

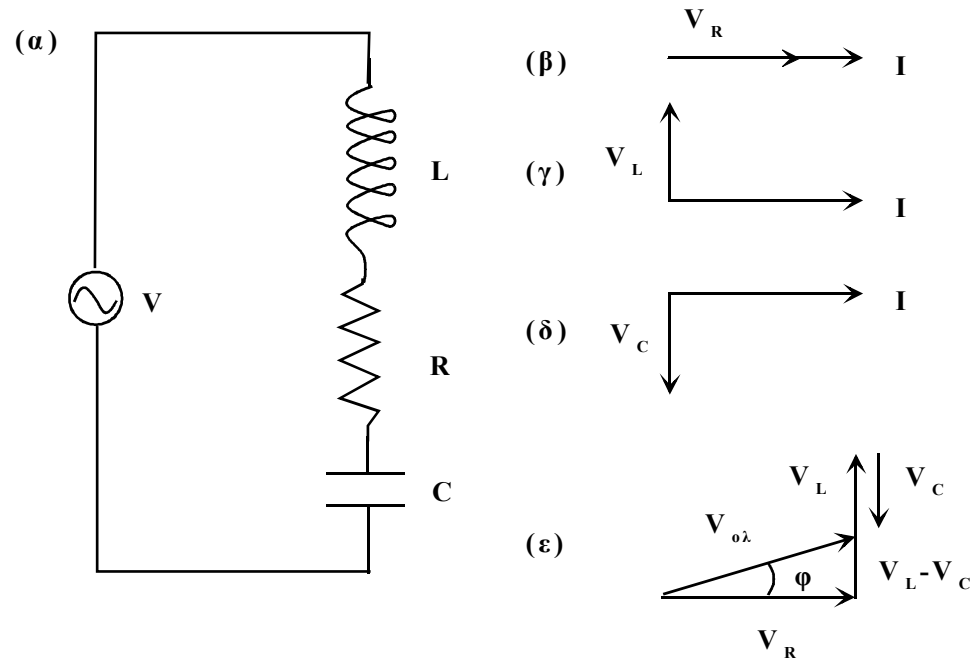


**Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών &  
Μηχανικών Υπολογιστών  
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο**

