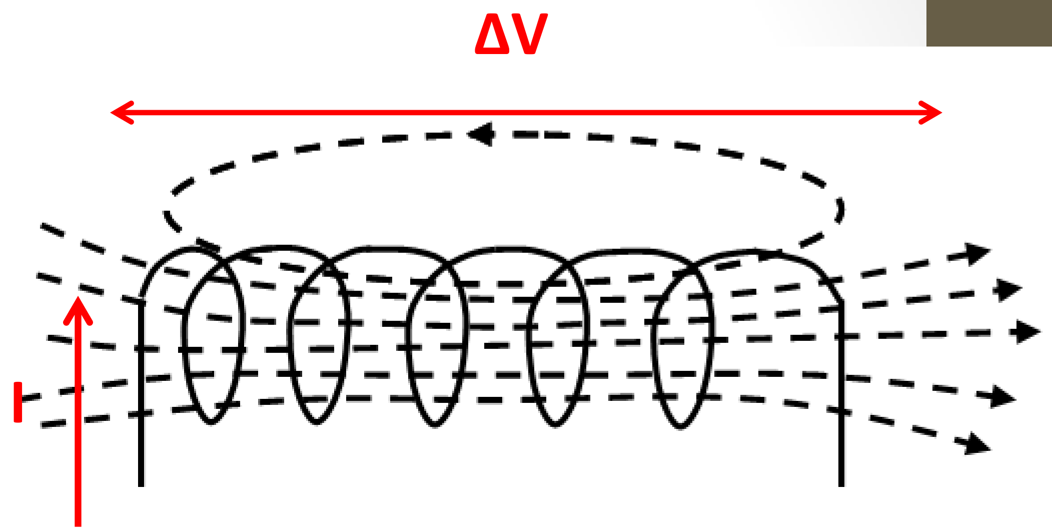
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών &
Μηχανικών Υπολογιστών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Διαλέξεις
Ηλεκτρικές Μετρήσεις

Άννα Τασολάμπρου

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

*Πηνίο με **N** σπείρες που διαρρέεται από ρεύμα **I**, οπότε σαν αποτέλεσμα έχουμε κάθε σπείρα να διαπερνάται από μαγνητική ροή **ΦB***



Ορισμός αυτεπαγωγής

$$L=N\Phi_B/I$$

$$N\frac{d\Phi_B}{dt}=L\frac{di}{dt}\Rightarrow E=-L\frac{di}{dt}$$

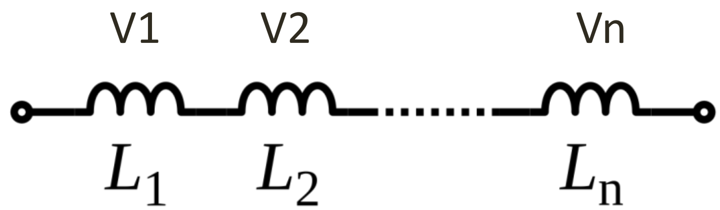
$$V=L(di/dt)$$

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής έχει μονάδες Henry και ένα τμήμα του κυκλώματος με αυτεπαγωγή ονομάζεται πηνίο

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

σύνδεση σε σειρά N πηνίων

$V=L(di/dt)$



Vtotal = V1+V2+…+Vn

Vtotal =L1di/dt+L2di/dt+…+Ln/di/dt

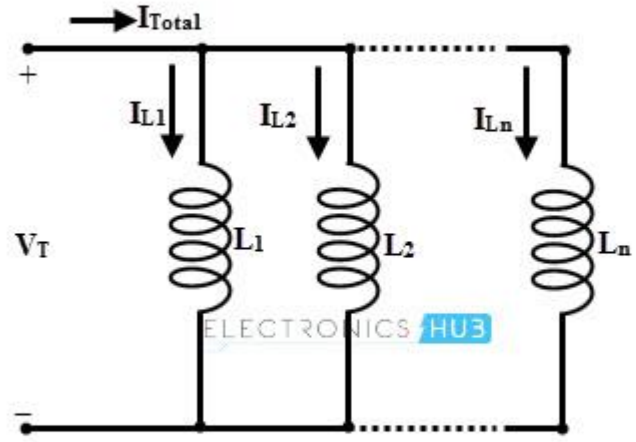
ΙΔΙΟ ΡΕΥΜΑ!!!

$$L_{\iota\sigma o\delta} = L_1 + L_2 + \ldots\ldots + L_N$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

σύνδεση παράλληλα Ν πηνίων

$V=L(di/dt)$



ΙΔΙΑ ΤΑΣΗ!!!

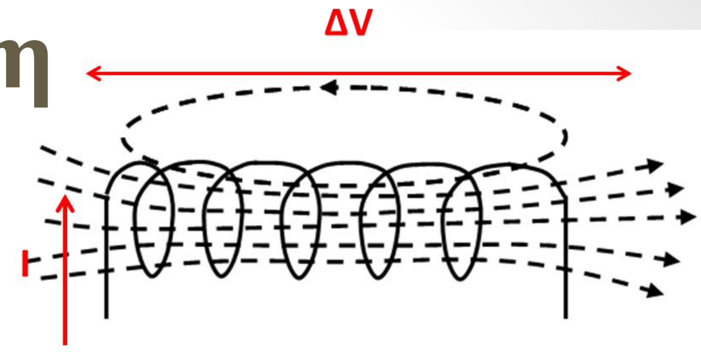
Itotal = IL1 + IL2 + …+ Iln

dItotal/dt = dIL1/dt + dIL2/dt +…+ dIln/dt

V/Lισοδ = V/L1 + V/L2 + …. + V/Ln

$$\frac{1}{L_{\iota\sigma o\delta}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots. + \frac{1}{L_N}$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής



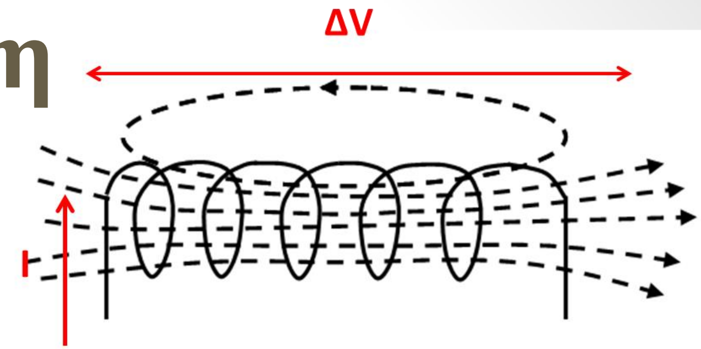
Κύκλωμα R-L στο συνεχές (DC).

Η παρουσία αυτεπαγωγής σε ένα κύκλωμα συνεχούς ρεύματος έχει σαν αποτέλεσμα την εξάρτηση των ηλεκτρικών μεγεθών από το χρόνο. Σαν παράδειγμα, σε κύκλωμα με αυτεπαγωγή L, ωμική αντίσταση R και πηγή E, το ρεύμα δεν παίρνει αμέσως την μέγιστη του τιμή αλλά να αυξάνεται ακολουθώντας μία εξίσωση της μορφής:

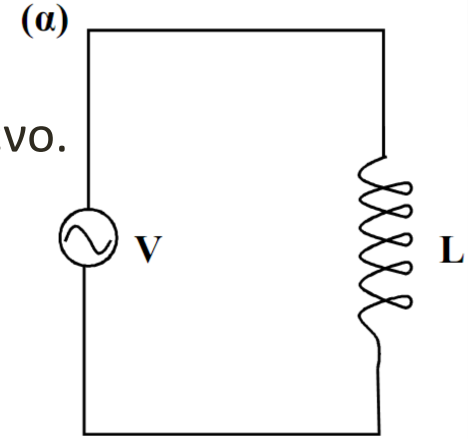
$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)$$

Δηλαδή, η αυτεπαγωγή σε κύκλωμα συνεχούς έχει σαν αποτέλεσμα το ρεύμα να πλησιάζει ασυμπτωτικά την τελική του τιμή. Όσο μεγαλύτερη είναι η αυτεπαγωγή, τόσο καθυστερεί το ρεύμα να πάρει την τελική του τιμή, με την διαδικασία να εξαρτάται από το λόγο L/R. ¨Όμως η τελική τιμή του ρεύματος δεν εξαρτάται από την αυτεπαγωγή αλλά μόνο από την ωμική αντίσταση.

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής



Κύκλωμα R-L στο εναλλασσόμενο (AC).



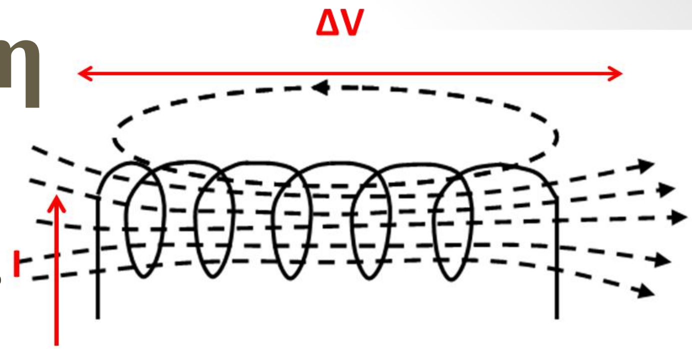
Θα εξετάσουμε στη συνέχεια την συμπεριφορά ενός κυκλώματος που περιέχει αυτεπαγωγή στο εναλλασσόμενο. Αρχικά, ας δούμε την περίπτωση κυκλώματος που περιλαμβάνει μόνο ένα ιδανικό πηνίο L και μία πηγή τροφοδοσίας **$V=V0e^{j\omega t}$** . Εφαρμόζοντας τον νόμο τάσεων Kirchhoff στο κύκλωμα

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{di}{dt} = 0$$

Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I = Ae^{j\omega t}$

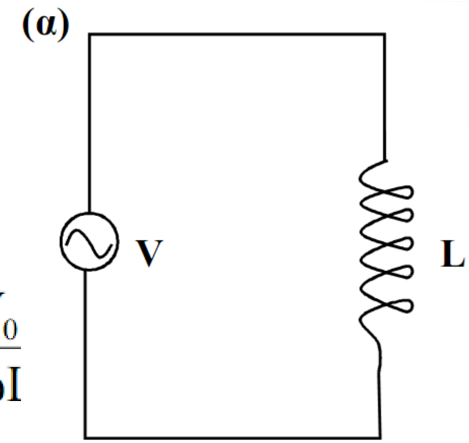
$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{d}{dt}\left(Ae^{j\omega t}\right) = 0 \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - j\omega L A e^{j\omega t} = 0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{j\omega L}$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής



Κύκλωμα R-L στο εναλλασσόμενο (AC).

