιτούν πολύ υψηλή τάση τροφοδότησης ώστε να επιτευχθεί η απαιτούμενη τιμή ισχύος ακτινοβολίας
- Η διαδικασία μέσω της οποίας το φανταστικό μέρος της αντίστασης εισόδου μηδενίζεται σε μια ορισμένη συχνότητα ω_0 ονομάζεται συντονισμός της κεραίας. Δηλαδή, κατά το συντονισμό ισχύει:

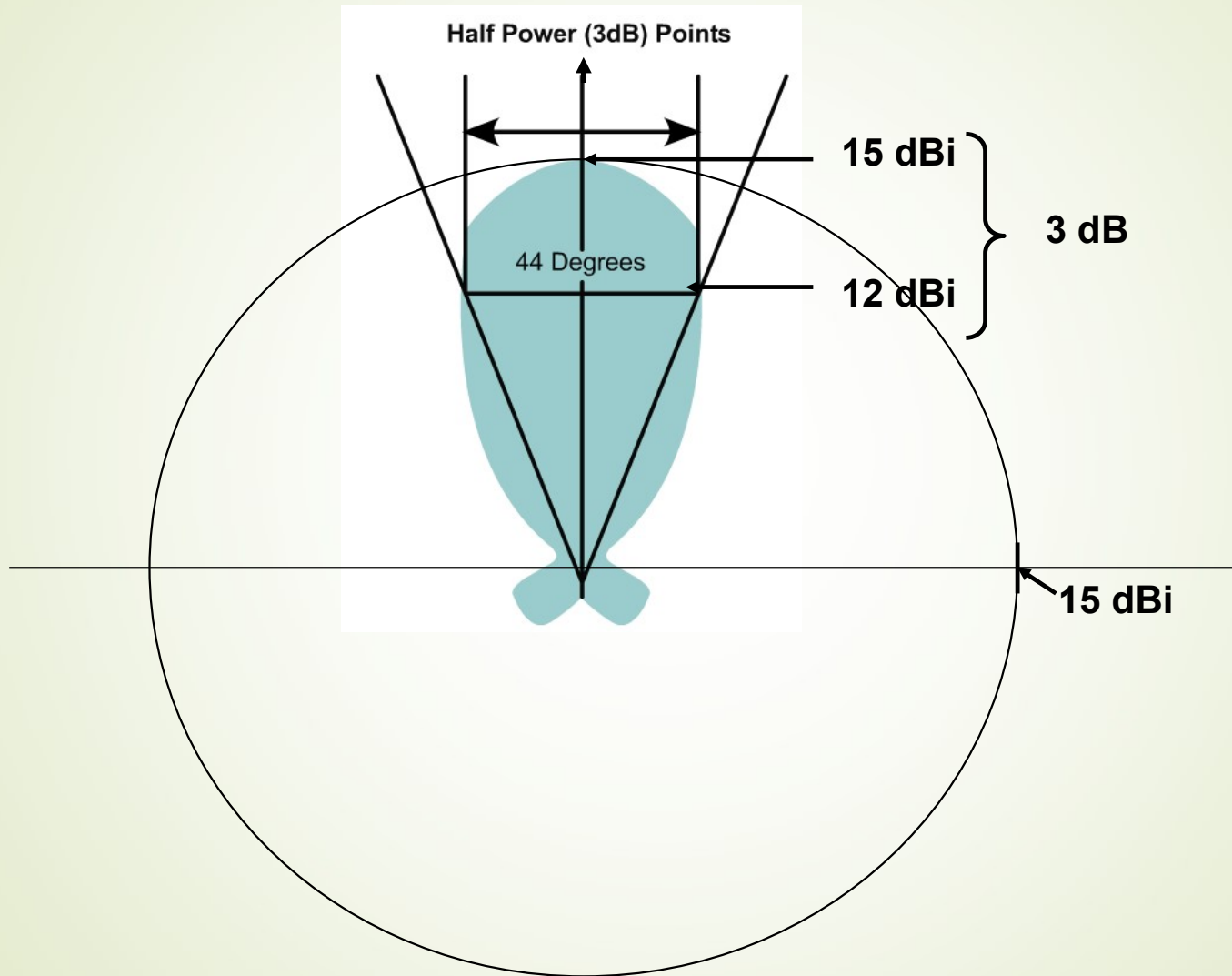
Εύρος ζώνης κεραίας (Antenna Bandwidth)

- Ο συντονισμός μιας κεραίας για την κεντρική συχνότητα ω_0 του εύρους συχνοτήτων που αυτή εκπέμπει ή λαμβάνει επιφέρει και σημαντική μείωση του φανταστικού μέρους για ένα ικανό εύρος συχνοτήτων $\Delta\omega$ περί την ω_0 .
- Για το εύρος συχνοτήτων $\omega_0 - \Delta\omega/2$ έως $\omega_0 + \Delta\omega/2$, για το οποίο το φανταστικό μέρος είναι σχετικά μικρό, η κεραία θεωρείται συντονισμένη. Το εύρος $\Delta\omega$ είναι συνήθως το εύρος ζώνης μιας κεραίας
- Ως εύρος ζώνης μιας κεραίας ορίζεται το εύρος συχνοτήτων μέσα στο οποίο αυτή ικανοποιεί ορισμένες προδιαγραφές σε σχέση με κάποιο μέγεθος.
- Συνήθως, ως εύρος ζώνης θεωρείται ένα εύρος συχνοτήτων συμμετρικό περί μια κεντρική συχνότητα, εντός του οποίου κάποιο βασικό χαρακτηριστικό μιας κεραίας όπως η αντίσταση εισόδου, η κατευθυντικότητα ή η στάθμη των πλευρικών λοβών διατηρεί μια αποδεκτή τιμή σε σχέση με την τιμή που αντιστοιχεί στην κεντρική συχνότητα του εύρους ζώνης

