Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών &
Μηχανικών Υπολογιστών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Διαλέξεις
Ηλεκτρικές Μετρήσεις

Άννα Τασολάμπρου

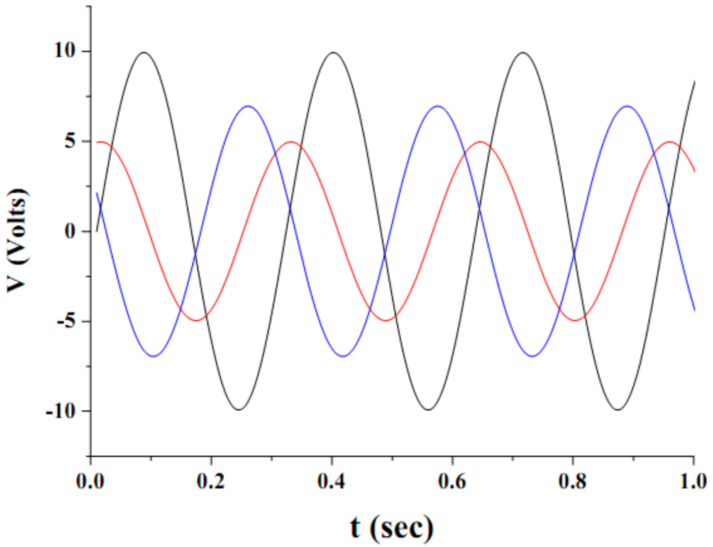
Κεφάλαιο 9 : Εναλλασσόμενο και μιγαδικοί

Σε κυκλώματα DC, οι ηλεκτρικές μεγέθη εξαρτώνται αποκλειστικά από τις ωμικές αντιστάσεις, φυσικά μετά την ολοκλήρωση πιθανών μεταβατικών φαινομένων λόγω παρουσίας πηνίων και πυκνωτών, και δεν υφίστανται διαφορές φάσης μεταξύ ρεύματος και τάσης. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα **τον χειρισμό των DC ηλεκτρικών ποσοτήτων ως μονόμετρων ποσοτήτων**, οπότε για τις σχετικές πράξεις είναι αρκετή η απλή αριθμητική. Σε αντίθεση, στα κυκλώματα AC, ο ρόλος των πηνίων και των πυκνωτών είναι πιο ουσιαστικός καθώς και τα ηλεκτρικά μεγέθη επηρεάζουν και προκαλούν **διαφορές φάσεις μεταξύ ρευμάτων και τάσεων**. Επομένως, ο χειρισμός των ηλεκτρικών μεγεθών σε κυκλώματα AC είναι πιο περίπλοκη και υπάρχουν τρεις δυνατότητες για την περιγραφή τους. Η πρώτη είναι η **ημιτονοειδής, η δεύτερη αφορά περιστρεφόμενα διανύσματα, ενώ η τρίτη βασίζεται στους μιγαδικούς αριθμούς**

Κεφάλαιο 9 : Εναλλασσόμενο και μιγαδικοί

Ημιτονοειδής αναπαράσταση

(α) η **τιμή** του ρεύματος (τάσης) μεταβάλλεται με το χρόνο παίρνοντας θετικές και αρνητικές τιμές,
(β) η περιοδική εξέλιξη με περίοδο **T**
(γ) *το ολοκλήρωμα των βασικών μεγεθών σε μία περίοδο είναι μηδέν*.



Σχήμα 9.1 Τριγωνομετρική αναπαράσταση εναλλασσόμενων μεγεθών

$$I=I_0 \eta\mu(\omega t+\varphi)$$

I_0 είναι το μέγιστο πλάτος του ρεύματος

I είναι η στιγμιαία τιμή του ρεύματος σε χρόνο t

ω είναι η κυκλική συχνότητα ($\omega=2\pi/T$, με $T=1/f$ όπου f είναι η συχνότητα)

φ είναι η αρχική φάση

$\omega t+\varphi$ είναι η φάση κατά την χρονική στιγμή t

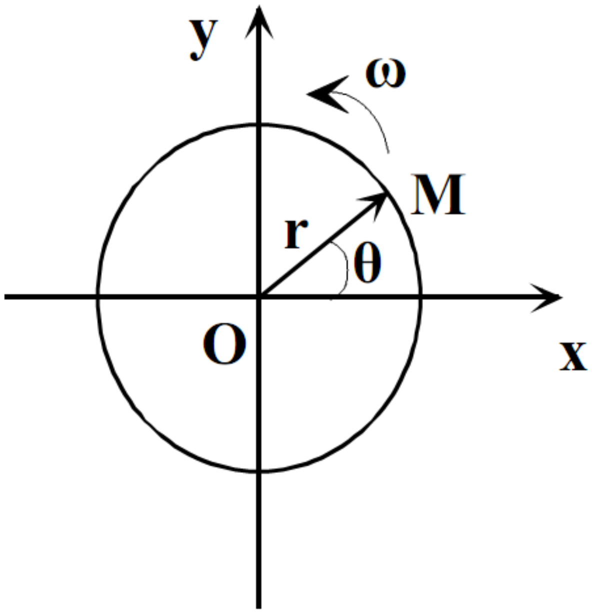
Κεφάλαιο 9 : Εναλλασσόμενο και μιγαδικοί

Αναπαράσταση με περιστρεφόμενα διανύσματα

Ένας ευκολότερος τρόπος να διαχειριστούμε εναλλασσόμενα μεγέθη είναι τα περιστρεφόμενα διανύσματα. Έστω οριζόντιο σύστημα αξόνων και ένα διάνυσμα ΟΜ με μήκος r το οποίο περιστρέφεται αριστερόστροφα με γωνιακή ταχύτητα ω. Σε κάποια χρονική στιγμή t, το διάνυσμα σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x. Τότε, οι x, y προβολές του διανύσματος θα δίνονται:

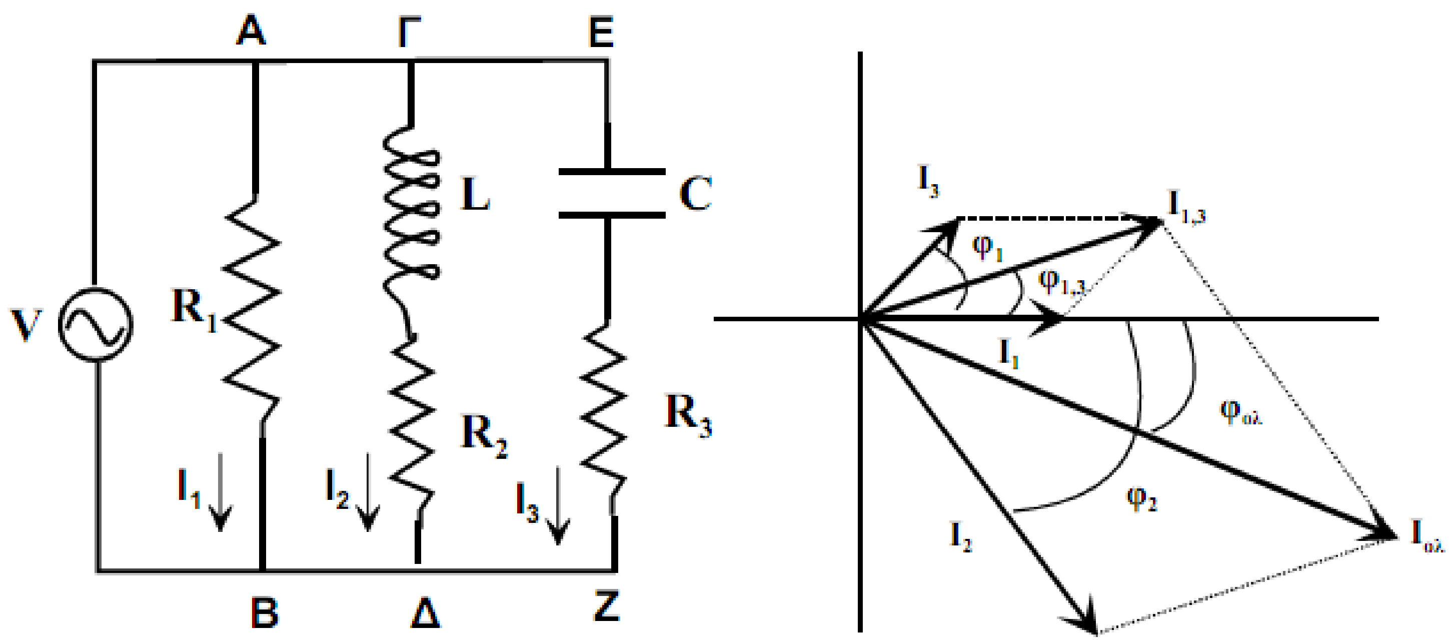
$$x = r\,\text{συν}\theta \quad \text{και} \quad y = r\,\text{ημ}\theta.$$