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{di}{dt} = 0$$



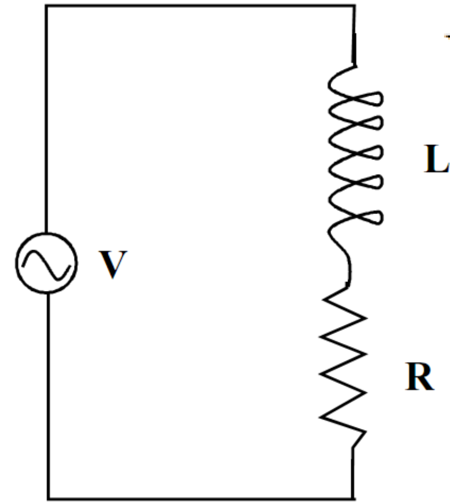
Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I = Ae^{j\omega t}$

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{d}{dt}\left(Ae^{j\omega t}\right) = 0 \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - j\omega L A e^{j\omega t} = 0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{j\omega I}$$

$$I = Ae^{j\omega t} \Rightarrow I = \frac{V_0}{j\omega L}e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\omega L}e^{j\omega t - \pi/2}$$

Το ρεύμα καθυστερεί κατά π/2 σε σχέση με την τάση. Επίσης η ποσότητα ωL παρουσιάζει ρόλο αντίστοιχο με την ωμική αντίσταση (ισούται με το λόγο τάση/ρεύμα) και ονομάζεται επαγωγική αντίσταση που στη μιγαδική μορφή δίνεται από **xL=jωL.** Όμως η συμπεριφορά αυτή εμφανίζεται μόνο στο εναλλασσόμενο καθώς στο συνεχές (**ω=0**) η τιμή της επαγωγικής αντίστασης είναι μηδέν.

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής



$V=L(di/dt)$

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{di}{dt} = iR$$

Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I = Ae^{j\omega t}$

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{d}{dt}\left(Ae^{j\omega t}\right) = iR \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - j\omega L A e^{j\omega t} = RAe^{j\omega t} \Rightarrow A = \frac{V_0}{R + j\omega L}$$

$$I = \frac{V_0}{R + j\omega L} e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j\omega t - \varphi}$$

Η αντίσταση του κυκλώματος ονομάζεται εμπέδηση, είναι συνδυασμός της ωμικής και της επαγωγικής αντίστασης $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$

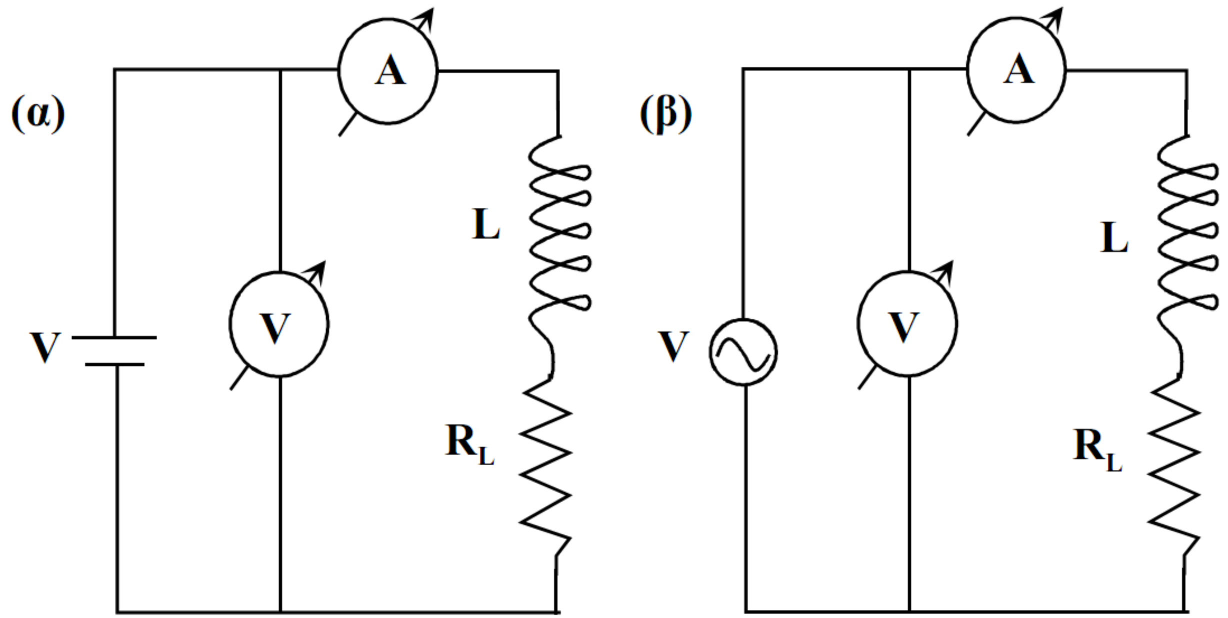
(η μιγαδική μορφή είναι $z_L = R + j\omega L$).

το ρεύμα καθυστερεί σε σχέση με την τάση κατά γωνία φ $\varepsilon\varphi\varphi = \omega L / R$.

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

Μέτρηση με βολτόμετρο και αμπερόμετρο.

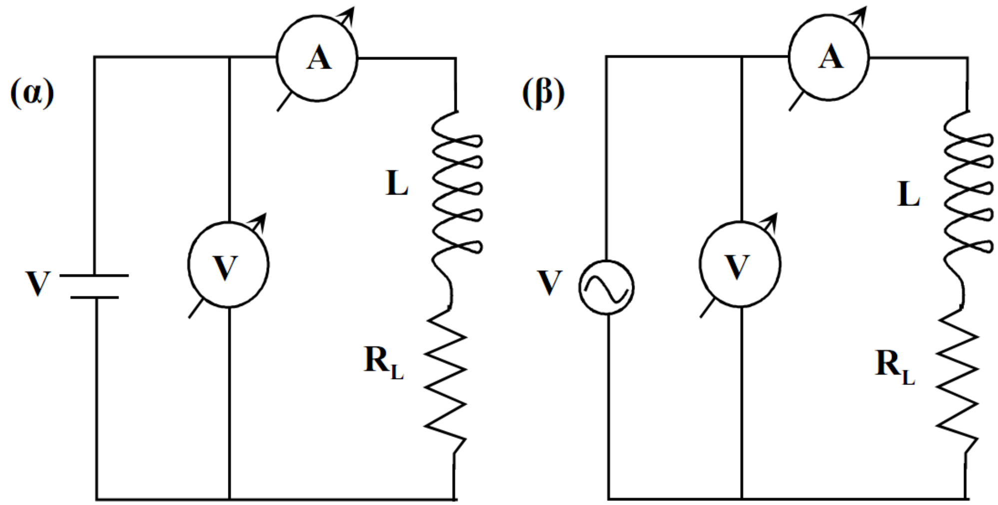
Η μέτρηση μιας αυτεπαγωγής μπορεί απλά να επιτευχθεί με αμπερόμετρο και βολτόμετρο όταν μετρηθούν τα ηλεκτρικά μεγέθη του κυκλώματος διαδοχικά για συνεχή και εναλλασσόμενη τάση. Έστω άγνωστο πηνίο L, RL του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε τα χαρακτηριστικά.



Σχήμα 10.2 Μέτρηση αυτεπαγωγής με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

Μέτρηση με βολτόμετρο και αμπερόμετρο.



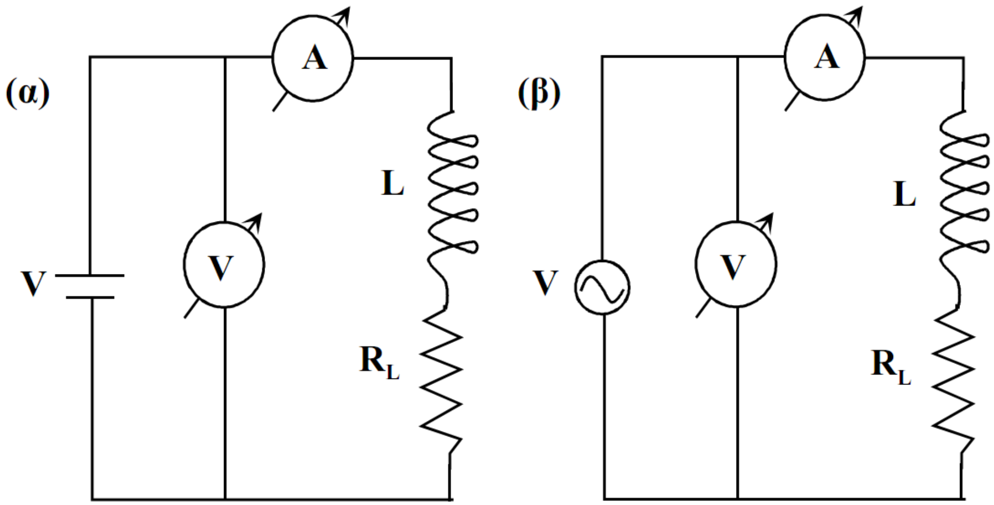
Σχήμα 10.2 Μέτρηση αυτεπαγωγής με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

Κύκλωμα R-L στο συνεχές (DC).

$$R_L = \frac{V_{DC}}{I_{DC}}$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

Μέτρηση με βολτόμετρο και αμπερόμετρο.