Εύρος δέσμης κεραίας (Antenna Beamwidth)

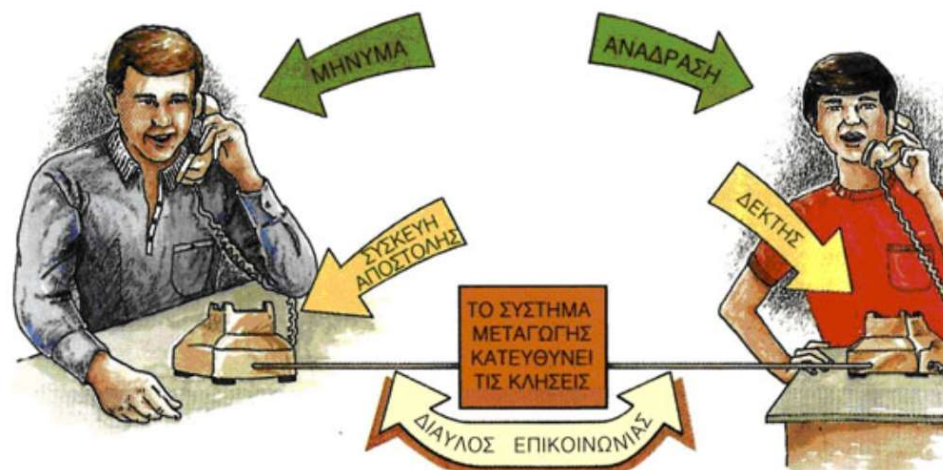
- ▶ Το εύρος δέσμης είναι ένα μέτρο που χρησιμοποιείται για να περιγράψει κατευθυντικές κεραίες.
- ▶ Το εύρος δέσμης μερικές φορές ονομάζεται εύρος δέσμης ημίσειας ισχύος.
- ▶ Το εύρος δέσμης ημίσειας ισχύος είναι το συνολικό πλάτος σε μοίρες του κύριου λοβού ακτινοβολίας, στη γωνία όπου η ακτινοβολούμενη ισχύς έχει πέσει κάτω από εκείνη επί της κεντρικής γραμμής του λοβού, κατά 3 dB (μισή ισχύς).

Εύρος δέσμης κεραίας (Antenna Beamwidth)



Τηλεπικοινωνιακό Σύστημα

- Όλα τα συστήματα που μεταφέρουν πληροφορία μπορούν να περιγραφθούν σαν ένα σύστημα επικοινωνίας.
- Τα συστήματα αυτά αποτελούνται από
 - Μήνυμα
 - Τον Πομπό
 - Τον διάυλο
 - Και τον Δέκτη
- Αν η επικοινωνία γίνεται ενσύρματα τότε τον ρόλο του πομπού/δέκτη μπορούν να παίξουν διάφοροι διαμορφωτές – δρομολογητές ή και οπτικοί μετατροπείς και το δρόμο του διαύλου οι γραμμές μεταφοράς ή οπτικές ίνες
- Στην περίπτωση της Ασύρματης επικοινωνίας το ρόλο του διαύλου παίξουν τα Η/Μ κύματα ενώ μέρος του πομπού και του δέκτη οι κεραίες !!!



Κεραία μέσο εκπομπής και λήψης :

- ▶ Μέχρι τώρα περιγράψαμε :
 - ▶ Τις Εξισώσεις Maxwell.
 - ▶ Βασικές αρχές διάδοσης Η/Μ κυμάτων.
 - ▶ Την λειτουργία του στοιχειώδους δίπολου (Hertz) ως μέσω εκπομπής Η/Μ Ακτινοβολίας
 - ▶ Την λειτουργία του διπόλου $\lambda/2$ ως μια γενίκευση του στοιχειώδους διπόλου
- ▶ Θα δούμε πως μία κεραία δουλεύει ως δέκτης
- ▶ Οπως και διάφορα είδη κεραιών



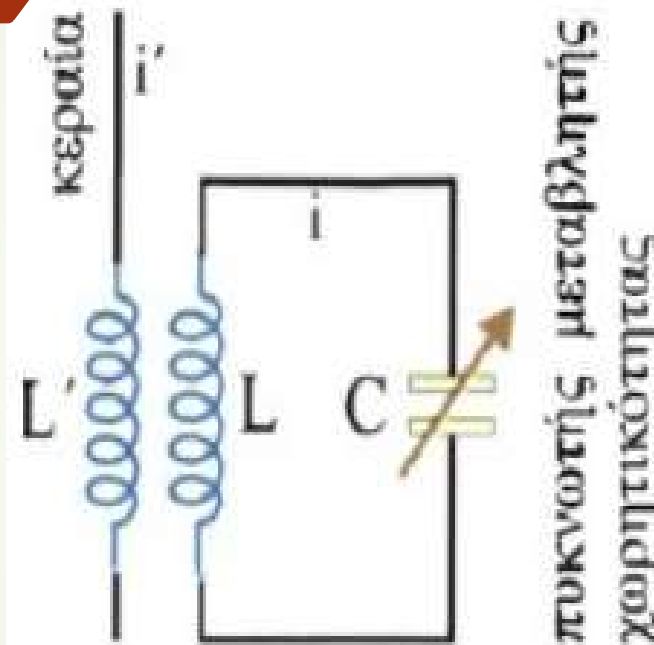
Θεώρημα αμοιβαιότητας

Η ίδια κεραία μπορεί είτε να λαμβάνει είτε να εκπέμπει Η/Μ κύματα (θεώρημα αμοιβαιότητας).