$$\theta = \omega t.$$



Σχήμα 9.2 Περιστρεφόμενο διάνυσμα

Κεφάλαιο 9 : Εναλλασσόμενο και μιγαδικοί



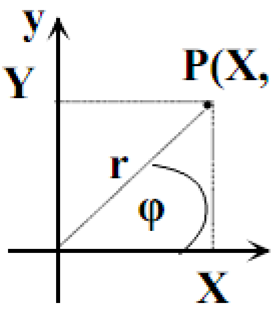
Σχήμα 9.4. Κύκλωμα με συνδυασμό σε σειρά και παράλληλης σύνδεσης

Κεφάλαιο 9 : Εναλλασσόμενο και μιγαδικοί

Αναπαράσταση με μιγαδικούς αριθμούς

Είναι γνωστό ότι οι πραγματικοί αριθμοί X θεωρούνται σημεία σε μία ευθεία, έστω οριζόντια. Αν προσθέσουμε και μία κατακόρυφη ευθεία και σε κάθε σημείο της αντιστοιχήσουμε ένα φανταστικό αριθμό

$$jY$$



Σχήμα 9.5 Αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού

Μιγαδικός Αριθμός $$Z=X+jY$$

Μέτρο $$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Φάση $$\varepsilon\varphi\varphi = Y/X$$

Ημιτονοειδής μορφή

$$r\sigma\upsilon\nu\varphi + jr\eta\mu\varphi$$

Πολική μορφή

$$re^{j\varphi}$$

Κεφάλαιο 9 : Εναλλασσόμενο και μιγαδικοί

Α) Για πρόσθεση ή αφαίρεση μιγαδικών αριθμών χρησιμοποιούμε την καρτεσιανή μορφή. Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

$$Z_1 \pm Z_2 = (X_1 \pm X_2) + j(Y_1 \pm Y_2)$$

Β) Για πολλαπλασιασμό και διαίρεση χρησιμοποιούμε την πολική μορφή. Ισχύει:

$$Z_1 Z_2 = (r_1 r_2) e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Γ) Στο παραπάνω πλαίσιο είναι χρήσιμο να θυμάται κάποιος ποιος μετατρέπεται η μία μορφή στην άλλη:

Καρτεσιανή →Πολική		**Πολική → Καρτεσιανή**	
Z=X+jY	$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$ εφφ=Y/X	$re^{j\varphi}$	Z= (rσυνφ)+j(rημφ)

Κεφάλαιο 9 : Εναλλασσόμενο και μιγαδικοί

(α) Οι ωμικές αντιστάσεις αντιστοιχούν σε πραγματικούς αριθμούς

(β) Οι επαγωγικές και οι χωρητικές αντιστάσεις αντιστοιχούν σε φανταστικούς αριθμούς. Μάλιστα, η επαγωγική αντίσταση θεωρείται θετική, ενώ η χωρητική αρνητική.

(γ) Ο μιγαδικός αριθμός αντιστοιχεί στην σύνθετη αντίσταση ή εμπέδηση. Δηλαδή ισχύει: $Z=R+j(X_L-X_C)$

(δ) Με αυτή την προσέγγιση, και η ισχύς θα είναι μιγαδική και θα ισχύει: $S=P+jQ$, όπου S είναι η φαινόμενη ισχύς, P η ενεργός και Q η άεργος.

(ε) Για να πάμε από την τριγωνομετρική στην πολική μορφή κάνουμε αντικατάσταση

$$I=I_0\eta\mu(\omega t+\varphi)\rightarrow I=I_0e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Μία επιπλέον μορφή που χρησιμοποιείται ιδιαίτερα στην ηλεκτρολογία είναι ο φάσορας που βασίζεται στην πολική μορφή και δίνεται από $r\angle\varphi$, όπου φ είναι η φάση, όμως σαν r πρέπει να χρησιμοποιήσουμε όχι το μέτρο αλλά την ενεργό τιμή του ηλεκτρικού μεγέθους.

Μερικά παραδείγματα

Κεφάλαιο 9 : Εναλλασσόμενο και μιγαδικοί

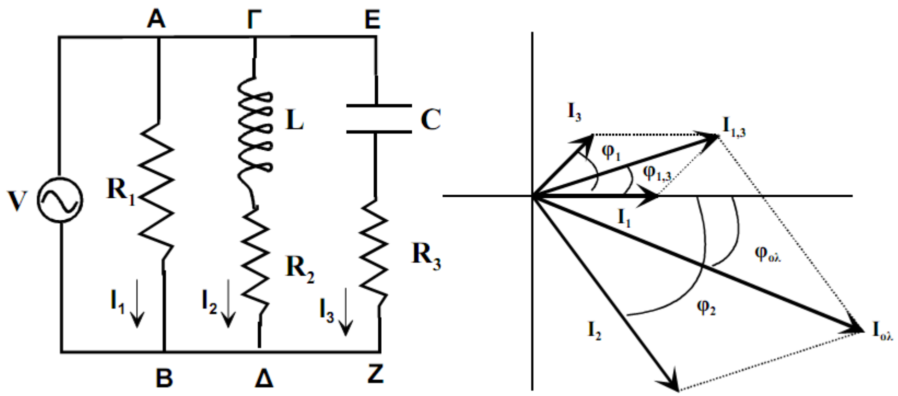
i) Έστω R=10 Ω, X_L=20 Ω και X_C=10 Ω. Να βρεθεί η εμπέδηση:

$$Z=R+j(X_L-X_C)$$

ii) Αν στην προηγούμενη σύνθετη αντίσταση εφαρμόσω τάση $220\angle 0$, πόσο θα είναι το ρεύμα και η ισχύς;

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Κεφάλαιο 9 : Εναλλασσόμενο και μιγαδικοί