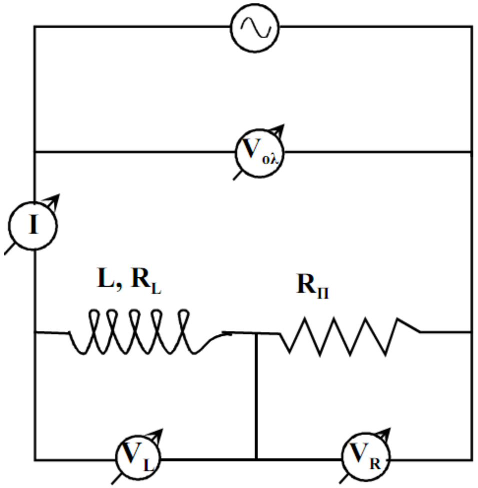
Σχήμα 10.2 Μέτρηση αυτεπαγωγής με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

Κύκλωμα R-L στο συνεχές (AC).

$$z_L = \frac{V_{AC}}{I_{AC}} \quad z_L = \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2}$$

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{V_{AC}}{I_{AC}}\right)^2 - \left(\frac{V_{DC}}{I_{DC}}\right)^2}$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής



Σχήμα 10.3 Μέτρηση αυτεπαγωγής τρία βολτόμετρα

Μέτρηση με τρία βολτόμετρα

Μία άλλη μέθοδος μέτρησης της αυτεπαγωγής είναι η σύγκριση της τάσης στα άκρα ενός πηνίου L, RL με τη τάση στα άκρα μιας γνωστής πρότυπης αντίστασης RΠ.

$$V_R = IR_Π \qquad V_L = Iz_L \qquad V_{ολ} = Iz$$

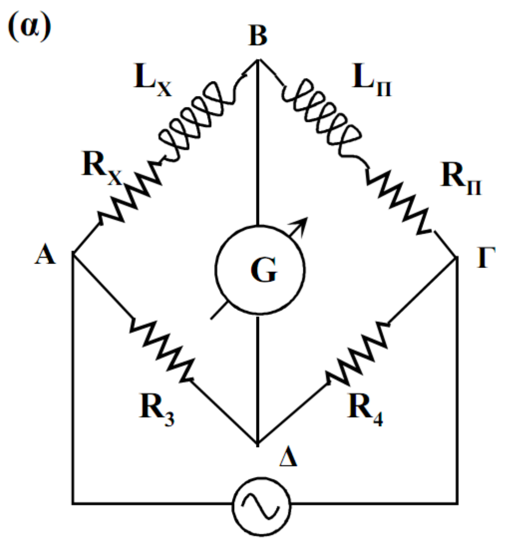
$$z_L = \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2}\ ,\ z = \sqrt{(R_Π + R_L)^2 + (\omega L)^2}$$

$$R_L = \frac{1}{2I^2 R_Π}\left(V_{ολ}^2 - V_R^2 - V_L^2\right)$$

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{V_L}{I}\right)^2 - R_L^2}$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

Μέτρηση Με γέφυρα Wheatstone



Ισορροπία

$I_{AB}=I_{B\Gamma}$, $I_{A\Delta}=I_{\Delta\Gamma}$, $V_{AB}=V_{A\Delta}$, $V_{\Gamma B}=V_{\Gamma\Delta}$

$$\frac{V_{AB}}{V_{B\Gamma}}=\frac{V_{A\Delta}}{V_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow \frac{I_{AB}Z_X}{I_{B\Gamma}Z_\Pi}=\frac{I_{A\Delta}R_3}{I_{\Gamma\Delta}R_4} \Rightarrow \frac{R_X+j\omega L_X}{R_\Pi+j\omega L_\Pi}=\frac{R_3}{R_4} \Rightarrow$$

$$R_X = R_\Pi \frac{R_3}{R_4} \qquad L_X = L_\Pi \frac{R_3}{R_4}$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

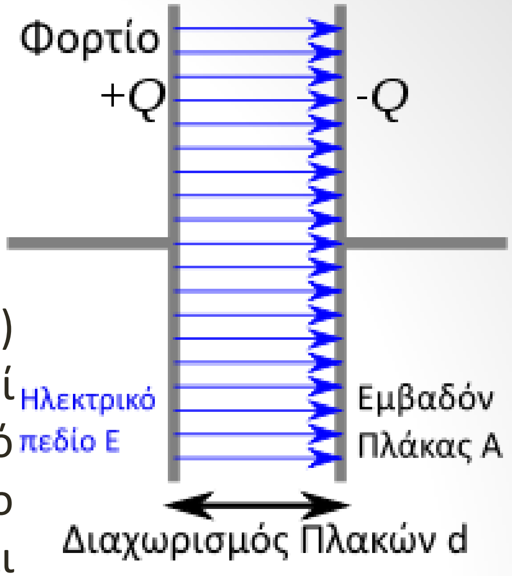
1) Αν σε ένα κύκλωμα η τάση και το ρεύμα δίνονται από τις σχέσεις:

$$V=150ημ(500t+10°),\ I=13.42ημ(500t-53.4°)$$

να βρείτε τα στοιχεία του κυκλώματος.

2) Σε κύκλωμα RL έχουμε R=20Ω, L=60 mH και φ=80°. Να βρεθεί το ω

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας

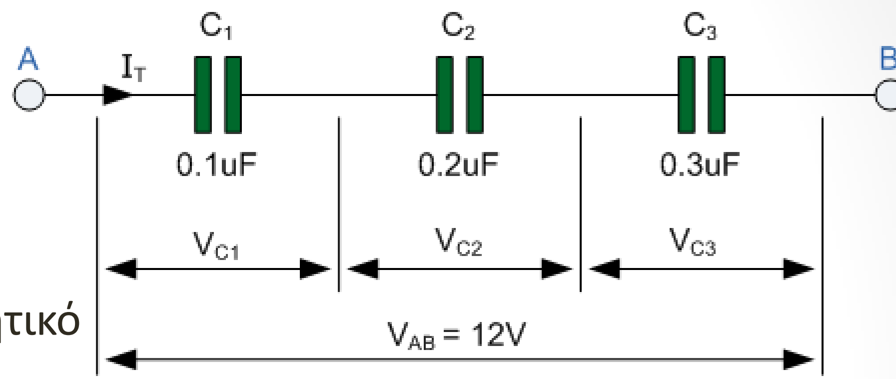


Πυκνωτή ονομάζουμε τη διάταξη δύο αγωγών (οπλισμών) που διαχωρίζονται από κάποιο μονωτή. Οι δύο αγωγοί έχουν ίσο και αντίθετο φορτίο, όπου ο αγωγός με το θετικό φορτίο έχει μεγαλύτερο δυναμικό. Το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών άρα και η διαφορά δυναμικού είναι ανάλογο του φορτίου (νόμος Gauss). Επομένως ο λόγος (φορτίο)/(διαφορά δυναμικού) είναι σταθερή ποσότητα που ονομάζεται χωρητικότητα C **(C=Q/V)** με μονάδα στο SI το ***Farad (F).*** Ο απλούστερος τύπος πυκνωτή είναι ο επίπεδος πυκνωτής: δύο παράλληλες επίπεδες αγώγιμες πλάκες, με εμβαδόν Α και σε απόσταση d (με A>>d). Λόγω έλξης των αντιθέτων φορτίων, τα περισσότερα φορτία θα είναι στις απέναντι εσωτερικές επιφάνειες των πλακών. Το ηλεκτρικό πεδίο Ε στο χώρο μεταξύ των πλακών είναι Επυκν=σ/ε0, άρα η χωρητικότητα μπορεί να υπολογιστεί σε:

$$V_{AB} = E_{\pi\upsilon\kappa\nu} d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Q/A}{\varepsilon_0} d \Rightarrow C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας

Σύνδεση σε σειρά,
όλοι οι πυκνωτές έχουν ίδιο φορτίο, στην περιοχή μεταξύ δύο πυκνωτών ο ένας οπλισμός του ενός πυκνωτή έχει θετικό φορτίο και ο αντίστοιχος του άλλου αρνητικό

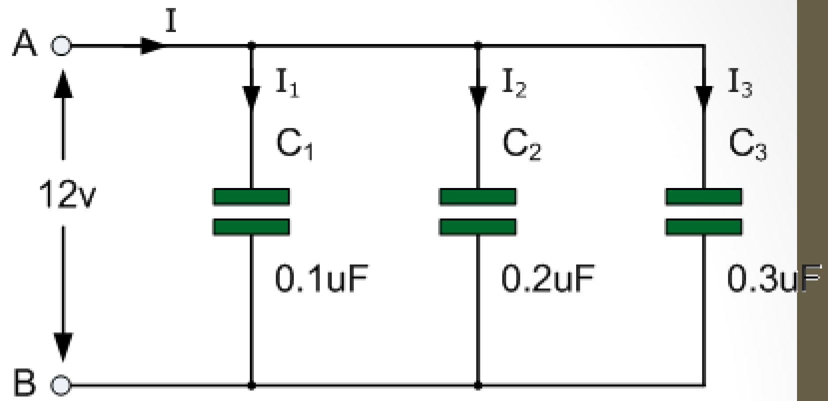


VAB = Q/Vολ= V1+V2+V3 = Q/C1+Q/C2+Q/C3

ΙΔΙΑ φορτίο

$$\frac{1}{C_{o\lambda}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots\dots + \frac{1}{C_N}$$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας



Σύνδεση παράλληλα,

όλοι οι πυκνωτές βρίσκονται στην ίδια διαφορά δυναμικού, το φορτίο τους κατανέμεται ανάλογα με την τιμή της χωρητικότητας και η ολική χωρητικότητα δίνεται από τη σχέση

ΙΔΙΑ ταση!!

$$C_{o\lambda} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_N$$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας

Κύκλωμα R-C στο συνεχές.
Η παρουσία χωρητικότητας σε ένα κύκλωμα συνεχούς έχει επίσης σαν αποτέλεσμα την εξάρτηση των ηλεκτρικών μεγεθών από το χρόνο. Σαν παράδειγμα,

$$i = \frac{E}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC}$$

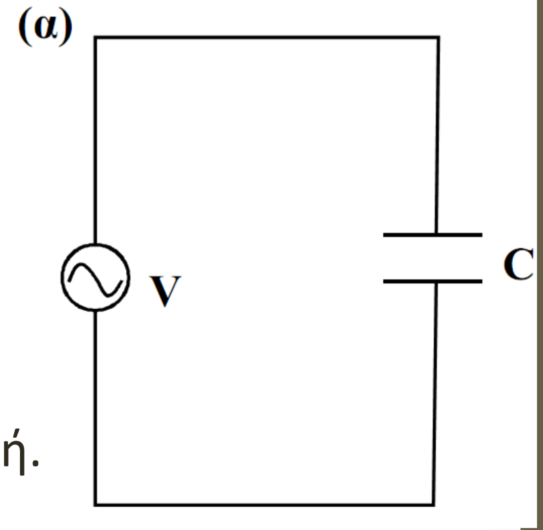
Επομένως, η χωρητικότητα σε κύκλωμα συνεχούς έχει σαν αποτέλεσμα το ρεύμα να τείνει να μηδενιστεί, με τη διαδικασία να εξαρτάται από το γινόμενο RC. Δηλαδή ο πυκνωτής στο συνεχές λειτουργεί σαν διακόπτης.