Μία ιδανική κεραία εκπομπής θεωρείται αυτή που μπορεί να ακτινοβολήσει όλη την ισχύ που δέχεται προς κάποια επιθυμητή διεύθυνση και με τη σωστή πόλωση. Αντίστοιχα η ιδανική κεραία λήψης μπορεί να λαμβάνει το μέγιστο δυνατόν ποσοστό του Η/Μ κύματος από τον περιβάλλοντα χώρο με τον ελάχιστο θόρυβο.

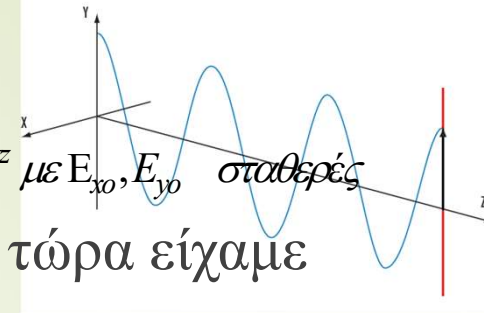
Ένα απλό μοντέλο από τα παλιά

Κάθε ραδιοφωνικός σταθμός εκπέμπει σε ορισμένη συχνότητα. Στην κεραία ενός ραδιοφώνου κάθε στιγμή φτάνουν πολλά ηλεκτρομαγνητικά κύματα, με διαφορετικές συχνότητες. Η επιλογή ενός σταθμού στο ραδιόφωνο στηρίζεται στο φαινόμενο του συντονισμού. Όταν γυρίζουμε το κουμπί επιλογής των σταθμών μεταβάλλουμε τη χωρητικότητα ενός μεταβλητού πυκνωτή. Ο πυκνωτής αυτός είναι μέρος ενός κυκλώματος LC, το οποίο βρίσκεται σε επαγωγική σύζευξη με την κεραία του ραδιοφώνου. Στην κεραία τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που φτάνουν αναγκάζουν τα ηλεκτρόνια της να εκτελέσουν ταλάντωση. Η κίνηση των ηλεκτρονίων στην κεραία δημιουργεί σ' αυτή ένα πολύ ασθενές μεταβαλλόμενο ρεύμα. Εξαιτίας της επαγωγικής σύζευξης το κύκλωμα LC εξαναγκάζεται να εκτελέσει ηλεκτρική ταλάντωση. Το πλάτος της ηλεκτρικής ταλάντωσης (πλάτος του ρεύματος) είναι ασήμαντο εκτός εάν έχουμε συντονισμό. Μεταβάλλοντας όμως τη χωρητικότητα του πυκνωτή στο κύκλωμα LC, μεταβάλλουμε την ιδιοσυχνότητά του. Όταν η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος συμπέσει με κάποια από τις συχνότητες με τις οποίες ταλαντώνονται τα ηλεκτρόνια της κεραίας (δηλαδή με κάποια από τις συχνότητες των κυμάτων τα οποία φτάνουν στην κεραία), το κύκλωμα συντονίζεται και διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα μέγιστου πλάτους. Αυτό το σχετικά μεγάλο ρεύμα, περιέχει το ηλεκτρικό σήμα, το οποίο, ενισχυμένο, οδηγείται στο μεγάφωνο του ραδιοφώνου και το διεγείρει.

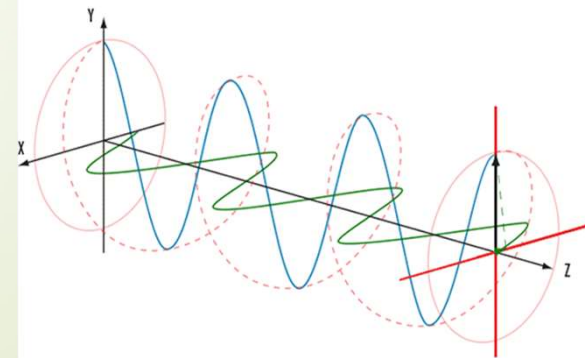
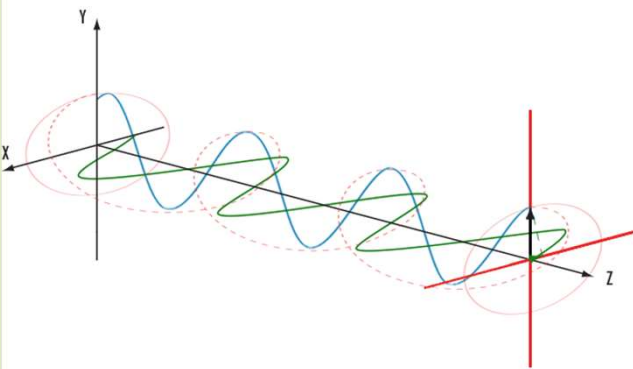


Το κύκλωμα επιλογής σταθμών στο ραδιόφωνο είναι ένα κύκλωμα LC, που εξαναγκάζεται σε ηλεκτρική ταλάντωση από την κεραία.