# Διαφάνειες Εργαστηρίου Ηλεκτρικές Μετρήσεις

Άννα Τασολάμπρου

# Συντονισμός Σειράς



Συνολική Τάση

$$V_{ολ, \text{rms}} = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

$$V_{ολ} = IZ$$

$$V_R = IR$$

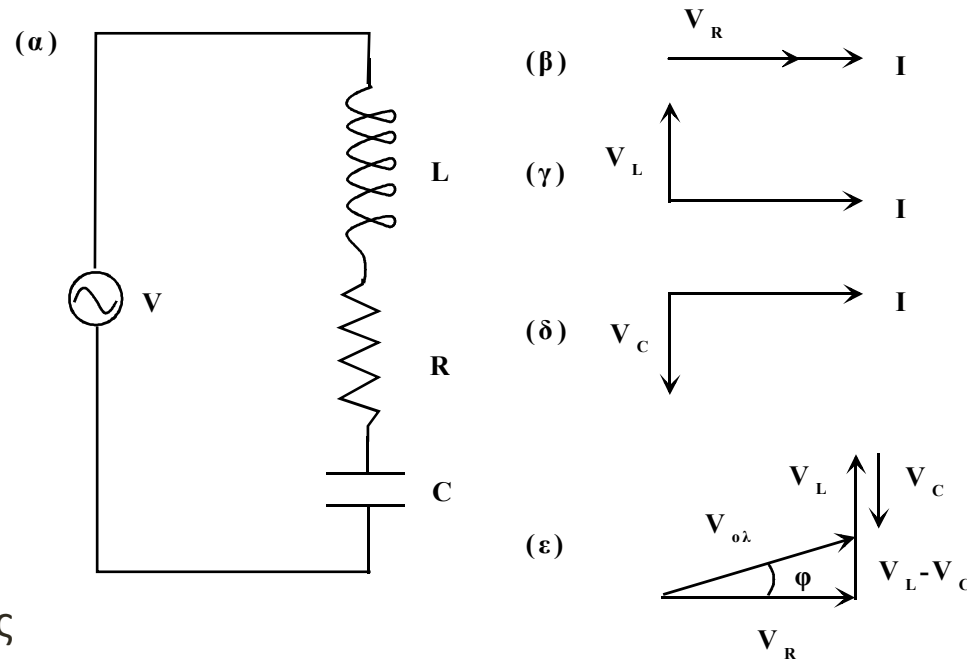
$$V_L = IX_L$$

$$V_C = IX_C$$

$$IZ = \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2} \Rightarrow$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow$$

# Συντονισμός Σειράς



Ενεργή τιμή Ρεύματος

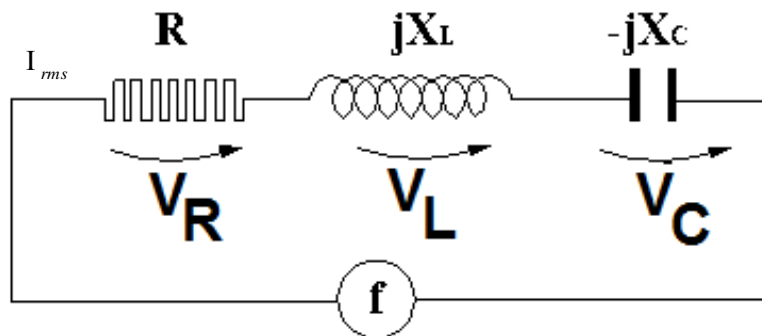
$$I_{rms} = |I_{rms}| = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{V_{rms}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Διαφορά φάσης από την πηγή

$$\varphi = \tan^{-1} \left[ \frac{V_L - V_C}{V_R} \right] = \tan^{-1} \left[ \frac{X_L - X_C}{R} \right]$$

Όταν  $X_L = X_C$  τότε έχουμε συντονισμό

# Συντονισμός Σειράς



$$V_{rms} \angle \phi_0$$

Κατά τον συντονισμό έχουμε :  $X_L = X_C$  ή  $2\pi f_0 L = \frac{1}{2\pi f_0 C}$

Η συχνότητα συντονισμού είναι :  $f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$

Η τάση σε κάθε παθητικό στοιχείο του κυκλώματος είναι:

$$V_{R_{rms}} = R \cdot I_{rms} = \frac{V_{rms} R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

$$V_{L_{rms}} = I_{rms} X_L = \frac{V_{rms} 2\pi f L}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

$$V_{C_{rms}} = I_{rms} X_C = \frac{V_{rms} / 2\pi f C}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Στον συντονισμό οι τάσεις παίρνουν τις τιμές :