Σχήμα 9.4. Κύκλωμα με συνδυασμό σε σειρά και παράλληλης σύνδεσης

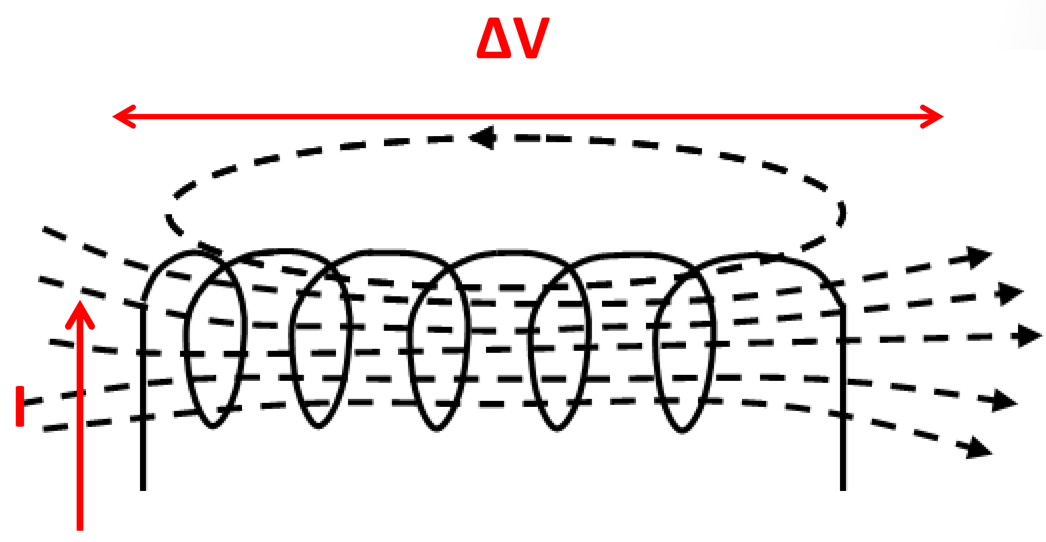
R_1=10Ω, R_2=3Ω, R_3=10Ω, L=10mH, C=250μF και V=70ημ(400t).

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

Ορισμός αυτεπαγωγής

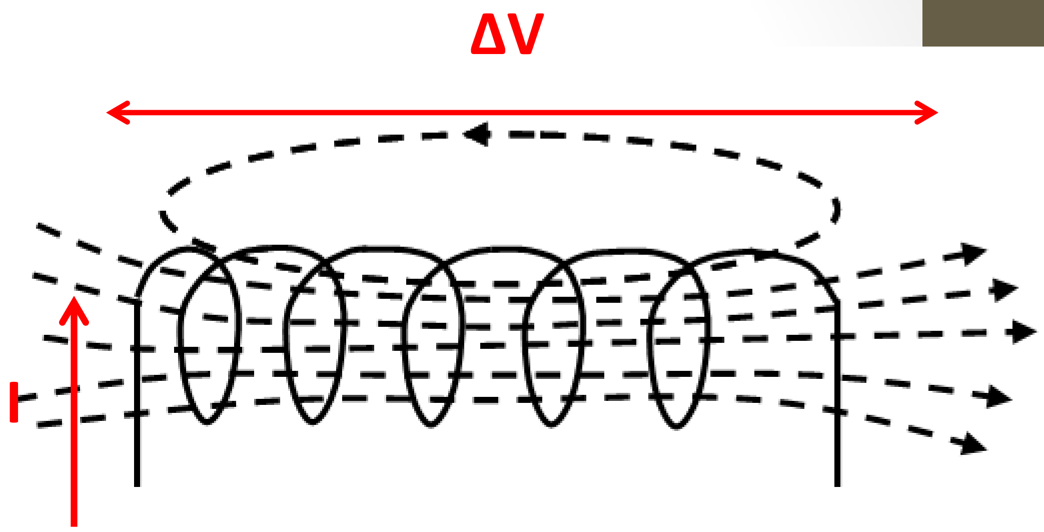
Σύμφωνα με το νόμο Faraday, αν σε ένα ακίνητο κύκλωμα (π.χ. ένα πηνίο) μεταβάλλεται η μαγνητική ροή με το χρόνο, τότε επάγεται σε αυτό ΗΕΔ. Αν η μεταβολή της ροής οφείλεται σε μεταβολή του ρεύματος του ίδιου του κυκλώματος, τότε παρουσιάζεται το εξής φαινόμενο: η μεταβολή του ρεύματος σε ένα πηνίο προκαλεί επαγόμενη ΗΕΔ σε αυτό. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται αυτεπαγωγή.

σε ένα κύκλωμα μπορούμε να έχουμε επαγόμενη ΗΕΔ λόγω μεταβολής του ρεύματος που το διαρρέει.



Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

*Πηνίο με **N** σπείρες που διαρρέεται από ρεύμα **I**, οπότε σαν αποτέλεσμα έχουμε κάθε σπείρα να διαπερνάται από μαγνητική ροή **ΦB***



Ορισμός αυτεπαγωγής

$$L = N\Phi_B / I$$

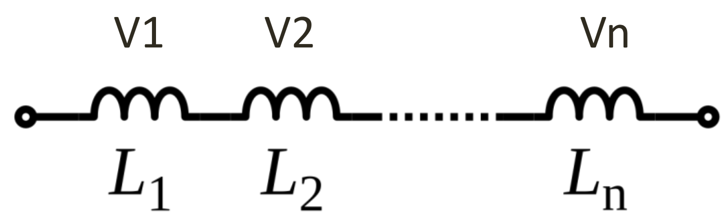
$$N\frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{di}{dt} \Rightarrow E = -L\frac{di}{dt}$$

$$V = L(di/dt)$$

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής έχει μονάδες Henry και ένα τμήμα του κυκλώματος με αυτεπαγωγή ονομάζεται πηνίο

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

σύνδεση σε σειρά Ν πηνίων



$V=L(di/dt)$

Vtotal = V1+V2+…+Vn

Vtotal =L1di/dt+L2di/dt+…+Ln/di/dt

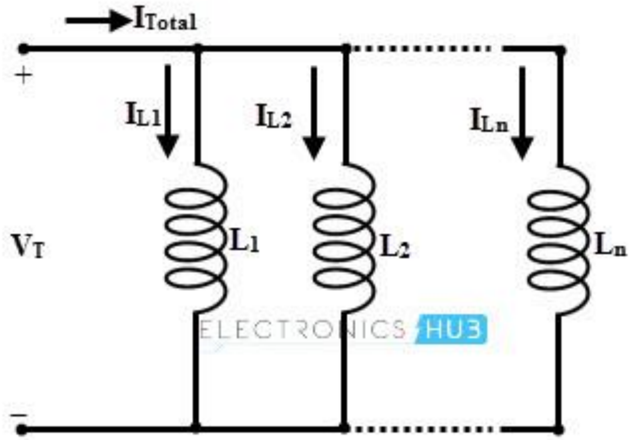
ΙΔΙΟ ΡΕΥΜΑ!!!

$$L_{\iota\sigma o\delta} = L_1 + L_2 + \ldots\ldots + L_N$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

$$V=L(di/dt)$$

σύνδεση παράλληλα N πηνίων



ΙΔΙΑ ΤΑΣΗ!!!

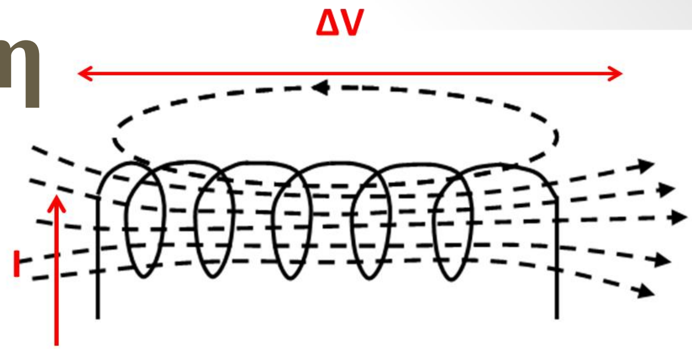
Itotal = IL1 + IL2 + …+ Iln

dItotal/dt = dIL1/dt + dIL2/dt +…+ dIln/dt

V/Lισοδ = V/L1 + V/L2 + …. + V/Ln

$$\frac{1}{L_{\iota\sigma o\delta}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots. + \frac{1}{L_N}$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής



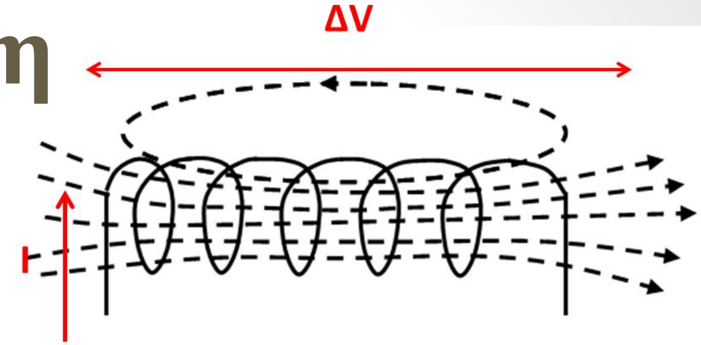
Κύκλωμα R-L στο συνεχές (DC).