Πόλωση



- Ένα Η/Μ κύμα είναι γραμμικά πολωμένο όταν εν γένει $\vec{E} = (E_{xo}\hat{x} + E_{yo}\hat{y})e^{-jkz}$ με E_{xo}, E_{yo} σταθερές
- Στην περίπτωση των επίπεδων κυμάτων που έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα είχαμε γραμμικά πολωμένα Η/Μ κύματα.
- Ελλειπτικά πολωμένα Η/Μ κύματα έχουμε όταν $\vec{E} = (E_{xo}\hat{x} + E_{yo}e^{j\phi}\hat{y})e^{-jkz}$ στην περίπτωση αυτή το πλάτος του E_o δημιουργεί μια έλλειψη στο x-y επίπεδο
- Μια κεραία είναι πολωμένη στην διεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας της.
- Για να έχουμε την καλύτερη ζεύξη σε περίπτωση γραμμικά πολωμένων κυμάτων όταν οι δύο κεραίες έχουν ευθυγραμμιστεί. Στην περίπτωση της ελλειπτικής πόλωσης μέγιστη λήψη έχουμε όταν η κεραία –δέκτης έχει την αντίστροφη πόλωση.
- Ο παράγοντας απωλειών πόλωσης είναι: $n_p = |\hat{p}_i \cdot \hat{p}_a|^2$ με p_i, p_a τις πολώσεις του κύματος και της αντένας αντίστοιχα



Οριακές συνθήκες για τις εξισώσεις Maxwell

Οι οριακές συνθήκες για τις Διαφορικές εξισώσεις από τις οποίες προκύπτουν τα \mathbf{E}, \mathbf{H} δίδονται παρακάτω:

Ηλεκτρικό Πεδίο

Μαγνητικό Πεδίο

$$E_{\parallel 1} = E_{\parallel 2}$$

$$B_{\parallel 1} = B_{\parallel 2}$$

$$(\mathbf{D}_{\perp 1} - \mathbf{D}_{\perp 2}) \cdot \hat{n}_{12} = -\sigma_s$$

$$H_{\perp 1} - H_{\perp 2} = 0 \text{ χωρίς ρεύμα}$$

$$(\overline{H_1} - \overline{H_2}) \times \hat{n}_{12} = \vec{J} \text{ με επ/κή πυκ. ρεύματος}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Συνέπειες των συνθηκών αυτών οι γνωστοί μας νόμοι της γεωμετρικής οπτικής όπως τους νόμους ανάκλασης και διάθλασης (Snell)

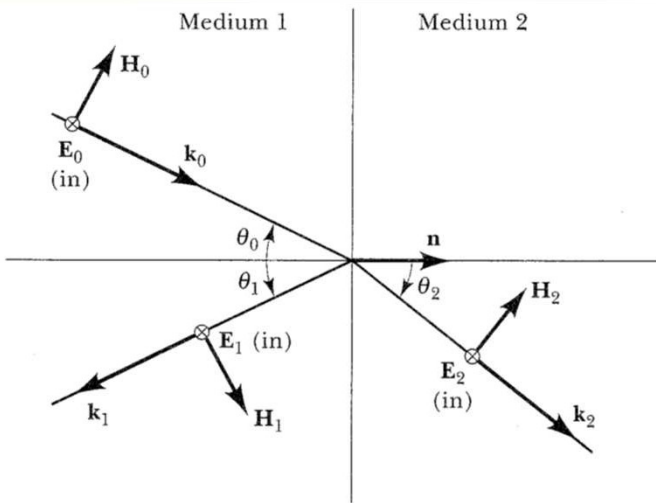


FIGURE 6-3. Electric field perpendicular to plane of incidence.

Για την περίπτωση της ανάκλασής

$\theta_{in} = \theta_{ref}$ Η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με την γωνία ανάκλασης

Για την διάθλαση ισχύει ο νόμος του Snell:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ όπου } n = \frac{c_0}{c} \text{ ο δείκτης διάθλασης του κάθε υλικού.}$$

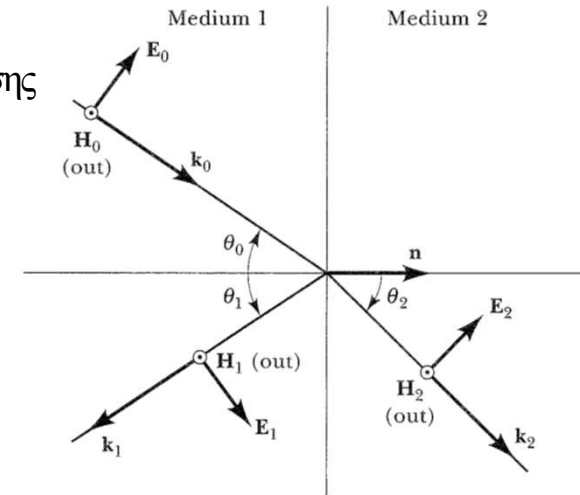


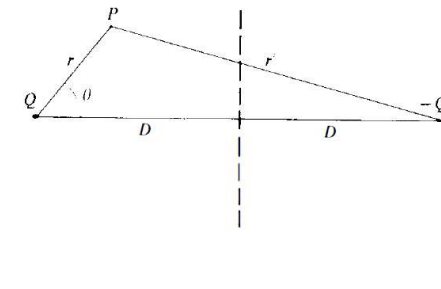
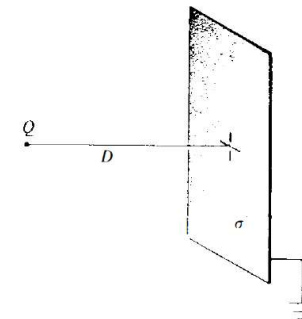
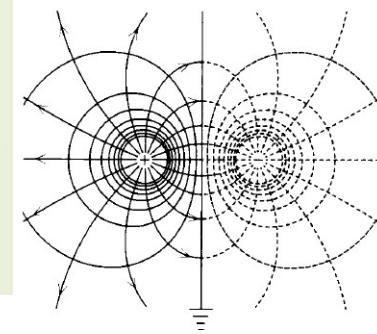
FIGURE 6-4. Electric field parallel to plane of incidence.

Βασικές Αρχές Οπτικής λειτουργούν και που ?

- Ορισμός Συντελεστή Ανάκλασης $R = \frac{|S_{re}|}{|S_{in}|}$ διάθλασης $T = \frac{|S_t|}{|S_{in}|}$, $T + R = 1$
- Συμβολή ?
- Διάθλαση ?
- Περίθλαση ?
- Αρχή Huygens ?
- Αρχή του Fermat ?