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας

Κύκλωμα RLC στο συνεχές

Η συμπεριφορά στο συνεχές ενός κυκλώματος CL (ή RCL) είναι τελείως διαφορετική από το RC καθώς σε αυτό έχουμε μία ταλάντωση. **Αν υποθέσουμε ότι ο πυκνωτής είναι αρχικά φορτισμένος, στη συνέχεια εκφορτίζεται μέσω του πηνίου**. Λόγω της αυτεπαγωγής του πηνίου L το ρεύμα αυξάνει σταδιακά μέχρι μία μέγιστη τιμή Im, οπότε ο πυκνωτής έχει εκφορτιστεί. Όμως λόγω του ρεύματος Im ο **πυκνωτής ξαναφορτίζεται** αλλά αυτή τη φορά με αντίθετη πολικότητα, δηλαδή μέγιστη τάση –Vm και φορτίο -Q αντίστοιχα. Στη συνέχεια, ο πυκνωτής εκφορτίζεται ξανά αλλά αυτή τη φορά λόγω του φορτίου -Q, το ρεύμα που δημιουργείται στο πηνίο θα έχει αντίθετη φορά -Im. ***Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται για αρκετό χρόνο σαν μία επανάληψη εναλλαγής φορτίου ρεύματος. Αν μάλιστα δεν υπάρχουν απώλειες (ωμικές αντιστάσεις) στο κύκλωμα, η επανάληψη των διαδικασιών θα συνεχίζεται έπ' άπειρον. Η συμπεριφορά αυτή είναι μία ηλεκτρική ταλάντωση.***

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας



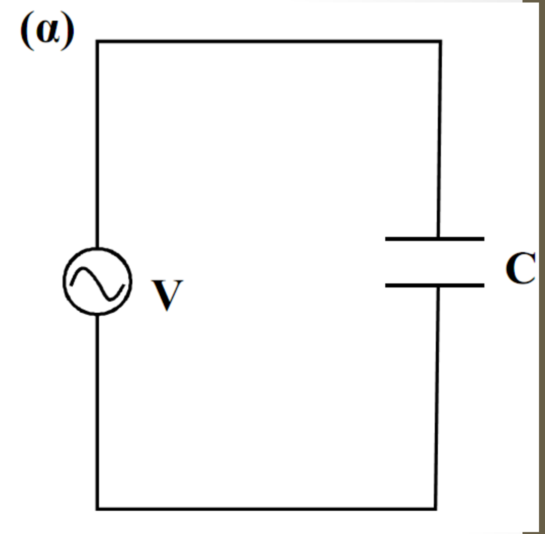
Κύκλωμα R-C στο εναλλασσόμενο.

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια την συμπεριφορά στο εναλλασσόμενο ενός κυκλώματος που περιέχει πυκνωτή. Αρχικά, ας δούμε την περίπτωση ενός κυκλώματος που περιλαμβάνει μόνο ένα ιδανικό πυκνωτή C και μία πηγή τροφοδοσίας **V=V0ejωt**

Εφαρμόζοντας τον νόμο τάσεων Kirchhoff στο κύκλωμα:

$$V_0 e^{j\omega t} - \frac{q}{C} = 0$$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας



Κύκλωμα R-C στο εναλλασσόμενο.

$$V_0 e^{j\omega t} - \frac{q}{C} = 0$$

Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I = Ae^{j\omega t}$

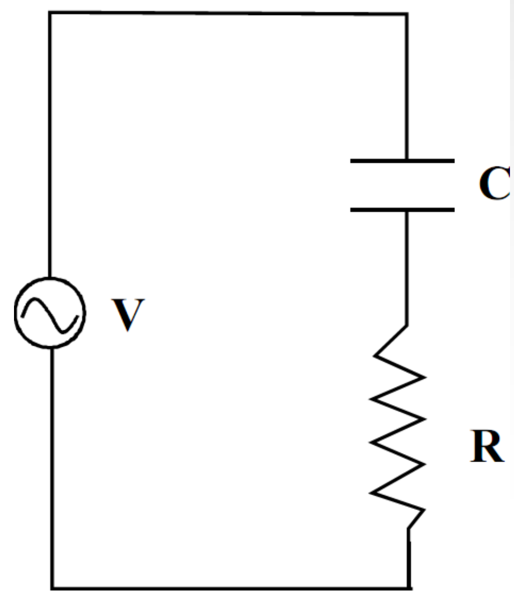
$$V_0 e^{j\omega t} - \frac{1}{C}\int A e^{j\omega t} dt = 0 \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - \frac{1}{j\omega C} A e^{j\omega t} = 0 \Rightarrow A = j\omega C V_0$$

$$I = j\omega C V_0 e^{j\omega t} = \omega C V_0 e^{j\omega t + \pi/2}$$

φαίνεται ότι το ρεύμα προηγείται κατά π/2 της τάσης.

Η ποσότητα 1/ωC παρουσιάζει ρόλο αντίστοιχο της αντίστασης και ονομάζεται χωρητική αντίσταση που στη μιγαδική μορφή δίνεται από xC=-j(1/ωC). Όμως η συμπεριφορά αυτή εμφανίζεται μόνο στο εναλλασσόμενο καθώς στο συνεχές (ω=0) η τιμή της χωρητικής αντίστασης είναι άπειρη και ο πυκνωτής, όπως ήδη αναφέρθηκε, λειτουργεί σαν διακόπτης.

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας



$$V_0 e^{j\omega t} - \frac{q}{C} = iR$$

Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I = Ae^{j\omega t}$

$$V_0 e^{j\omega t} - \frac{1}{C}\int Ae^{j\omega t}dt = iR \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - \frac{1}{j\omega C}Ae^{j\omega t} = ARe^{j\omega t} \Rightarrow A = \frac{V_0}{R - j\,{}^{1}\!/_{\omega C}}$$

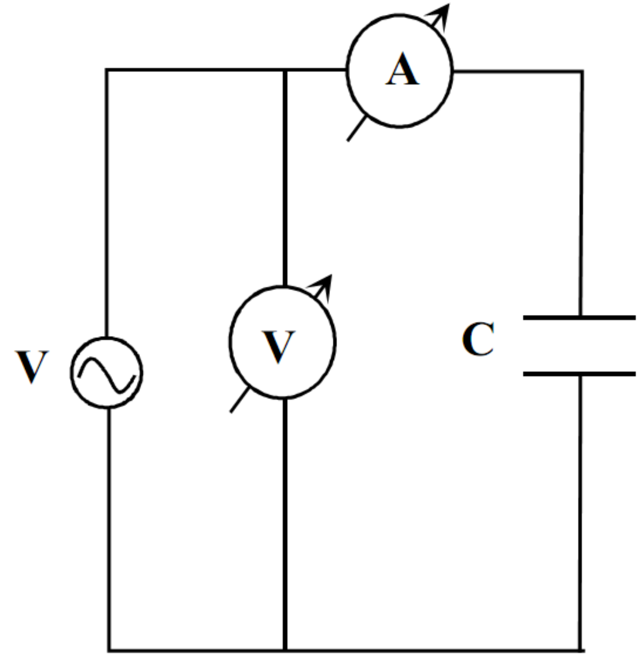
$$I = \frac{V_0}{R - j\,{}^{1}\!/_{\omega C}}e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left({}^{1}\!/_{\omega C}\right)^2}}e^{j\omega t + \varphi}$$

Η εμπέδηση του κυκλώματος είναι συνδυασμός της ωμικής και της χωρητικής αντίστασης και δίνεται από τη σχέση $\sqrt{R^2 + \left({}^{1}\!/_{\omega C}\right)^2}$

$z_C = R - j/\omega C)$ $\quad$ $\varepsilon\varphi\varphi = 1/(\omega CR)$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας

Μέτρηση Με βολτόμετρο και αμπερόμετρο.

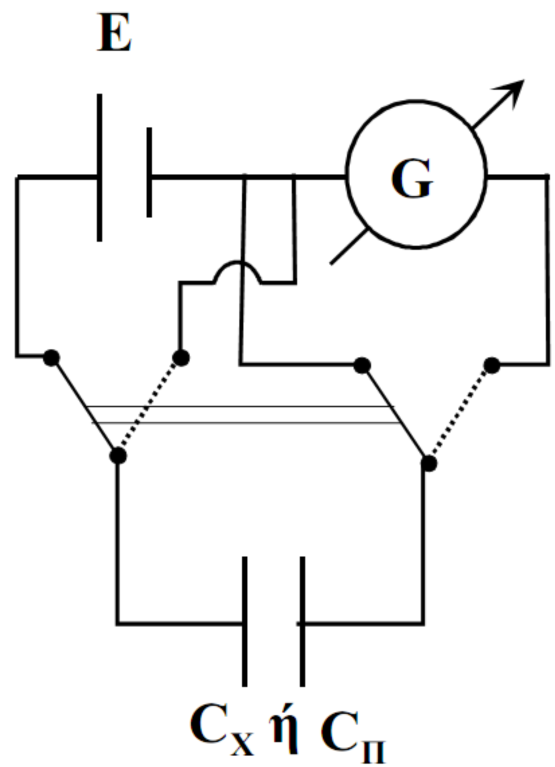


Σχήμα 11.2 Μέτρηση χωρητικότητας με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

$$X_C = \frac{V}{I} \Rightarrow \frac{1}{\omega C} = \frac{V}{I} \Rightarrow C = \frac{I}{\omega V}$$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρησ χωρητικότητας

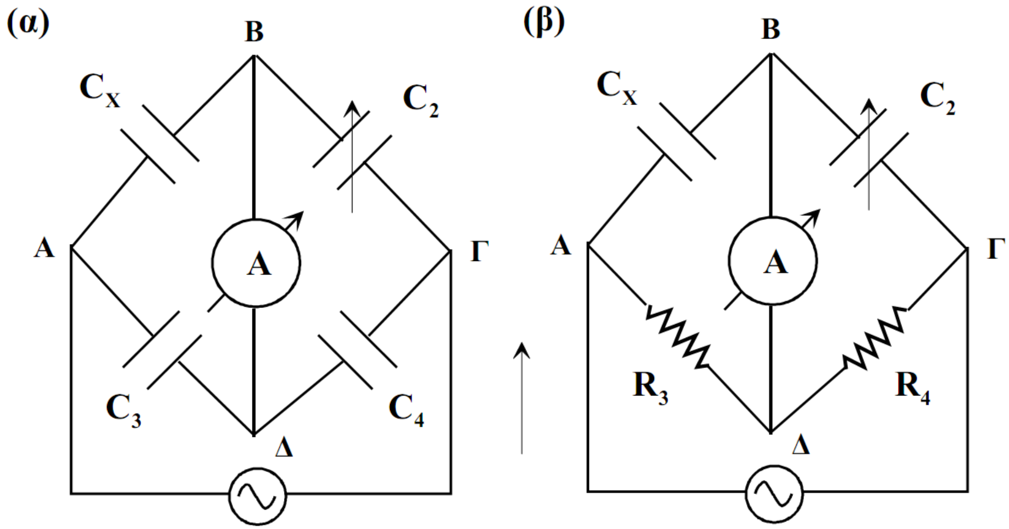
Μέτρηση Με Σύγκριση



Σχήμα 11.3. Υπολογισμός χωρητικότητας με σύγκριση

$$\frac{Q_X}{Q_\Pi} = \frac{C_X}{C_\Pi} = \frac{\theta_X}{\theta_\Pi} \Rightarrow C_X = C_\Pi \frac{\theta_X}{\theta_\Pi}$$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας



Σχήμα 11.4 Μέτρηση χωρητικότητας με γέφυρα

$$\frac{V_{AB}}{V_{B\Gamma}} = \frac{V_{A\Delta}}{V_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow \frac{I_{AB}Z_X}{I_{B\Gamma}Z_3} = \frac{I_{A\Delta}Z_2}{I_{\Gamma\Delta}Z_4} \Rightarrow \frac{-j/\omega C_X}{-j/\omega C_3} = \frac{-j/\omega C_2}{-j/\omega C_4} \Rightarrow$$

$$C_X = C_2 \frac{C_3}{C_4}$$

$$C_X = C_2 \frac{R_4}{R_3}$$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας

1) Αν σε ένα κύκλωμα η τάση και το ρεύμα δίνονται από τις σχέσεις:

$$V=311\eta\mu(2500t+170°),\ I=15.5\eta\mu(2500t-145°)$$

2) Σε κύκλωμα RC έχουμε $R=20\Omega$, $C=5\ \mu F$ και $\varphi=-80°$. Να βρεθεί το ω.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

$I = Ae^{i\omega t}, V = Be^{i(\omega t + \vartheta)}$

$$\frac{V}{I} = \frac{B}{A}e^{i\vartheta} = \frac{B}{A}(\cos\vartheta + j\sin\vartheta) = \overset{\substack{\alpha\nu\tau\iota\sigma\tau\alpha\sigma\eta \\ resis\tan ce}}{\alpha} + j\overset{\substack{\alpha\nu\tau\iota\delta\rho\alpha\sigma\eta \\ reac\tan ce}}{\beta} = \varepsilon\mu\pi\varepsilon\delta\eta\sigma\eta\ impedance$$

Αντίσταση πηνίου: 0 Ω

Αντίδραση πηνίου (επαγωγική): $X_L = \omega L$

Αντίσταση πυκνωτή: 0 Ω

Αντίδραση πυκνωτή (χωρητική): $X_c = -\frac{1}{\omega C}$

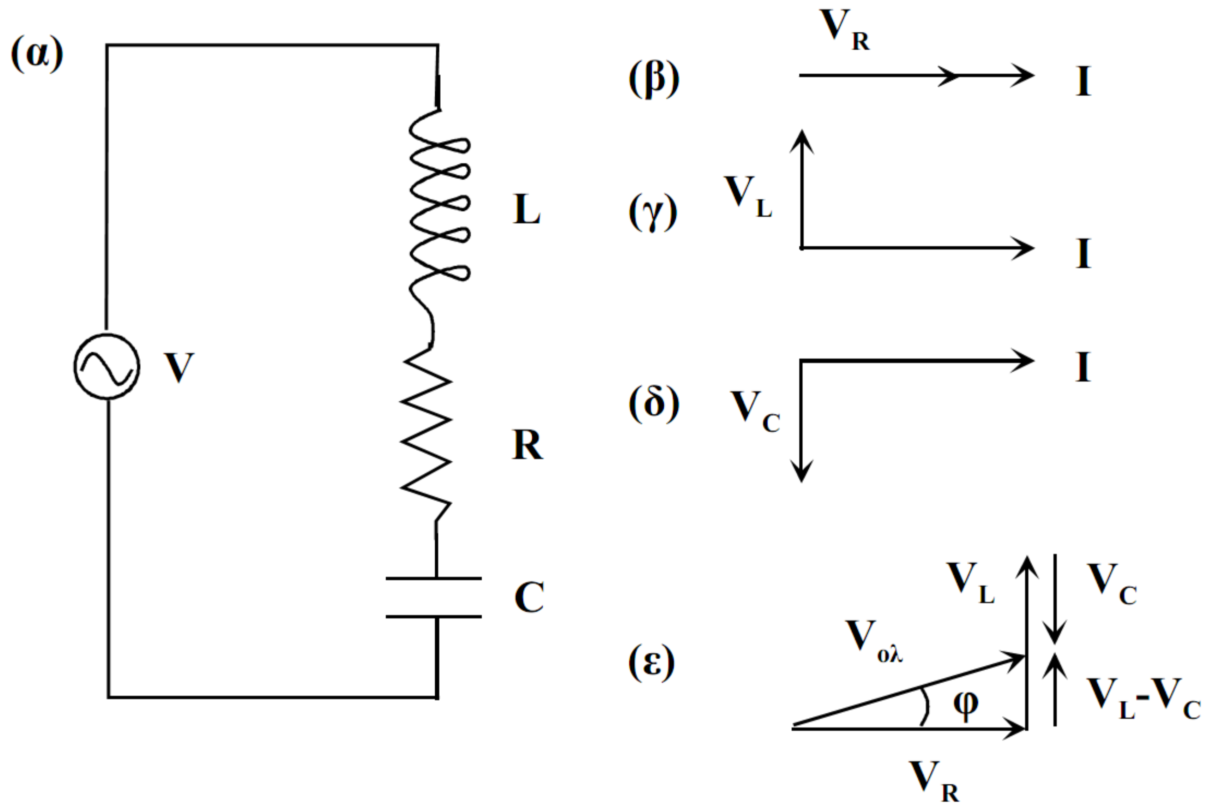
Το μέτρο της εμπέδησης καλείται σύνθετη αντίσταση

Σύνθετη αντίσταση πηνίου : $\|j\omega L\| = \sqrt{\omega^2 L^2} = \omega L$

Σύνθετη αντίσταση πυκνωτή : $\left\|-j\frac{1}{\omega C}\right\| = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{1}{\omega C}$

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

Κύκλωμα RLC σε σειρά

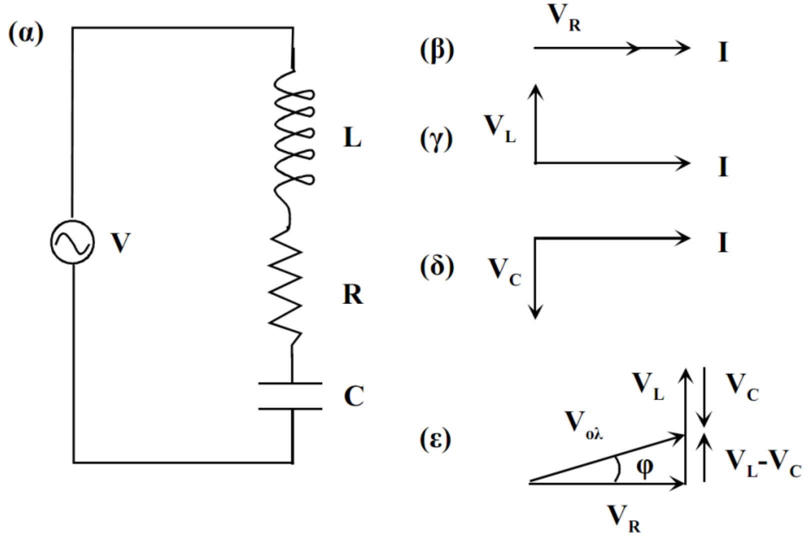


Σχήμα 12.1 Κύκλωμα RLC σε σειρά

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

Κύκλωμα RLC σε σειρά

- πηνίο L,
- ωμική αντίσταση R
- χωρητικότητα C
- πηγή τροφοδοσίας $V=V_0e^{j\omega t}$



Σχήμα 12.1 Κύκλωμα RLC σε σειρά

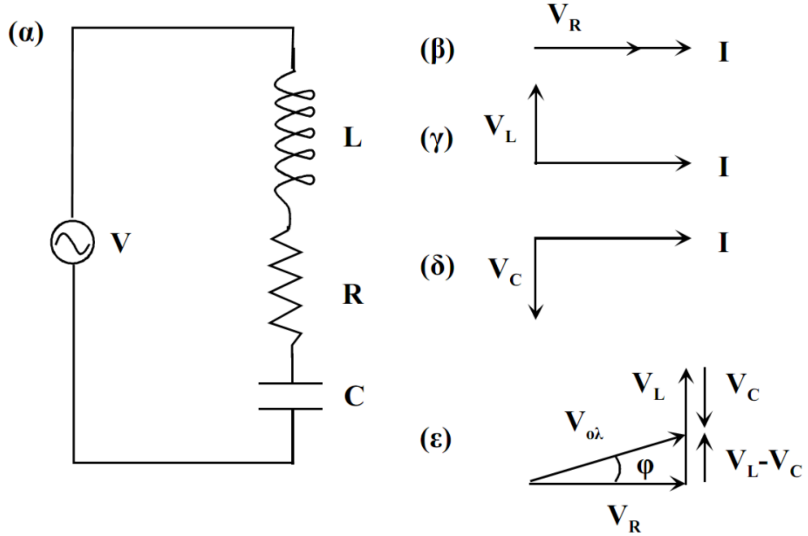
Αν υποθέσουμε ότι το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα I:

- η τάση στα άκρα της ωμικής αντίστασης **θα είναι συμφασική** με το ρεύμα
- η τάση στα άκρα της αυτεπαγωγής **θα προηγείται του ρεύματος κατά π/2**
- η τάση στα άκρα της χωρητικότητας **θα καθυστερεί σε σχέση με το ρεύμα κατά π/2**

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

Κύκλωμα RLC σε σειρά

- πηνίο L,
- ωμική αντίσταση R
- χωρητικότητα C
- πηγή τροφοδοσίας $V=V_0e^{j\omega t}$



Σχήμα 12.1 Κύκλωμα RLC σε σειρά

Αν το ρεύμα I περιγράφεται από την εξίσωση $I=I_0e^{j\omega t}$, ο νόμος τάσεων Kirchhoff

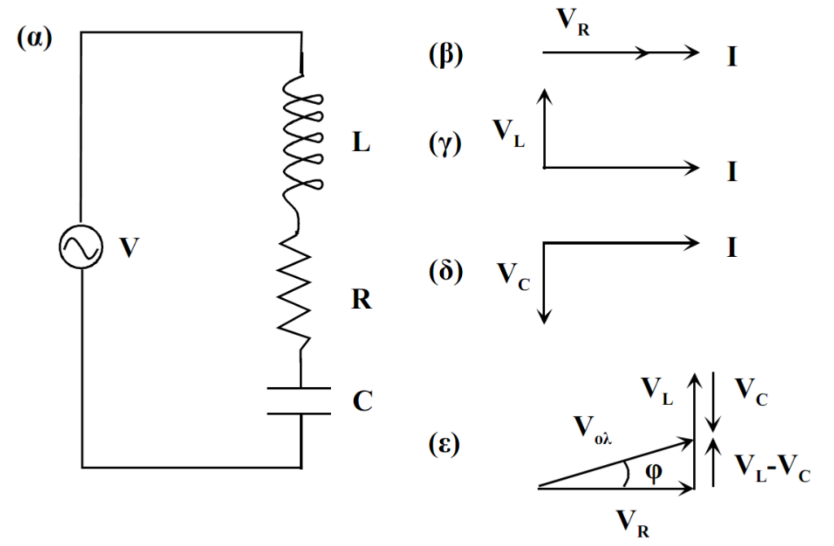
$$V_0e^{j\omega t}-L\frac{di}{dt}-\frac{1}{C}\int idt=iR \Rightarrow V_0e^{j\omega t}-j\omega LI_0e^{j\omega t}-\frac{1}{j\omega C}I_0e^{j\omega t}=RI_0e^{j\omega t}$$

$$I_0=\frac{V_0}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$$

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

Κύκλωμα RLC σε σειρά

- πηνίο L,
- ωμική αντίσταση R
- χωρητικότητα C
- πηγή τροφοδοσίας $V=V_0e^{j\omega t}$