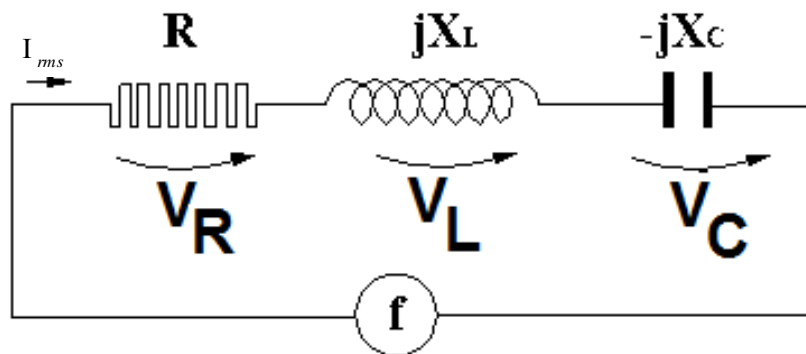
$$V_{R_{rms}} = V_{rms}$$

$$V_{L_{rms}} = \frac{V_{rms} 2\pi f L}{R}$$

$$V_{C_{rms}} = \frac{V_{rms}}{2\pi f RC}$$

# Συντονισμός Σειράς

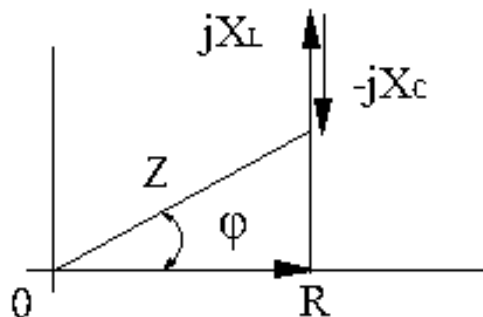
$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$



$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{X_L - X_C}{R} \right]$$

$$V_{rms} \angle \phi_0$$

Σε κύκλωμα RLC έχουμε :



- Για  $f > f_0 \rightarrow X_L > X_C$  και το κύκλωμα συμπεριφέρεται επαγωγικά
- Για  $f < f_0 \rightarrow X_L < X_C$  και το κύκλωμα συμπεριφέρεται χωρητικά
- Για  $f = f_0 \rightarrow X_L = X_C$  και το κύκλωμα συμπεριφέρεται ωμικά
  - ❖ το ρεύμα δε γίνεται μέγιστο και η σύνθετη αντίσταση ελάχιστη

➤ Η συχνότητα συντονισμού είναι ανεξάρτητη από την ωμική αντίσταση του κυκλώματος, εξαρτάται όμως από αυτήν η ένταση του ρεύματος.

# ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ

## Q

- Συντελεστή ποιότητας ονομάζουμε το λόγο της τάσεως  $V_L$  ή  $V_C$  προς την τάση της πηγής στον συντονισμό.

$$Q = \frac{V_L}{V} = \frac{V_C}{V} = \frac{I X_L}{I R} = \frac{I X_C}{I R} = \frac{1}{2 \pi f_o C R} = \frac{2 \pi f_o L}{R}$$

$$Q = \frac{1}{\frac{2 \pi C R}{2 \pi \sqrt{LC}}} = \frac{\sqrt{LC}}{C R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\sqrt{LC}}{\sqrt{C^2}} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{LC}{C^2}} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

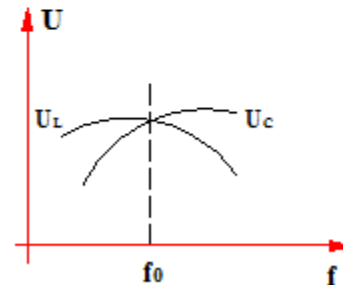
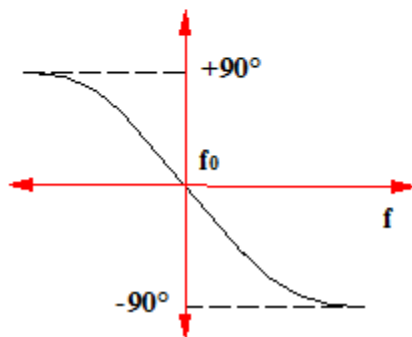
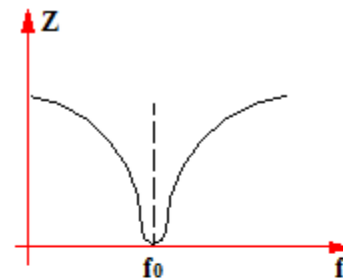
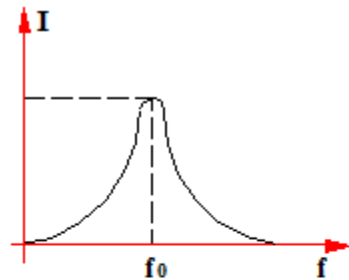
$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

# ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ

## Q

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

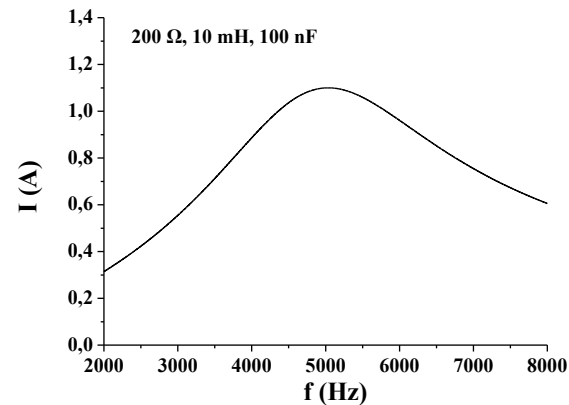
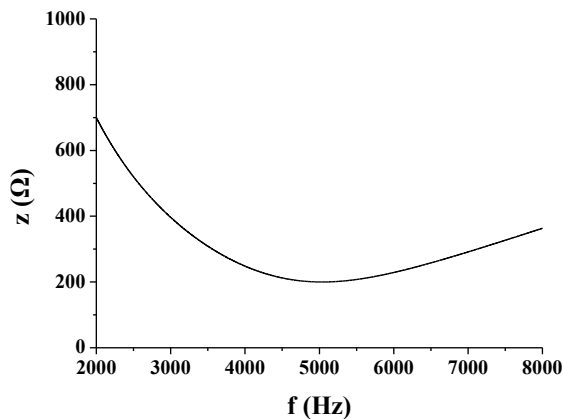
Δίνει μια ένδειξη για την ποιότητα του κυκλώματος, μας δείχνει δηλ. πόσες φορές η τάση στο πηνίο ή στον πυκνωτή είναι μεγαλύτερη από την τάση της πηγής πρακτικά παίρνει τιμές μέχρι και 300 φορές



# ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ

## Q

Ας εξετάσουμε πως μεταβάλλεται σαν συνάρτηση της συχνότητας  $f$  το ρεύμα και η εμπέδηση κυκλώματος σε σειρά, με  $R=200 \Omega$ ,  $L=10 \text{ mH}$ ,  $C=100 \text{ nF}$  που τροφοδοτείται με  $230 \text{ V}_{\text{rms}}$



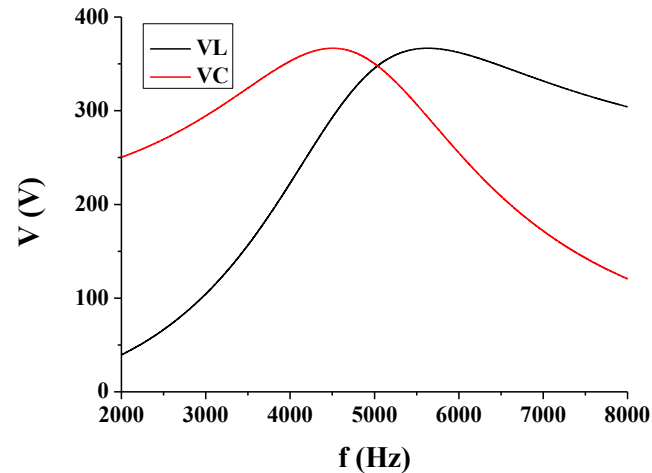
**Βλέπουμε ότι υπάρχει μια συχνότητα όπου η εμπέδηση ελαχιστοποιείται ενώ το ρεύμα μεγιστοποιείται. Αυτή είναι η συχνότητα συντονισμού και δίνεται από:**

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

# ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ

## Q

Ας εξετάσουμε πως μεταβάλλεται σαν συνάρτηση της συχνότητας  $f$  το ρεύμα και η εμπέδηση κυκλώματος σε σειρά, με  $R=200 \Omega$ ,  $L=10 \text{ mF}$ ,  $C=100 \text{ nF}$  που τροφοδοτείται με  $230 \text{ V}_{\text{rms}}$