Μέθοδος των Ειδώλων

- Μια τεχνική επίλυσης προβλημάτων οριακών τιμών εφαρμόσιμη σε συμμετρικά προβλήματα αλλά και όταν έχουμε μη στατικά φορτία. Με την μέθοδο αυτή το αρχικό πρόβλημα μετατρέπεται σε ισοδύναμο εύκολα επιλύσιμο.
- Στην μέθοδο αυτή αντικαθιστούμε την επίδραση ενός αγωγίμου/διηλεκτρικού σώματος στο πεδίο μια δεδομένης κατανομής φορτίου με την επίδραση μιας κατανομής φανταστικού φορτίου (είδωλο).
- Παράδειγμα 1 Σημειακό φορτίο και αγωγίμο επίπεδο:
- Στην περίπτωση αυτή «φανταζόμαστε ένα φορτίο είδωλο αντίθετο του φορτίου που έχουμε σε απόσταση ίση με την απόσταση του φορτίου μας από το αγωγίμο επίπεδο. Το πρόβλημά μας μετατράπηκε στο πρόβλημα του στατικού δίπολου που έχουν λύσει παλιότερα.

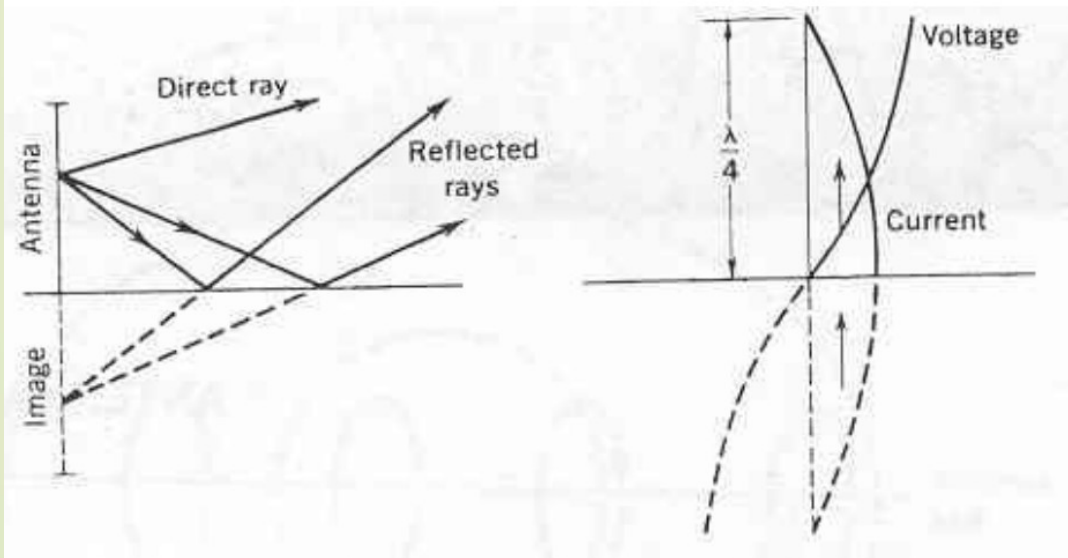


(a)

(b)

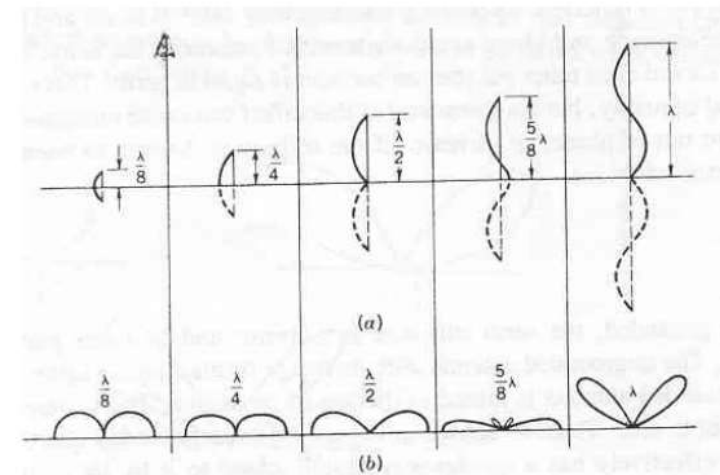
Κατακόρυφη κεραία πάνω από αγώγιμο επίπεδο

- ▶ Γραμμική κεραία τροφοδοτούμενη στην άκρη πάνω από αγώγιμο επίπεδο:
- ▶ Στην περίπτωση αυτή εισάγουμε στην θέση του αγωγού γραμμική κεραία ίσου μήκους με την αρχική και αντίθετης φοράς. Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται ένα δίπολο όπως το ξέρουμε.



Κεραία πάνω από αγώγιμο επίπεδο

- Όπως είπαμε και παραπάνω αν ένα δίπολο $L/2$ τοποθετηθεί πάνω από αγώγιμο επίπεδο τότε τα αποτελέσματα που θα έχουμε θα ήταν τα ίδια με δίπολο μήκους L , για τον χώρο **πάνω** από το επίπεδο αυτό.
- Παράδειγμα: Κεραία μήκους 25 cm τροφοδοτείται με σήμα $I(t)=\sin(6\pi 10^8 t)$ και βρίσκεται πάνω από αγώγιμο επίπεδο να υπολογιστεί η συνολική εκπεμπόμενη ακτινοβολία και η αντίσταση ακτινοβολίας.