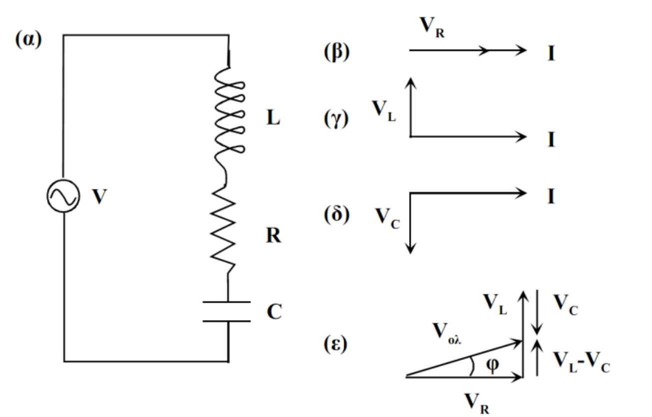
$$V_0e^{j\omega t} - L\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\int idt = iR \Rightarrow V_0e^{j\omega t} - j\omega LI_0e^{j\omega t} - \frac{1}{i\omega C}I_0e^{j\omega t} = RI_0e^{j\omega t}$$

$$I_0 = \frac{V_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$I = \frac{V_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}e^{j\omega t-\varphi}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός



Σχήμα 12.1 Κύκλωμα RLC σε σειρά

Κύκλωμα RLC σε σειρά

$$I_0 = \frac{V_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$I = \frac{V_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j\omega t - \varphi} \qquad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

Στο κύκλωμα RLC, η εμπέδηση του κυκλώματος είναι συνδυασμός της **ωμικής, της επαγωγικής και της χωρητικής αντίστασης** και δίνεται από τη σχέση

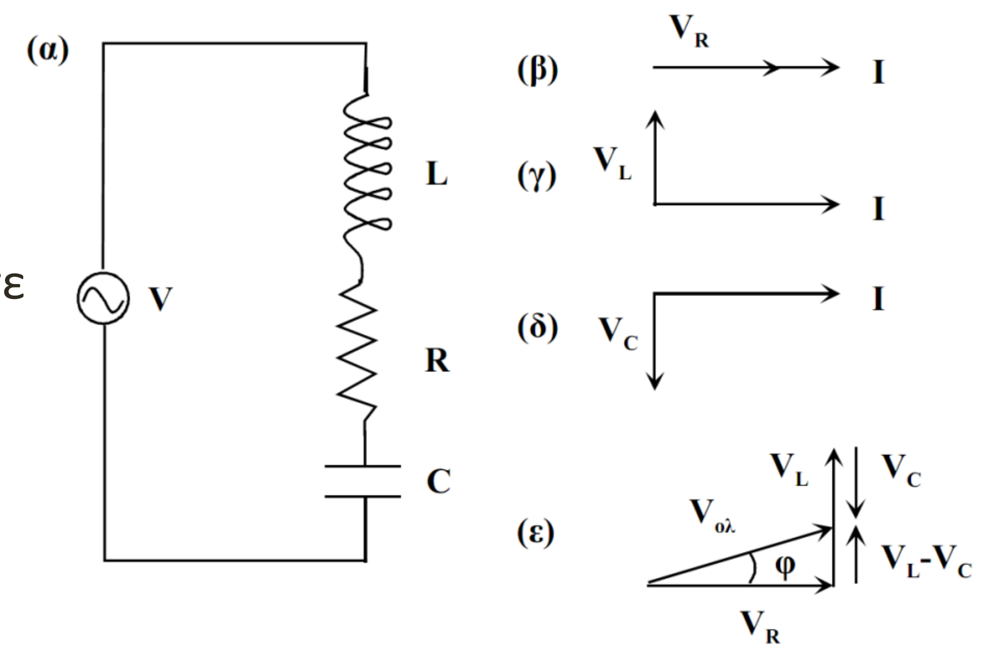
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$ η μιγαδική μορφή είναι $z=R+j(\omega L-1/\omega C)$

Επομένως, αν η επαγωγική αντίσταση είναι μεγαλύτερη από την χωρητική, η τάση θα προηγείται του ρεύματος και το κύκλωμα θα έχει επαγωγική συμπεριφορά ενώ θα έχει χωρητική συμπεριφορά για μεγαλύτερη χωρητική αντίσταση.

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

Κύκλωμα RLC σε σειρά

Ένας άλλος μαθηματικός τρόπος προσέγγισης του κυκλώματος RLC σε σειρά είναι **με διανύσματα**



Σχήμα 12.1 Κύκλωμα RLC σε σειρά

η ολική τάση δίνεται από τη σχέση:

$$V_{ολ} = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

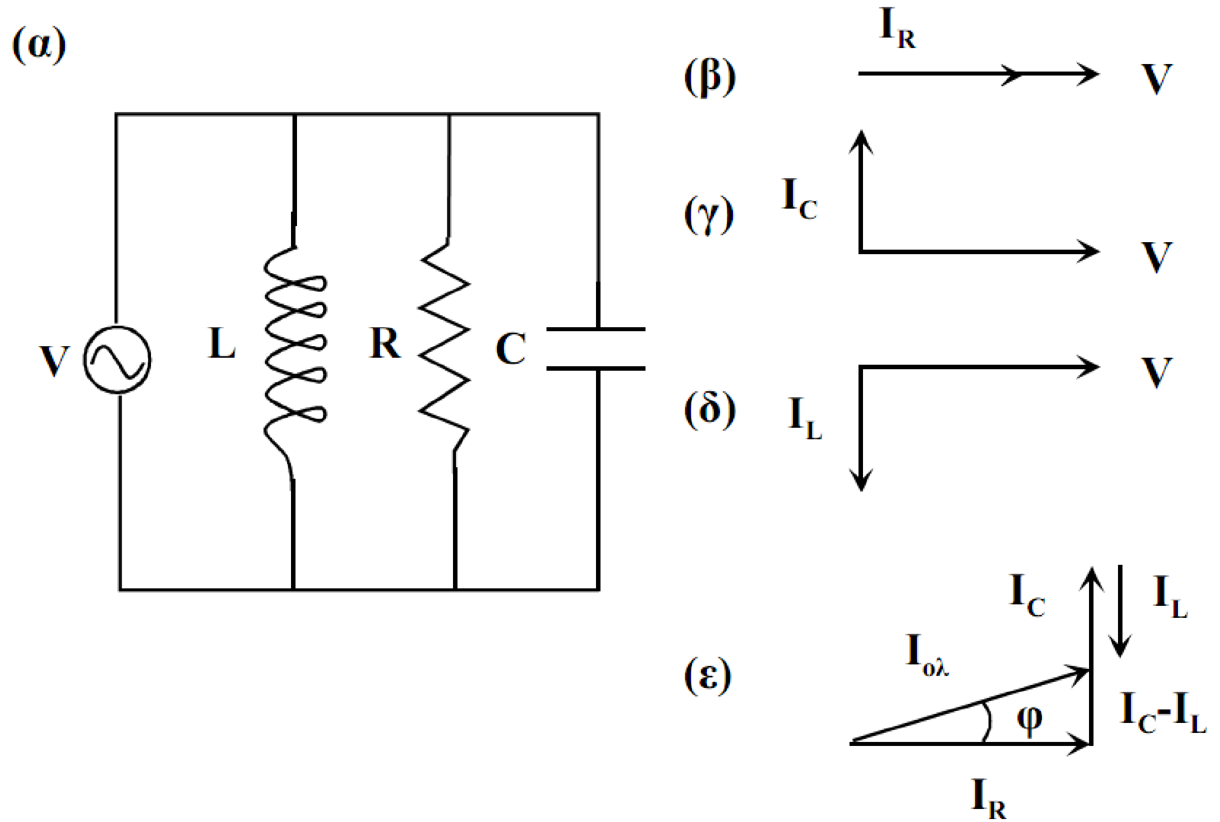
$V_{ολ}$=Iz, V_R=IR, V_L=Ix_L και V_C=Ix_C,

$$Iz = \sqrt{(IR)^2 + (Ix_L - Ix_C)^2} \Rightarrow z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

$$εφφ = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

Κύκλωμα RLC παράλληλα

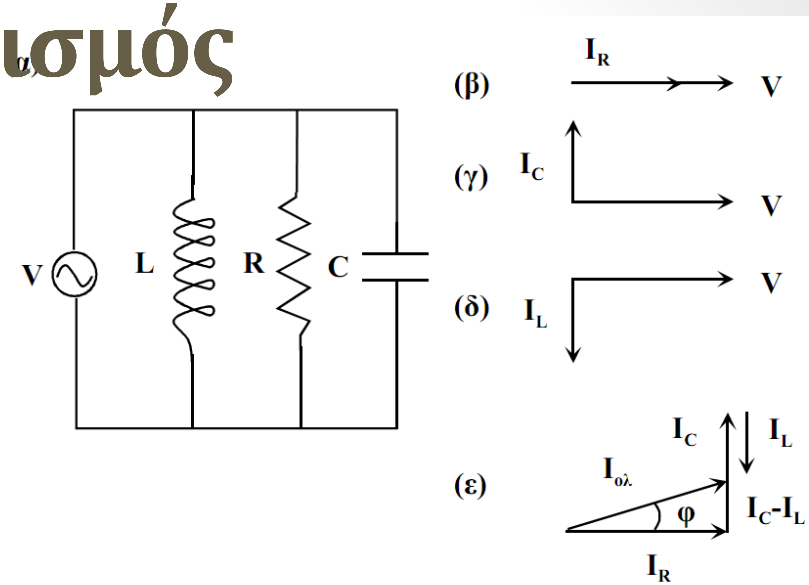


Σχήμα 12.2 Κύκλωμα RLC σε σειρά

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

Κύκλωμα RLC παράλληλα

- πηνίο L,
- ωμική αντίσταση R
- χωρητικότητα C
- πηγή τροφοδοσίας $V=V_0e^{j\omega t}$