Η παρουσία αυτεπαγωγής σε ένα κύκλωμα συνεχούς ρεύματος έχει σαν αποτέλεσμα την εξάρτηση των ηλεκτρικών μεγεθών από το χρόνο. Σαν παράδειγμα, σε κύκλωμα με αυτεπαγωγή L, ωμική αντίσταση R και πηγή E, το ρεύμα δεν παίρνει αμέσως την μέγιστη του τιμή αλλά να αυξάνεται ακολουθώντας μία εξίσωση της μορφής:

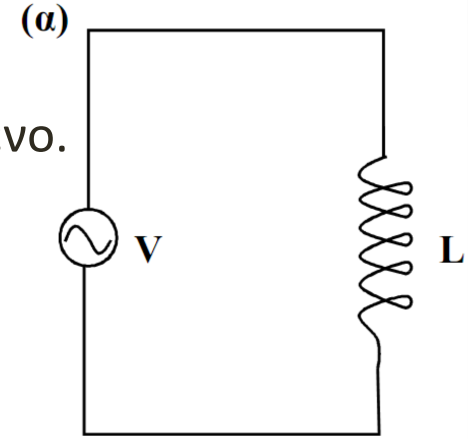
$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)$$

Δηλαδή, η αυτεπαγωγή σε κύκλωμα συνεχούς έχει σαν αποτέλεσμα το ρεύμα να πλησιάζει ασυμπτωτικά την τελική του τιμή. Όσο μεγαλύτερη είναι η αυτεπαγωγή, τόσο καθυστερεί το ρεύμα να πάρει την τελική του τιμή, με την διαδικασία να εξαρτάται από το λόγο L/R. ¨Όμως η τελική τιμή του ρεύματος δεν εξαρτάται από την αυτεπαγωγή αλλά μόνο από την ωμική αντίσταση.

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής



Κύκλωμα R-L στο εναλλασσόμενο (AC).



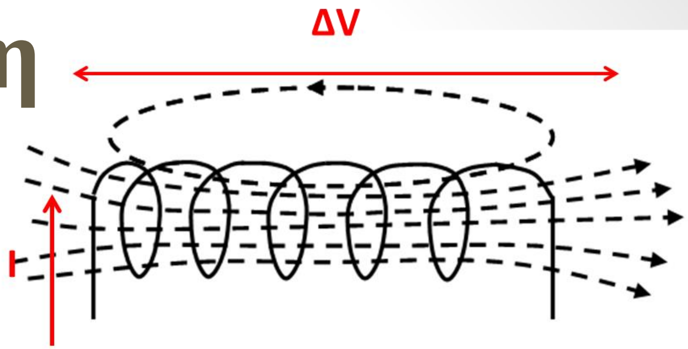
Θα εξετάσουμε στη συνέχεια την συμπεριφορά ενός κυκλώματος που περιέχει αυτεπαγωγή στο εναλλασσόμενο. Αρχικά, ας δούμε την περίπτωση κυκλώματος που περιλαμβάνει μόνο ένα ιδανικό πηνίο L και μία πηγή τροφοδοσίας **$V=V0e^{j\omega t}$** . Εφαρμόζοντας τον νόμο τάσεων Kirchhoff στο κύκλωμα

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{di}{dt} = 0$$

Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I = Ae^{j\omega t}$

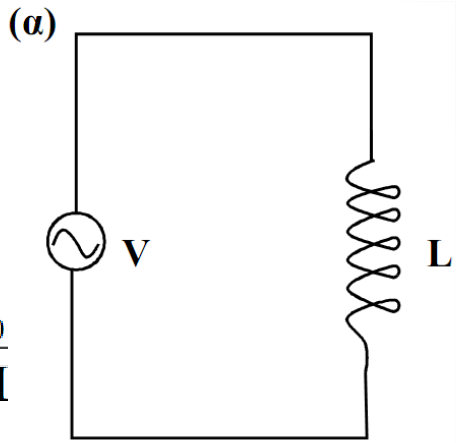
$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{d}{dt}\left(Ae^{j\omega t}\right) = 0 \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - j\omega L A e^{j\omega t} = 0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{j\omega L}$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής



Κύκλωμα R-L στο εναλλασσόμενο (AC).

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{di}{dt} = 0$$



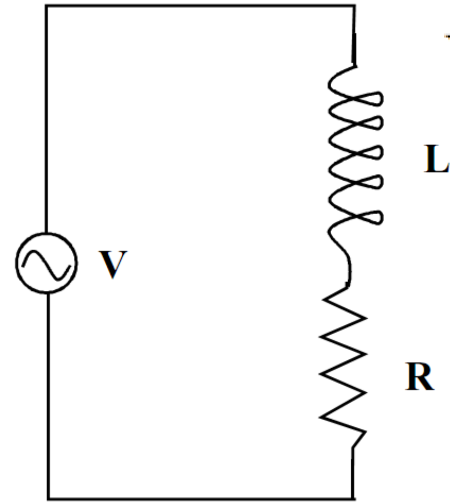
Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I = Ae^{j\omega t}$

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{d}{dt}\left(Ae^{j\omega t}\right) = 0 \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - j\omega L A e^{j\omega t} = 0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{j\omega I}$$

$$I = Ae^{j\omega t} \Rightarrow I = \frac{V_0}{j\omega L}e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\omega L}e^{j\omega t - \pi/2}$$

Το ρεύμα καθυστερεί κατά π/2 σε σχέση με την τάση. Επίσης η ποσότητα ωL παρουσιάζει ρόλο αντίστοιχο με την ωμική αντίσταση (ισούται με το λόγο τάση/ρεύμα) και ονομάζεται επαγωγική αντίσταση που στη μιγαδική μορφή δίνεται από **xL=jωL.** Όμως η συμπεριφορά αυτή εμφανίζεται μόνο στο εναλλασσόμενο καθώς στο συνεχές (**ω=0**) η τιμή της επαγωγικής αντίστασης είναι μηδέν.