Σχήμα 9-14 Χαρακτηριστικά κατακόρυφα γειωμένων κεραιών (α) Κατανομές ρευμάτων κατά μήκος διατάξεων κεραιών διαφορετικού ύψους (β) διαγράμματα ακτινοβολίας

ΕΙΔΗ ΚΕΡΑΙΩΝ

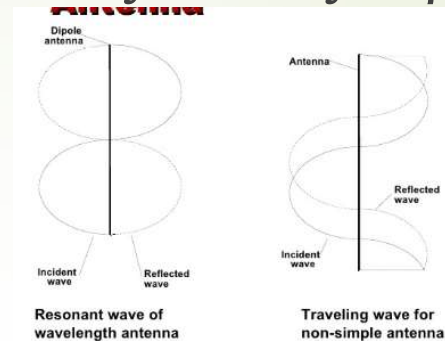
Πάρα πολλά! Θα μελετηθούν κάποιες από τις παρακάτω:

1. Κεραίες σύρματος:

1.α. Δίπολα

1.β. Βρόχοι

1.γ. Οδεύοντος κύματος



2. Στοιχειοκεραίες:

2.α. Ευθύγραμμες

2.β. Επίπεδες

2.γ. Κυκλικές



3. Κεραίες επιφανείας:

3.α. Κεραίες ανακλαστήρα

3.β. Κεραίες ανοίγματος



Τύποι κεραιών

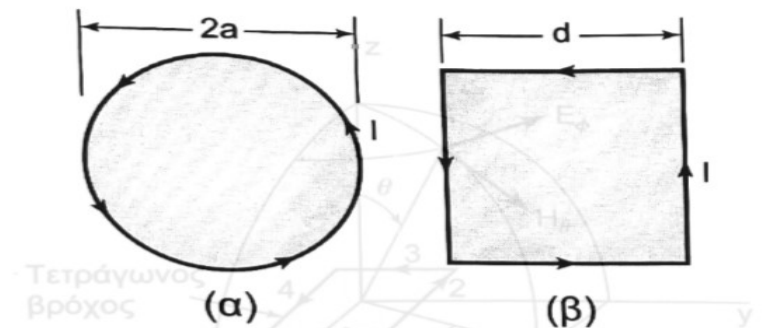
Υπάρχουν πολλοί τύποι κεραιών και καθένας από αυτούς έχει σχεδιαστεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εκπέμπει ή να λαμβάνει ένα συγκεκριμένο είδος ακτινοβολίας. Η διάταξη μίας κεραίας εξαρτάται από διάφορους παραμέτρους αλλά κυρίως από τον τύπο των Η/Μ κυμάτων και το μήκος κύματος. Υπάρχουν πολλοί τρόποι κατηγοριοποίησης των κεραιών π.χ. με βάση τη συχνότητα εκπομπής, το σχήμα, τη δομή και την κατευθυντικότητα.

Βροχοκεραία

- ▶ Για τη περίπτωση της Βροχοκεραίας μιλάμε για κεραία κλειστού βρόγχου
- ▶ Σε αντιστοιχία με τις γραμμικές κεραίες έχουμε τις «μικρές» βροχοκεραίες $< 0.1\lambda$ και τις μεγάλες $\sim \lambda$
- ▶ Μπορεί να είναι ένα κυκλικό αγωγό ή ένα τετράγωνο πλαίσιο.
- ▶ Θα ξεκινήσουμε με τη περίπτωση μικρής βροχοκεραίας τετράγωνου πλαισίου πλευράς d θα δούμε ότι όμοια αποτελέσματα

θα έχουμε και με κεραία ακτίνας a

$$\tau.ω. \pi a^2 = d^2$$



Σχήμα 7-1

Κυκλικός βρόχος (α) και τετράγωνος βρόχος (β) με ίσο εμβαδό.

Μικρή τετράγωνη βροχοκεραία

- Ας θεωρήσουμε τα 2 (2-4) δίπολα του κάτω σχήματος
Αφού έχουν ίδια φάση ($d \ll \lambda$) και αντίθετο ρεύμα
το συνολικό τους πεδίο είναι

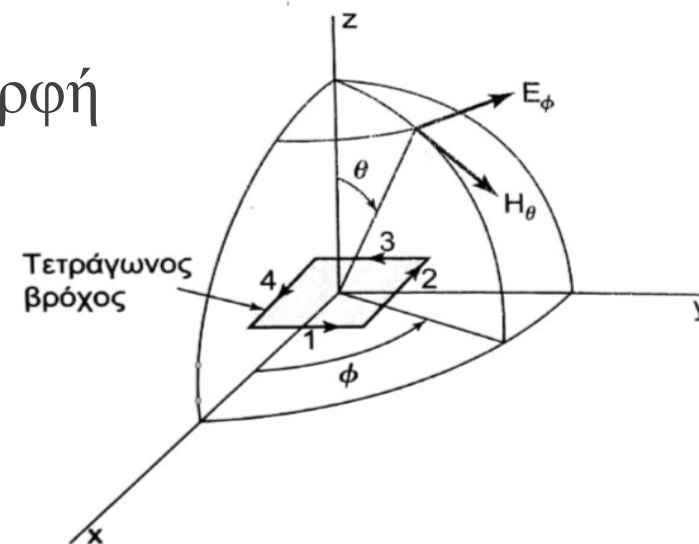
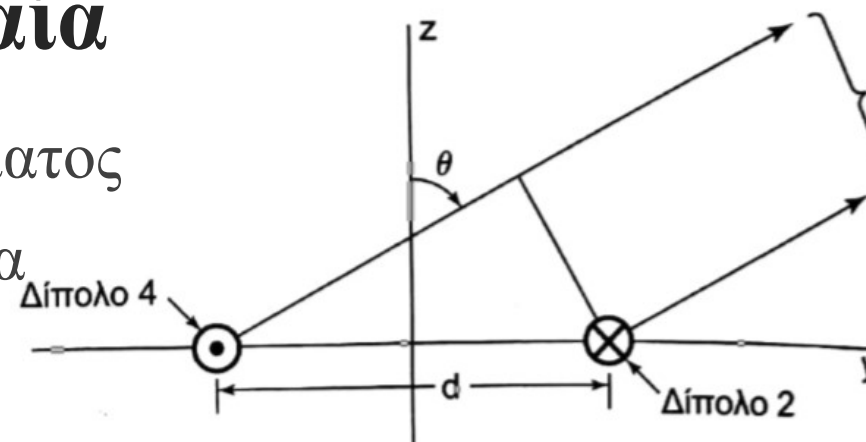
$$E_{\phi} = -E_{\phi 0} e^{j\psi/2} + E_{\phi 0} e^{-j\psi/2}$$