Σχήμα 12.2 Κύκλωμα RLC σε σειρά

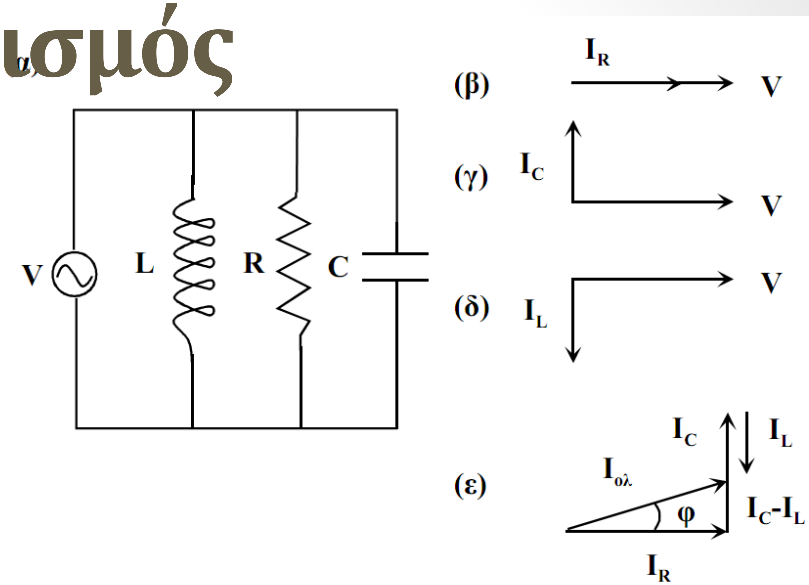
$$I_R=\frac{V_0}{R}e^{0} \qquad I_L=\frac{V_0}{\omega L}e^{-j\pi/2} \qquad I_C=\omega C V_0 e^{j\pi/2}$$

$$I_{o\lambda}=I_R+I_L+I_C=\frac{V_0}{R}e^{0}+\frac{V_0}{\omega L}e^{-j\pi/2}+\omega C V_0 e^{j\pi/2}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{I_{o\lambda}}{V_0}=\frac{1}{R}-j\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)=\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)^2}\,e^{-j\varphi}$$

$$\frac{1}{z}=\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)^2} \quad . \quad \varepsilon\varphi\varphi=\frac{\omega C-1/\omega L}{1/R}$$

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός



Σχήμα 12.2 Κύκλωμα RLC σε σειρά

Κύκλωμα RLC παράλληλα

- πηνίο L,
- ωμική αντίσταση R
- χωρητικότητα C
- πηγή τροφοδοσίας $V=V_0e^{j\omega t}$

$$\frac{1}{z}=\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)^2}\ .\quad \varepsilon\varphi\varphi=\frac{\omega C-1/\omega L}{1/R}$$

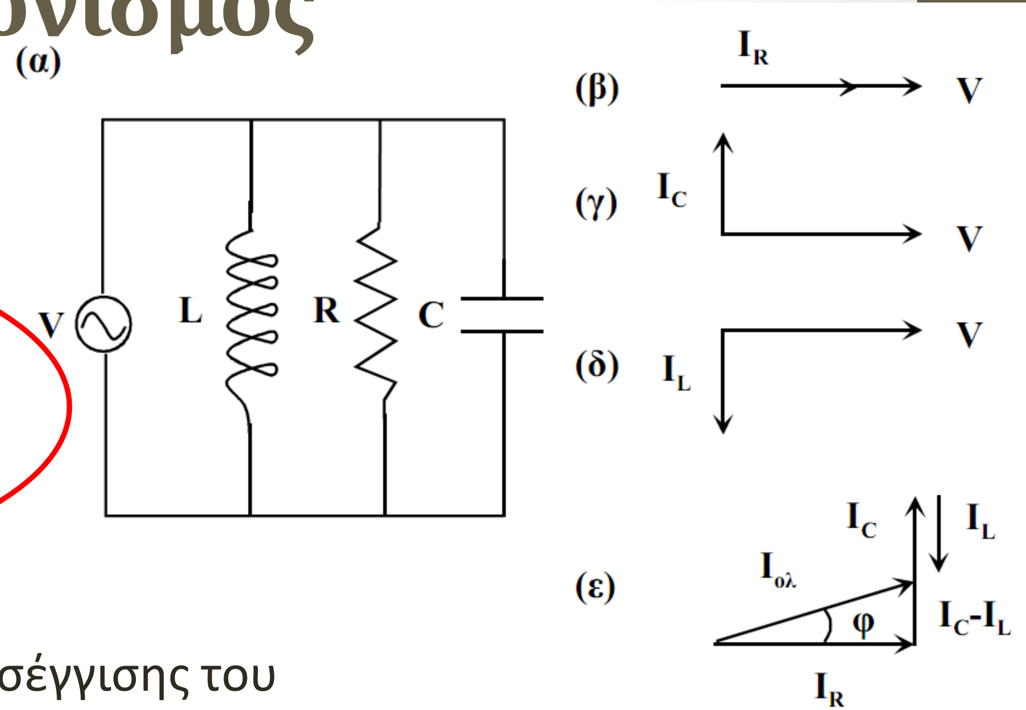
αν η επαγωγική αντίσταση είναι μεγαλύτερη από την χωρητική, τότε η διαφορά φάσης είναι θα θετική (δηλαδή το ρεύμα θα προηγείται της τάσης) και το κύκλωμα εμφανίζει θα χωρητική συμπεριφορά.

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

Κύκλωμα RLC παράλληλα

$$\frac{1}{z}=\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)^2}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}$$



Σχήμα 12.2 Κύκλωμα RLC σε σειρά

Ένας άλλος μαθηματικός τρόπος προσέγγισης του κυκλώματος RLC παράλληλα είναι **με διανύσματα**

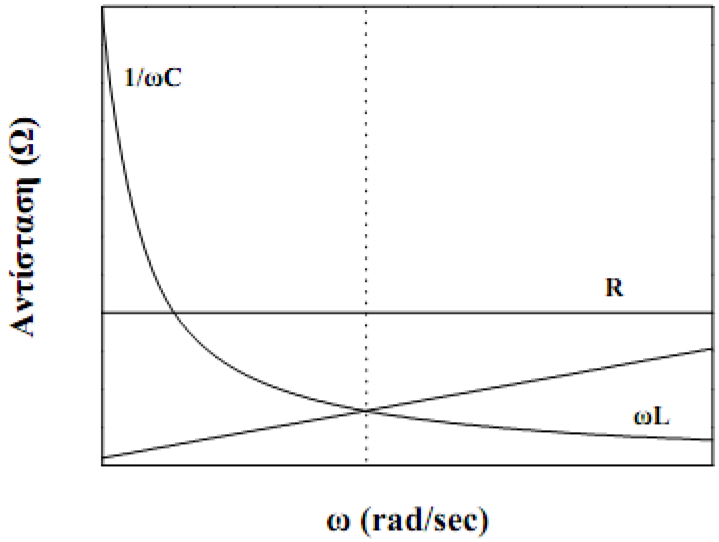
$$I_{ο\lambda}=\sqrt{I_R^2+\left(I_L-I_C\right)^2}$$

$I_{ο\lambda}=V/z$, $I_R=V/R$, $I_L=V/x_L$ και $I_C=Vx_C$,

$$\frac{V}{z}=\sqrt{\left(\frac{V}{R}\right)^2+\left(\frac{V}{\omega L}-V\omega C\right)^2}\Rightarrow\frac{1}{z}=\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)^2}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{I_C-I_L}{I_R}=\frac{1/\omega L-\omega C}{1/R}$$

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

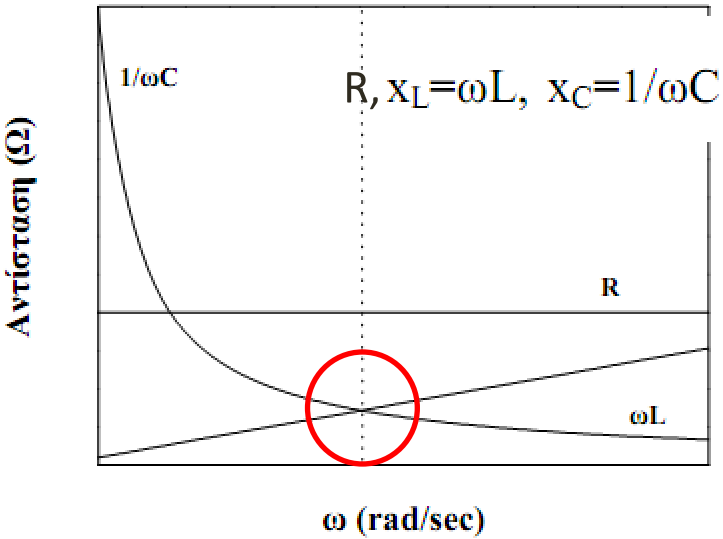


Σχήμα 12.3 Μεταβολή της αντίστασης με τη συχνότητα

R, $x_L=\omega L$, $x_C=1/\omega C$

Η ωμική αντίσταση δεν μεταβάλλεται με την γωνιακή συχνότητα, οι αντίστοιχες επαγωγική και χωρητική εξαρτώνται από την γωνιακή συχνότητα του εναλλασσομένου. Η μεν πρώτη αυξάνεται γραμμικά με την γωνιακή συχνότητα ενώ η άλλη ελαττώνεται υπερβολικά

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός



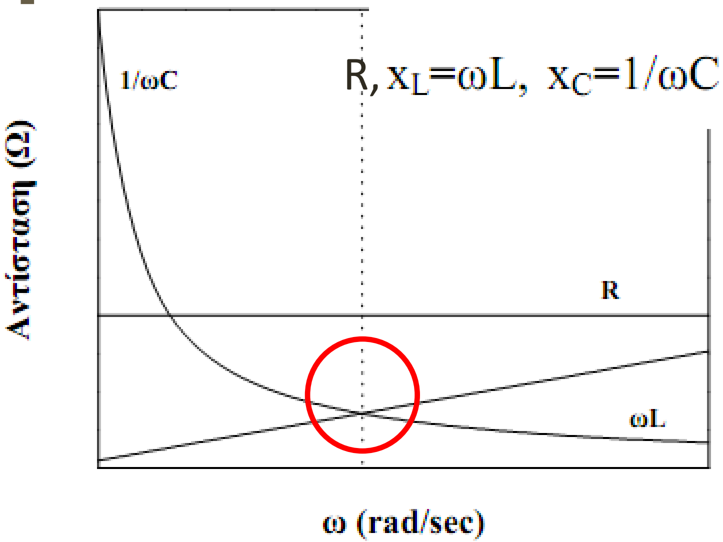
Σχήμα 12.3 Μεταβολή της αντίστασης με τη συχνότητα

Σε κάποια γωνιακή συχνότητα ω0, η τιμή των xL and xc θα **εξισώνεται.**

Στη συχνότητα ω0 **η χωρητική και η επαγωγική αντίσταση θα αλληλοεξουδετερώνονται** και το κύκλωμα θα εμφανίζει καθαρή ωμική συμπεριφορά. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **συντονισμός** και η γωνιακή συχνότητα στην οποία εμφανίζεται δίνεται από την εξίσωση:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