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής



$V=L(di/dt)$

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{di}{dt} = iR$$

Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I=Ae^{j\omega t}$

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{d}{dt}\left(Ae^{j\omega t}\right) = iR \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - j\omega L A e^{j\omega t} = RAe^{j\omega t} \Rightarrow A = \frac{V_0}{R + j\omega L}$$

$$I = \frac{V_0}{R + j\omega L} e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j\omega t - \varphi}$$

Η αντίσταση του κυκλώματος ονομάζεται εμπέδηση, είναι συνδυασμός της ωμικής και της επαγωγικής αντίστασης $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$

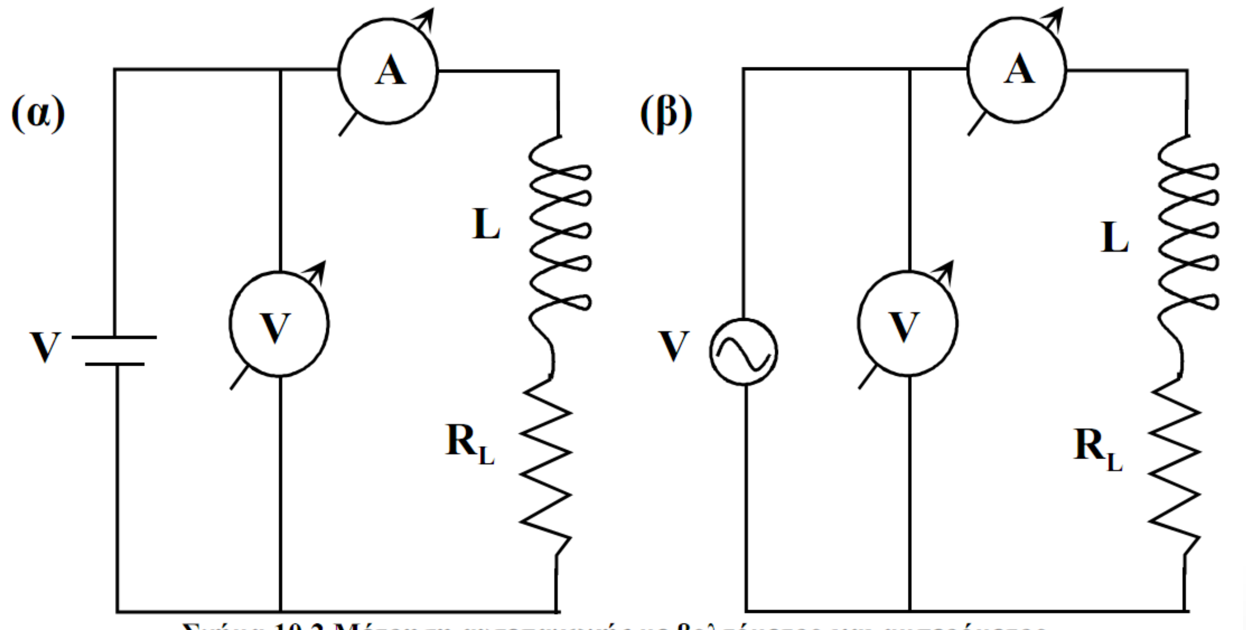
(η μιγαδική μορφή είναι $z_L=R+j\omega L$).

το ρεύμα καθυστερεί σε σχέση με την τάση κατά γωνία φ $\varepsilon\varphi\varphi=\omega L/R$.

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

Μέτρηση με βολτόμετρο και αμπερόμετρο.

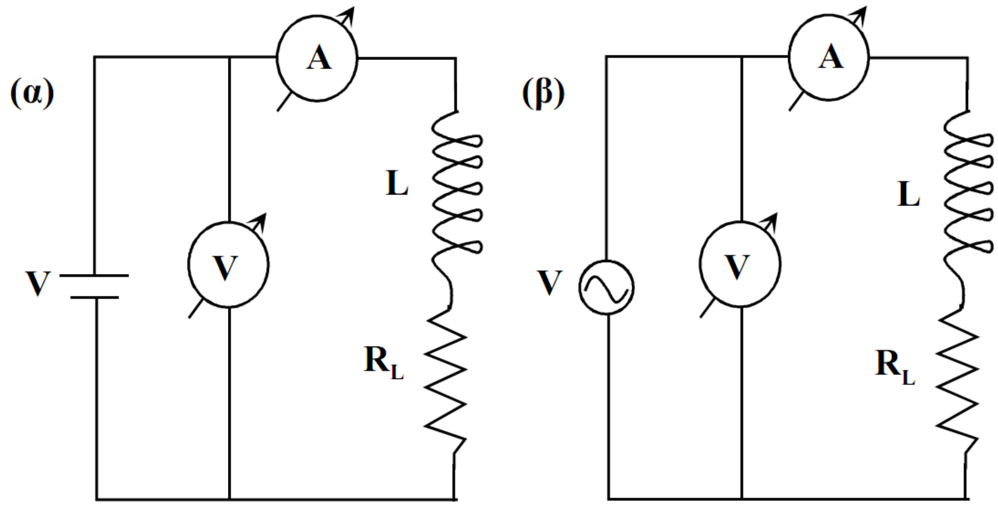
Η μέτρηση μιας αυτεπαγωγής μπορεί απλά να επιτευχθεί με αμπερόμετρο και βολτόμετρο όταν μετρηθούν τα ηλεκτρικά μεγέθη του κυκλώματος διαδοχικά για συνεχή και εναλλασσόμενη τάση. Έστω άγνωστο πηνίο L, RL του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε τα χαρακτηριστικά.



Σχήμα 10.2 Μέτρηση αυτεπαγωγής με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

Μέτρηση με βολτόμετρο και αμπερόμετρο.



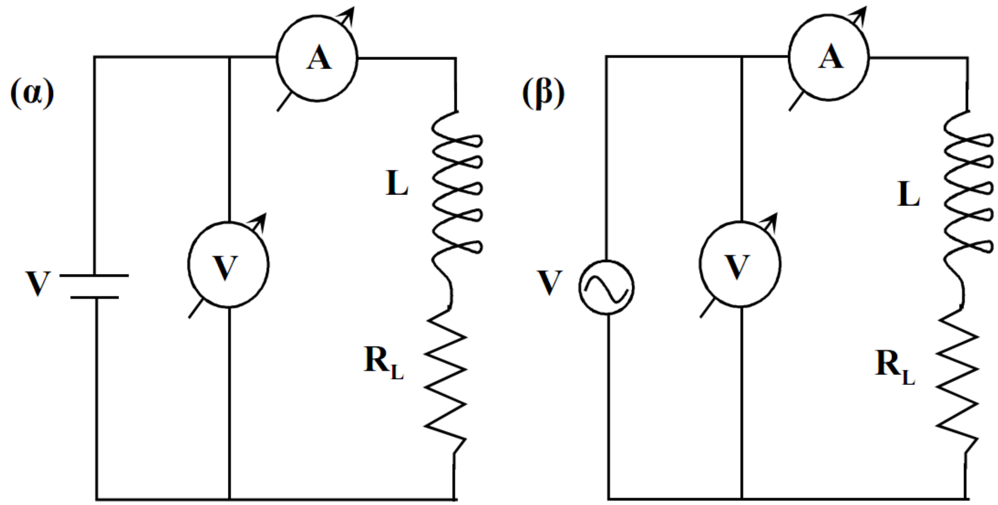
Σχήμα 10.2 Μέτρηση αυτεπαγωγής με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

Κύκλωμα R-L στο συνεχές (DC).

$$R_L = \frac{V_{DC}}{I_{DC}}$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

Μέτρηση με βολτόμετρο και αμπερόμετρο.



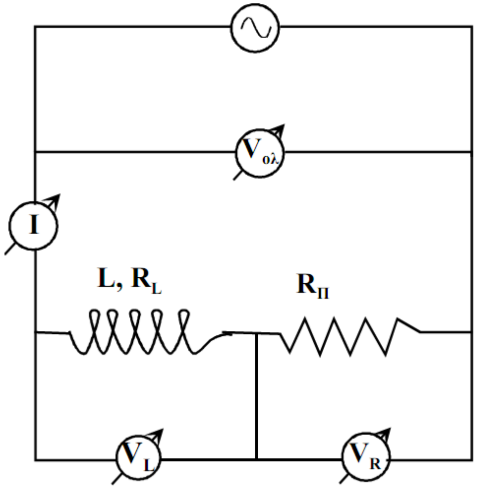
Σχήμα 10.2 Μέτρηση αυτεπαγωγής με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

Κύκλωμα R-L στο συνεχές (AC).

$$z_L = \frac{V_{AC}}{I_{AC}} \quad z_L = \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2}$$

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{V_{AC}}{I_{AC}}\right)^2 - \left(\frac{V_{DC}}{I_{DC}}\right)^2}$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής



Σχήμα 10.3 Μέτρηση αυτεπαγωγής τρία βολτόμετρα

Μέτρηση με τρία βολτόμετρα
Μία άλλη μέθοδος μέτρησης της αυτεπαγωγής είναι η σύγκριση της τάσης στα άκρα ενός πηνίου L, RL με τη τάση στα άκρα μιας γνωστής πρότυπης αντίστασης RΠ.