με $\psi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$ γράφοντας το παραπάνω με τριγ/κή μορφή

$$\text{με } d_r = \frac{2\pi d}{\lambda} \rightarrow 0$$

τελικά $E_{\phi} = -jE_{\phi 0} d_r \sin \theta$ ενθυμούμενοι το Σ.Δ

$$E_{\phi} = \frac{60\pi[I]d \cdot d_r}{r\lambda} \sin \theta = \frac{120\pi^2[I] \sin \theta}{r} \frac{A}{\lambda^2}$$



Σχήμα 7-2

Τετράγωνος βρόχος με σύστημα συντεταγμένων. Τα παραπάνω σχήματα είναι από το βιβλίο Κεραίες J. Kraus

Μικρή τετράγωνη βροχοκεραία

➤ Το μαγνητικό πεδίο είναι $H_{\theta} = \frac{E_{\phi}}{\eta_0} = \frac{\pi^2 [I] \sin \theta}{r} \frac{A}{\lambda^2}$

➤ Συνοψίζοντας και συγκρίνοντας με το στοιχειώδες δίπολο

$$\text{με } d_r = \frac{2\pi d}{\lambda} \rightarrow 0$$

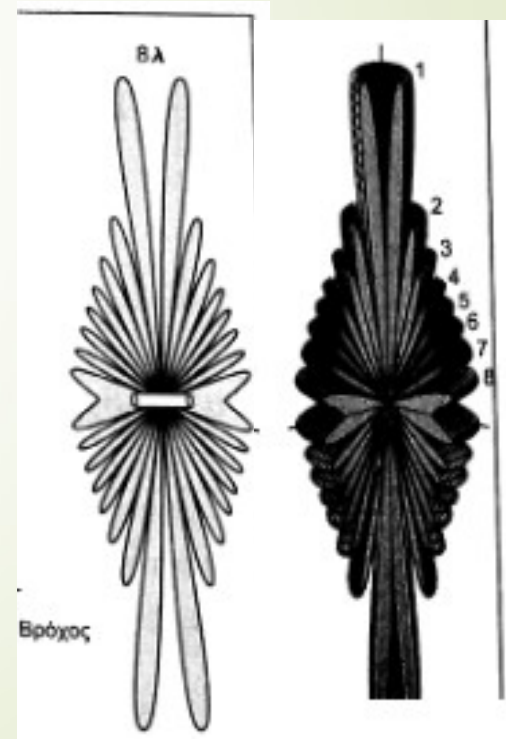
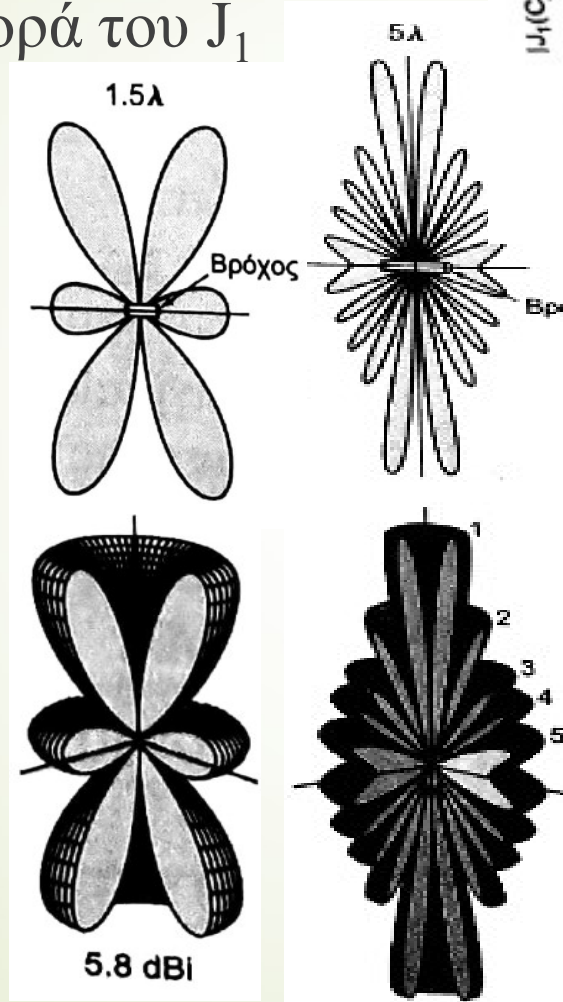
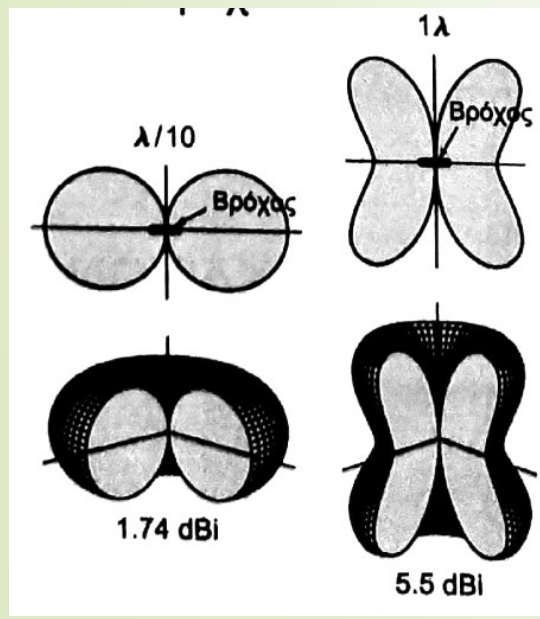
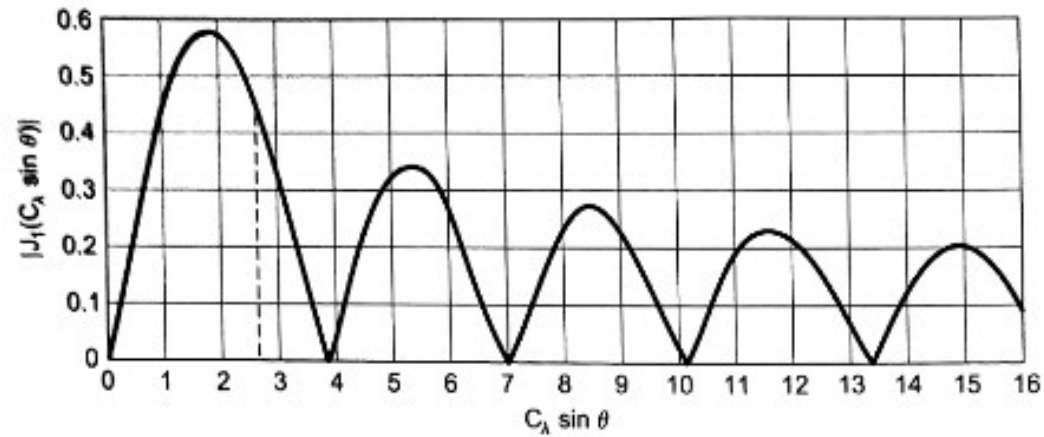
Πεδίο	Ηλεκτρικό δίπολο	Βρόχος
Ηλεκτρικό	$E_{\theta} = \frac{j60\pi [I] \sin \theta}{r} \frac{L}{\lambda}$	$E_{\phi} = \frac{120\pi^2 [I] \sin \theta}{r} \frac{A}{\lambda^2}$
Μαγνητικό	$H_{\phi} = \frac{j [I] \sin \theta}{2r} \frac{L}{\lambda}$	$H_{\theta} = \frac{\pi [I] \sin \theta}{r} \frac{A}{\lambda^2}$