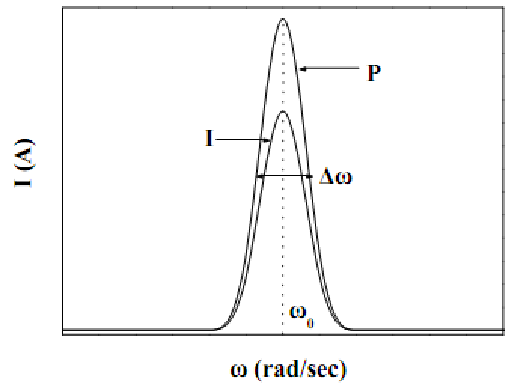


Σχήμα 12.3 Μεταβολή της αντίστασης με τη συχνότητα

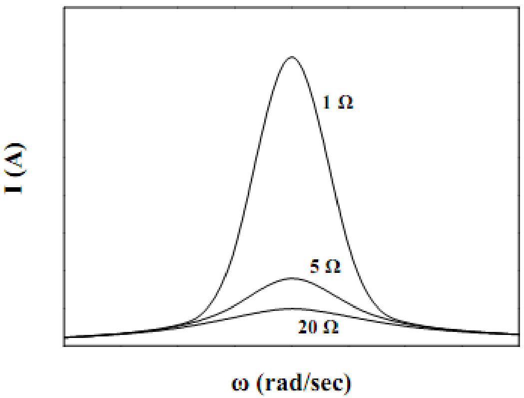
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Στην περίπτωση συντονισμού **σε κύκλωμα RLC σε σειρά**, η εμπέδηση του κυκλώματος γίνεται ελάχιστη και ίση με την ωμική αντίσταση R και η τάση με το ρεύμα είναι συμφασικά. Όπως φαίνεται από το σχήμα 12.3, για γωνιακές συχνότητες μικρότερες από την συχνότητα συντονισμού το κύκλωμα έχει χωρητική συμπεριφορά ενώ για μεγαλύτερες επαγωγική. Λόγω της ελαχιστοποίησης της εμπέδησης, το ρεύμα μεγιστοποιείται και γίνεται ίσο με V/R.

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός



Σχήμα 12.4 Συντονισμός σε κύκλωμα RLC σε σειρά



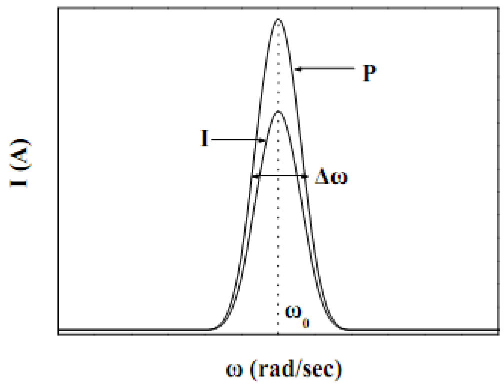
Σχήμα 12.5 Επίδραση της R στο συντονισμό

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

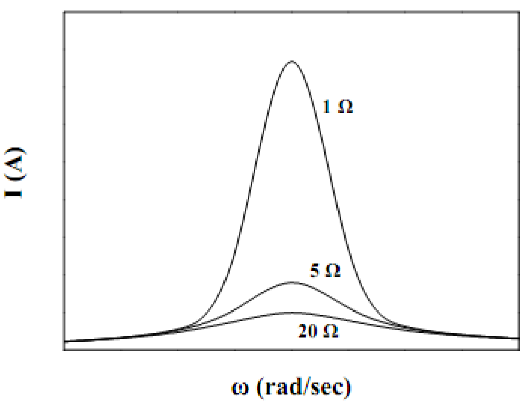
Στο σχήμα 12.4 φαίνεται η καμπύλη συντονισμού για κύκλωμα RLC σε σειρά. Όπως φαίνεται, για κάποια τιμή της κυκλικής συχνότητας **το ρεύμα παρουσιάζει μία ραγδαία αύξηση, μεγιστοποιείται (συντονισμός) και στη συνέχεια ελαττώνεται**. Αν η ωμική αντίσταση γίνει πάρα πολύ μικρή, το ρεύμα γίνεται πολύ μεγάλο (τείνοντας στο άπειρο για R=0) και η καμπύλη συντονισμού πολύ στενή όπως φαίνεται στο σχήμα 12.5. Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζει και η ισχύς του κυκλώματος, όμως η καμπύλη συντονισμού είναι πιο στενή λόγω της τετραγωνικής εξάρτησης της ισχύος από το ρεύμα (σχήμα 12.4).

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Σχήμα 12.4 Συντονισμός σε κύκλωμα RLC σε σειρά



Σχήμα 12.5 Επίδραση της R στο συντονισμό

Αν στην καμπύλη συντονισμού της ισχύος ορίσουμε το πλάτος στο μισό της ισχύος Δω, λόγος Q=ω0/Δω δίνει το συντελεστή ποιότητας του συντονισμού. Ο συντελεστής αυτός χαρακτηρίζει την οξύτητα του συντονισμού και στενός συντονισμός συνεπάγεται μεγάλη τιμή του Q. Η τιμή του Q δίνεται επίσης από τις σχέσεις:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι κατά τον συντονισμό σε σειρά εμφανίζονται φαινόμενα υπέρτασης, δηλαδή, η τάση στα άκρα του πυκνωτή και του πηνίου μπορεί να υπερβεί κατά πολύ την τάση του δικτύου. Ο λόγος της τάσης του πυκνωτή ή του πηνίου προς την τάση τροφοδοσίας ισούται με το συντελεστή ποιότητας, ο οποίος ονομάζεται και συντελεστής υπέρτασης.

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

Αντίστοιχα, κατά τον συντονισμό κυκλώματος RLC παράλληλα, η εμπέδηση του κυκλώματος γίνεται μέγιστη (για σύνδεση αντιστάσεων παράλληλα, η ολική αντίσταση είναι σε όλες τις περιπτώσεις μικρότερη από την μικρότερη επιμέρους αντίσταση, άρα όταν z=R έχουμε την μέγιστη τιμή αντίστασης) και ίση με την ωμική αντίσταση R και η τάση με το ρεύμα είναι συμφασικά. Λόγω της μεγιστοποίησης της εμπέδησης, το ρεύμα ελαχιστοποιείται και αν δεν υπάρχει ωμική αντίσταση (κύκλωμα LC) το ολικό ρεύμα μηδενίζεται. Αυτό σημαίνει ότι σε κύκλωμα LC σε συντονισμό, αν και στο πηνίο και τον πυκνωτή κυκλοφορούν ρεύματα που μπορεί να είναι ιδιαίτερα ισχυρά (φαινόμενα υπερέντασης), αυτά αλληλοεξουδετερώνονται και στο κύκλωμα το ολικό ρεύμα είναι μηδέν. Πρακτικά, η ενέργεια στο κύκλωμα κάνει μία ταλάντωση: από ηλεκτρική ενέργεια στον πυκνωτή μετατρέπεται σε μαγνητική στο πηνίο και αντίστροφα, φαινόμενο το οποίο οδηγεί σε εκπομπή ΗΜ ακτινοβολίας (κεραίες). Τέλος, ας σημειωθεί ότι ο συντελεστής ποιότητας δίνεται από τις ίδιες εξισώσεις όπως στο συντονισμό σε σειρά (σχέση 12.16), ο οποίος τώρα ονομάζεται και συντελεστής υπερέντασης.

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

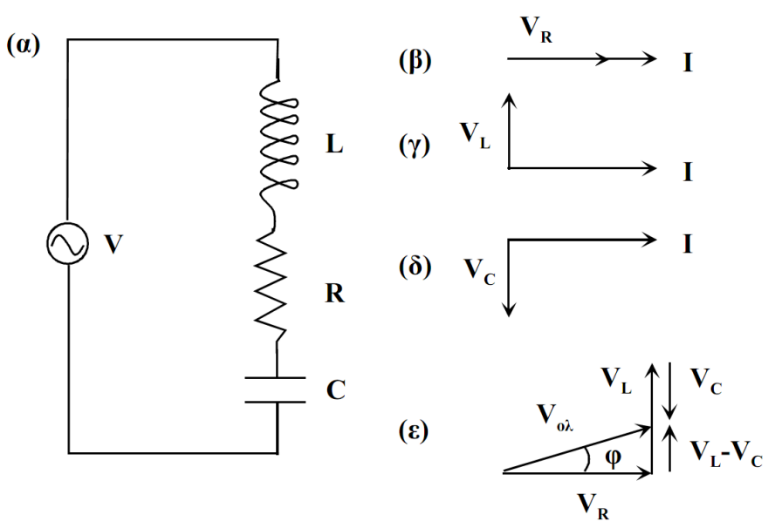
Εφαρμογές του συντονισμού

Ο συντονισμός σε σειρά και παράλληλα εμφανίζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε διάφορες εφαρμογές όπου απαιτείται είτε μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση του ρεύματος. Μεγιστοποίηση του ρεύματος μέσω συντονισμού σε σειρά απαιτείται συνήθως σε δέκτες ΗΜ ακτινοβολίας (π.χ. ραδιόφωνα) όπου ένας οξύς συντονισμός επιτρέπει την καλή λήψη στην συχνότητα συντονισμού ενώ ταυτόχρονα περιορίζει την λήψη σε γειτονικές συχνότητες. Σαν παράδειγμα, τιμές του συντελεστή ποιότητας μεγαλύτερες από 103 θεωρούνται κατάλληλες για καλή λήψη σε ραδιοφωνικές συχνότητες.

Αντίστοιχα, η ελαχιστοποίηση του ρεύματος μέσω του συντονισμού παράλληλα οδηγεί στην ανάπτυξη φίλτρων. Η λογική της λειτουργίας ενός τέτοιου φίλτρου είναι ότι τα σήματα με συχνότητα ίση με τη συχνότητα συντονισμού μηδενίζονται.

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

Πηνίο RL=10 Ω, L=0.1 H συνδέεται σε σειρά με πυκνωτή 200 μF και το κύκλωμα τροφοδοτείται με 220 V/ 50 Hz. Να βρεθούν: το ρεύμα, η τάση του πηνίου, η τάση του πυκνωτή, η συχνότητα συντονισμού, το ρεύμα σε συντονισμό και η τάση πηνίου/πυκνωτή σε συντονισμό.



Σχήμα 12.1 Κύκλωμα RLC σε σειρά

$$V_{ολ} = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$V_{ολ}=Iz$, $V_R=IR$, $V_L=Ix_L$ και $V_C=Ix_C$,

$$Iz = \sqrt{(IR)^2 + (Ix_L - Ix_C)^2} \Rightarrow z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

$$εφφ = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$