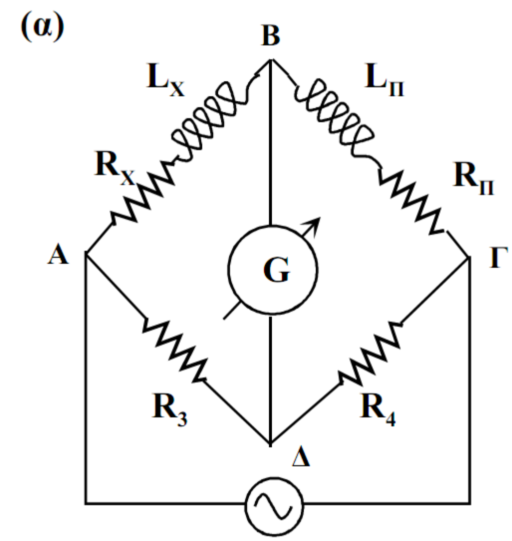
$$V_R = IR_Π \qquad V_L = Iz_L \qquad V_{ολ} = Iz$$

$$z_L = \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2}\ ,\ z = \sqrt{(R_Π + R_L)^2 + (\omega L)^2}$$

$$R_L = \frac{1}{2I^2 R_Π}\left(V_{ολ}^2 - V_R^2 - V_L^2\right)$$

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{V_L}{I}\right)^2 - R_L^2}$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής



Μέτρηση Με γέφυρα Wheatstone

Ισορροπία

$I_{AB}=I_{B\Gamma}$, $I_{A\Delta}=I_{\Delta\Gamma}$, $V_{AB}=V_{A\Delta}$, $V_{\Gamma B}=V_{\Gamma\Delta}$

$$\frac{V_{AB}}{V_{B\Gamma}}=\frac{V_{A\Delta}}{V_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow \frac{I_{AB}Z_X}{I_{B\Gamma}Z_\Pi}=\frac{I_{A\Delta}R_3}{I_{\Gamma\Delta}R_4} \Rightarrow \frac{R_X+j\omega L_X}{R_\Pi+j\omega L_\Pi}=\frac{R_3}{R_4} \Rightarrow$$

$$R_X = R_\Pi\frac{R_3}{R_4} \qquad L_X = L_\Pi\frac{R_3}{R_4}$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

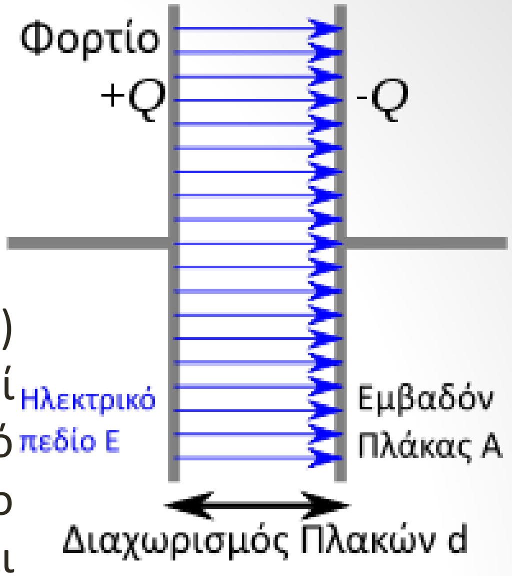
1) Αν σε ένα κύκλωμα η τάση και το ρεύμα δίνονται από τις σχέσεις:

$$V=150ημ(500t+10°),\ I=13.42ημ(500t-53.4°)$$

να βρείτε τα στοιχεία του κυκλώματος.

2) Σε κύκλωμα RL έχουμε $R=20Ω$, $L=60$ mH και $φ=80°$. Να βρεθεί το ω

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας

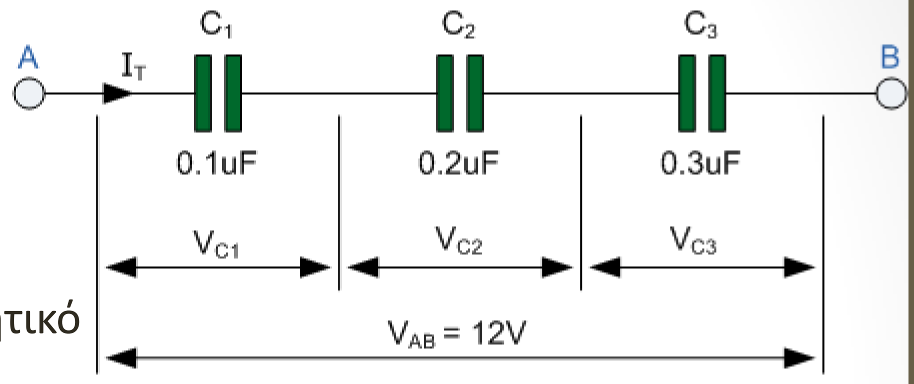


Πυκνωτή ονομάζουμε τη διάταξη δύο αγωγών (οπλισμών) που διαχωρίζονται από κάποιο μονωτή. Οι δύο αγωγοί έχουν ίσο και αντίθετο φορτίο, όπου ο αγωγός με το θετικό φορτίο έχει μεγαλύτερο δυναμικό. Το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών άρα και η διαφορά δυναμικού είναι ανάλογο του φορτίου (νόμος Gauss). Επομένως ο λόγος (φορτίο)/(διαφορά δυναμικού) είναι σταθερή ποσότητα που ονομάζεται χωρητικότητα C **(C=Q/V)** με μονάδα στο SI το ***Farad (F).*** Ο απλούστερος τύπος πυκνωτή είναι ο επίπεδος πυκνωτής: δύο παράλληλες επίπεδες αγώγιμες πλάκες, με εμβαδόν A και σε απόσταση d (με A>>d). Λόγω έλξης των αντιθέτων φορτίων, τα περισσότερα φορτία θα είναι στις απέναντι εσωτερικές επιφάνειες των πλακών. Το ηλεκτρικό πεδίο Ε στο χώρο μεταξύ των πλακών είναι Επυκν=σ/ε0, άρα η χωρητικότητα μπορεί να υπολογιστεί σε:

$$V_{AB} = E_{\pi\upsilon\kappa\nu} d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Q/A}{\varepsilon_0} d \Rightarrow C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας

Σύνδεση σε σειρά,
όλοι οι πυκνωτές έχουν ίδιο φορτίο, στην περιοχή μεταξύ δύο πυκνωτών ο ένας οπλισμός του ενός πυκνωτή έχει θετικό φορτίο και ο αντίστοιχος του άλλου αρνητικό