Βροχοκεραία

➤ Έστω $C_\lambda = \frac{2\pi a}{\lambda} = ka$ στο παρακάτω σχήμα

εμφανίζεται η συμπεριφορά του J_1

➤ Ενώ παρακάτω τα διαγράμματα ακτινοβολίας $2a = 0.1\lambda, \lambda, 1.5\lambda, 5\lambda, 8\lambda$



Άσκηση

- Αν για μικρά x $J_1(x) = \frac{x}{2}$ Να αποδειχθεί ότι οι τύποι για τη μικρή βροχοκεραία και για τις γενικής περίπτωσης με σταθερό ρεύμα συμπίπτουν.

Χαρακτηριστικές Ποσότητες Βροχοκεραίας

➤ Ισχύει $S_r = \frac{1}{2} |H|^2 \operatorname{Re} Z$ με Z την ειδική εμπέδηση του μέσου. Για το κενό έχουμε $Z = \eta_0$

$$S_r = \frac{1}{2} \frac{(k\alpha I_0)^2 \eta_0}{4r} J_1^2(k\alpha \sin\theta) = \frac{(k\alpha I_0)^2 \eta_0}{8r} J_1^2(k\alpha \sin\theta) = \frac{15\pi (k\alpha I_0)^2}{r} J_1^2(k\alpha \sin\theta)$$

➤ Τελικά $P = \iint S_r ds = 15\pi (k\alpha I_0)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi J_1^2(k\alpha \sin\theta) \sin\theta d\theta d\phi = 30\pi^2 (k\alpha I_0)^2 \int_0^\pi J_1^2(k\alpha \sin\theta) \sin\theta d\theta$

➤ Για μικρό βρόγχο

$$P = 10k^4 \pi^2 \alpha^4 I_0^2 = 10k^4 A^2 I_0^2 \text{ και αντίσταση ακτινοβολίας } R_r = \frac{2P}{I_0} = 31171 \left(\frac{A}{\lambda^2} \right)^2 = \frac{\pi \eta_0}{6} k^2 \alpha^2$$

➤ Αποδεικνύεται ότι για μικρό βρόγχο $D = 3/2$

➤ Για μεγαλύτερους : ισχύει $\int_0^\pi J_1^2(x \sin\theta) \sin\theta d\theta = \frac{1}{x} \int_0^{2x} J_2^2(y) dy$

$$P = 30\pi^2 k\alpha I_0^2 \int_0^{2k\alpha} J_2^2(y) dy \text{ αν θέσουμε } k\alpha = C_\lambda \text{ και } R_r = 60\pi^2 k\alpha \int_0^{2k\alpha} J_2^2(y) dy = 60\pi^2 C_\lambda \int_0^{2C_\lambda} J_2^2(y) dy$$

$$\text{Για τιμές } C_\lambda \geq 5 \int_0^{2C_\lambda} J_2^2(y) dy \approx 1 \text{ άρα } P = 30\pi^2 C_\lambda I_0^2 \text{ και } R_r = 60\pi^2 C_\lambda \text{ και } D = 2C_\lambda J_1^2(C_\lambda \sin\theta)$$