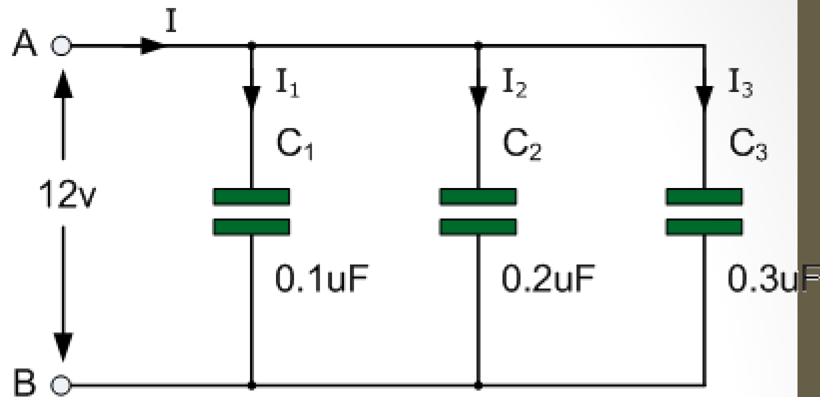


VAB = Q/Vολ= V1+V2+V3 = Q/C1+Q/C2+Q/C3

ΙΔΙΑ φορτίο

$$\frac{1}{C_{o\lambda}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{C_N}$$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας



Σύνδεση παράλληλα,

όλοι οι πυκνωτές βρίσκονται στην ίδια διαφορά δυναμικού, το φορτίο τους κατανέμεται ανάλογα με την τιμή της χωρητικότητας και η ολική χωρητικότητα δίνεται από τη σχέση

ΙΔΙΑ τaση!!

$$C_{o\lambda} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_N$$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας

Κύκλωμα R-C στο συνεχές.
Η παρουσία χωρητικότητας σε ένα κύκλωμα συνεχούς έχει επίσης σαν αποτέλεσμα την εξάρτηση των ηλεκτρικών μεγεθών από το χρόνο. Σαν παράδειγμα,

$$i = \frac{E}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC}$$

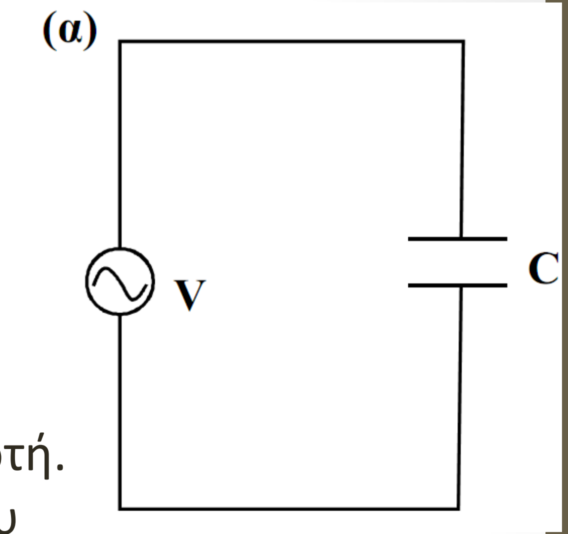
Επομένως, η χωρητικότητα σε κύκλωμα συνεχούς έχει σαν αποτέλεσμα το ρεύμα να τείνει να μηδενιστεί, με τη διαδικασία να εξαρτάται από το γινόμενο RC. Δηλαδή ο πυκνωτής στο συνεχές λειτουργεί σαν διακόπτης.

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας

Κύκλωμα RLC στο συνεχές

Η συμπεριφορά στο συνεχές ενός κυκλώματος CL (ή RCL) είναι τελείως διαφορετική από το RC καθώς σε αυτό έχουμε μία ταλάντωση. **Αν υποθέσουμε ότι ο πυκνωτής είναι αρχικά φορτισμένος, στη συνέχεια εκφορτίζεται μέσω του πηνίου**. Λόγω της αυτεπαγωγής του πηνίου L το ρεύμα αυξάνει σταδιακά μέχρι μία μέγιστη τιμή Im, οπότε ο πυκνωτής έχει εκφορτιστεί. Όμως λόγω του ρεύματος Im ο **πυκνωτής ξαναφορτίζεται** αλλά αυτή τη φορά με αντίθετη πολικότητα, δηλαδή μέγιστη τάση –Vm και φορτίο -Q αντίστοιχα. Στη συνέχεια, ο πυκνωτής εκφορτίζεται ξανά αλλά αυτή τη φορά λόγω του φορτίου -Q, το ρεύμα που δημιουργείται στο πηνίο θα έχει αντίθετη φορά -Im. ***Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται για αρκετό χρόνο σαν μία επανάληψη εναλλαγής φορτίου ρεύματος. Αν μάλιστα δεν υπάρχουν απώλειες (ωμικές αντιστάσεις) στο κύκλωμα, η επανάληψη των διαδικασιών θα συνεχίζεται έπ’ άπειρον. Η συμπεριφορά αυτή είναι μία ηλεκτρική ταλάντωση.***

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας



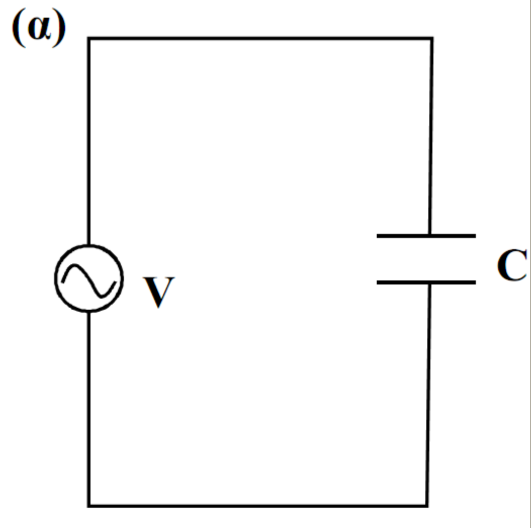
Κύκλωμα R-C στο εναλλασσόμενο.

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια την συμπεριφορά στο εναλλασσόμενο ενός κυκλώματος που περιέχει πυκνωτή. Αρχικά, ας δούμε την περίπτωση ενός κυκλώματος που περιλαμβάνει μόνο ένα ιδανικό πυκνωτή C και μία πηγή τροφοδοσίας **V=V0ejωt**

Εφαρμόζοντας τον νόμο τάσεων Kirchhoff στο κύκλωμα:

$$V_0 e^{j\omega t} - \frac{q}{C} = 0$$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας



Κύκλωμα R-C στο εναλλασσόμενο.

$$V_0 e^{j\omega t} - \frac{q}{C} = 0$$

Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I = Ae^{j\omega t}$

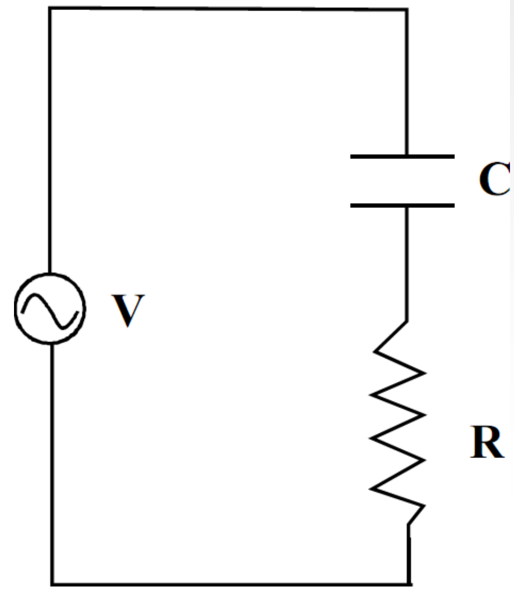
$$V_0 e^{j\omega t} - \frac{1}{C}\int Ae^{j\omega t}dt = 0 \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - \frac{1}{j\omega C}Ae^{j\omega t} = 0 \Rightarrow A = j\omega C V_0$$

$$I = j\omega C V_0 e^{j\omega t} = \omega C V_0 e^{j\omega t + \pi/2}$$

φαίνεται ότι το ρεύμα προηγείται κατά π/2 της τάσης.

Η ποσότητα 1/ωC παρουσιάζει ρόλο αντίστοιχο της αντίστασης και ονομάζεται χωρητική αντίσταση που στη μιγαδική μορφή δίνεται από xC=-j(1/ωC). Όμως η συμπεριφορά αυτή εμφανίζεται μόνο στο εναλλασσόμενο καθώς στο συνεχές (ω=0) η τιμή της χωρητικής αντίστασης είναι άπειρη και ο πυκνωτής, όπως ήδη αναφέρθηκε, λειτουργεί σαν διακόπτης.

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας



$$V_0 e^{j\omega t} - \frac{q}{C} = iR$$

Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I = Ae^{j\omega t}$

$$V_0 e^{j\omega t} - \frac{1}{C}\int Ae^{j\omega t}dt = iR \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - \frac{1}{j\omega C}Ae^{j\omega t} = ARe^{j\omega t} \Rightarrow A = \frac{V_0}{R - j\,{}^{1}\!/_{\omega C}}$$

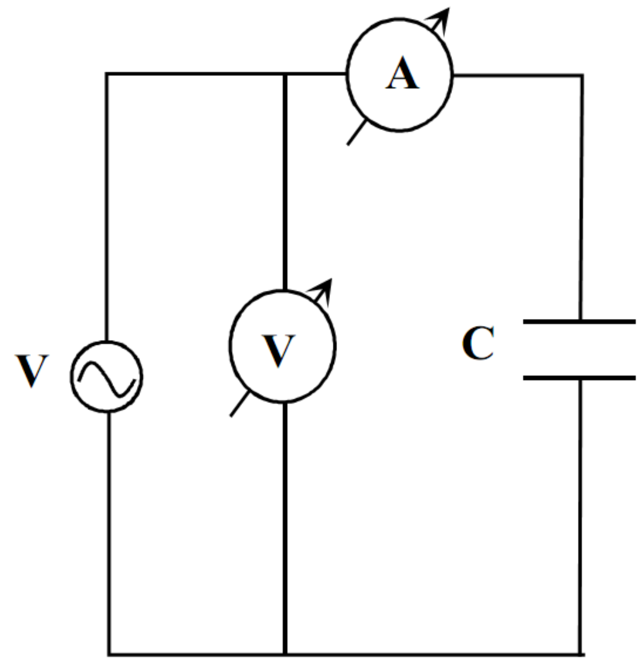
$$I = \frac{V_0}{R - j\,{}^{1}\!/_{\omega C}}e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left({}^{1}\!/_{\omega C}\right)^2}}e^{j\omega t + \varphi}$$

Η εμπέδηση του κυκλώματος είναι συνδυασμός της ωμικής και της χωρητικής αντίστασης και δίνεται από τη σχέση $\sqrt{R^2 + \left({}^{1}\!/_{\omega C}\right)^2}$

$$z_C = R - j/\omega C) \quad \varepsilon\varphi\varphi = 1/(\omega CR)$$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας

Μέτρηση Με βολτόμετρο και αμπερόμετρο.

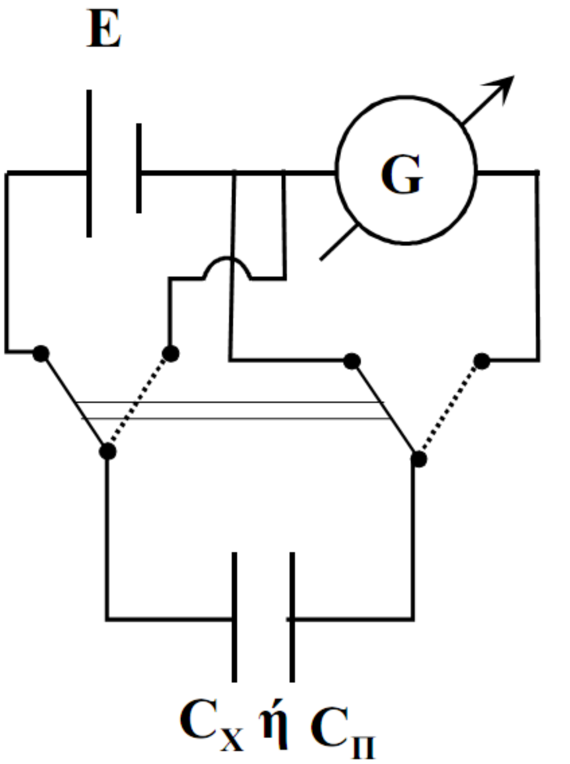


Σχήμα 11.2 Μέτρηση χωρητικότητας με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

$$X_C = \frac{V}{I} \Rightarrow \frac{1}{\omega C} = \frac{V}{I} \Rightarrow C = \frac{I}{\omega V}$$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρησ
χωρητικότητας

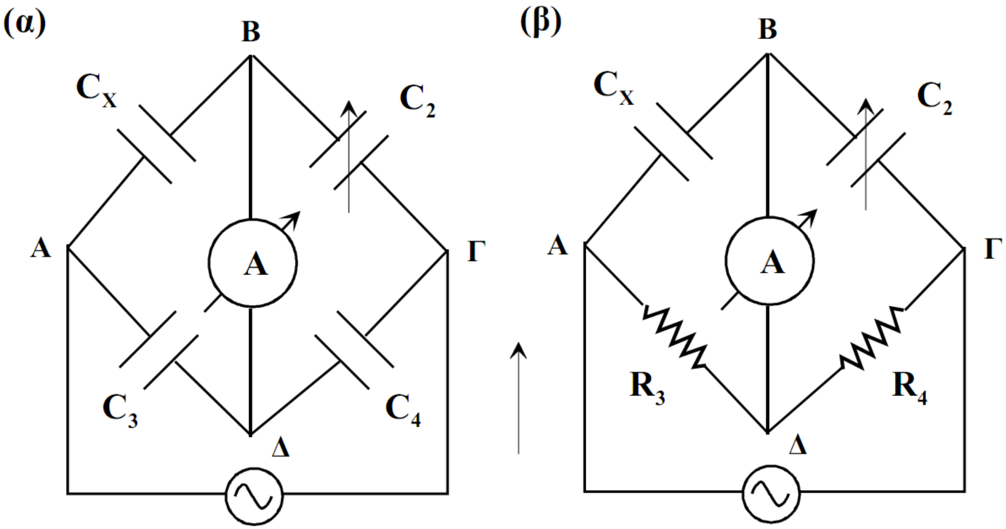
Μέτρηση Με Σύγκριση



Σχήμα 11.3. Υπολογισμός χωρητικότητας με σύγκριση

$$\frac{Q_X}{Q_\Pi} = \frac{C_X}{C_\Pi} = \frac{\theta_X}{\theta_\Pi} \Rightarrow C_X = C_\Pi \frac{\theta_X}{\theta_\Pi}$$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας



Σχήμα 11.4 Μέτρηση χωρητικότητας με γέφυρα

$$\frac{V_{AB}}{V_{B\Gamma}} = \frac{V_{A\Delta}}{V_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow \frac{I_{AB}Z_X}{I_{B\Gamma}Z_3} = \frac{I_{A\Delta}Z_2}{I_{\Gamma\Delta}Z_4} \Rightarrow \frac{-j/\omega C_X}{-j/\omega C_3} = \frac{-j/\omega C_2}{-j/\omega C_4} \Rightarrow$$

$$C_X = C_2 \frac{C_3}{C_4}$$

$$C_X = C_2 \frac{R_4}{R_3}$$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας

1) Αν σε ένα κύκλωμα η τάση και το ρεύμα δίνονται από τις σχέσεις:

$$V=311\eta\mu(2500t+170°),\ I=15.5\eta\mu(2500t-145°)$$

2) Σε κύκλωμα RC έχουμε R=20Ω, C=5 μF και φ=-80°. Να βρεθεί το ω.