Για  $f < f_0$ , το κύκλωμα εμφανίζει χωρητική συμπεριφορά

Για  $f > f_0$ , το κύκλωμα εμφανίζει επαγωγική συμπεριφορά

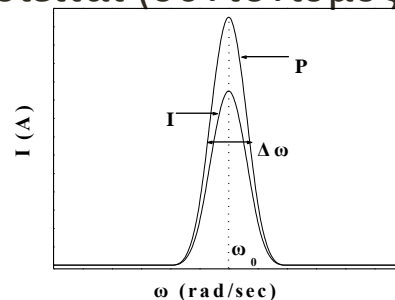
Για  $f = f_0$ , οι δύο τάσεις είναι ίσες και το κύκλωμα είναι ωμικό

Το ρεύμα σε συντονισμό είναι  $I = V/R$  και γίνεται μέγιστο καθώς η εμπέδηση είναι ελάχιστη

# Συντονισμός Σειράς – Συντελεστής Ποιότητας

**Διαφορετικός Υπολογισμός :** Αν το πλάτος στο μισό της καμπύλης ισχύος είναι  $\Delta\omega$ , ο λόγος  $Q=\omega_0/\Delta\omega=f_0/\Delta f$  δίνει το συντελεστή ποιότητας του συντονισμού.

Για σύνδεση σε σειρά, το ρεύμα σαν συνάρτηση της συχνότητας παρουσιάζει αρχικά αύξηση, μετά μεγιστοποιείται (συντονισμός) και στη συνέχεια ελαττώνεται.



Αν η ωμική αντίσταση γίνει πάρα πολύ μικρή, το ρεύμα γίνεται πολύ μεγάλο (τείνοντας στο άπειρο για  $R=0$ ) και η καμπύλη συντονισμού πολύ στενή.

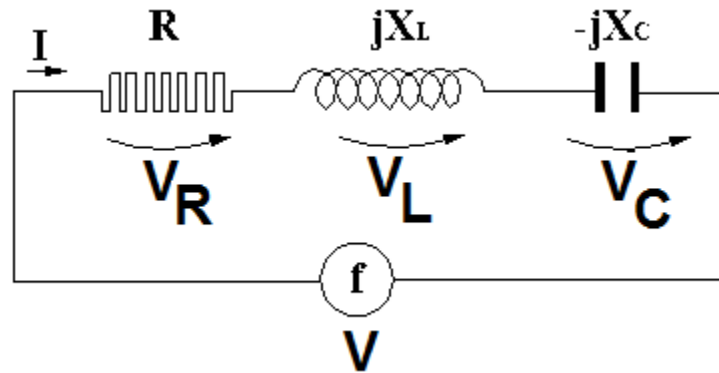
Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζει και η ισχύς του κυκλώματος, όμως η καμπύλη συντονισμού είναι πιο στενή λόγω της τετραγωνικής εξάρτησης της ισχύος από το ρεύμα

Κατά τον συντονισμό σε σειρά εμφανίζονται φαινόμενα υπέρτασης

- η τάση στα άκρα του πυκνωτή και του πηνίου μπορεί να υπερβεί κατά πολύ την τάση του δικτύου
- Ο λόγος της τάσης του πυκνωτή ή του πηνίου προς την τάση τροφοδοσίας ονομάζεται και συντελεστής υπέρτασης.

# Παράδειγμα 1

Σε ένα κύκλωμα RLC σειράς είναι  $R=10 \Omega$  ,  $L=5 \text{ mH}$  ,  $C=12,5 \mu\text{ F}$



Να υπολογισθεί η συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(5 \times 10^{-3})(12,5 \times 10^{-6})}} = 636,94 \text{ Hz}$$

Να υπολογισθεί η επαγωγική και η χωρητική αντίδραση στον συντονισμό καθώς και η σύνθετη αντίσταση.

$$X_L = 2\pi f_0 L = 20 \Omega \quad , \quad X_C = \frac{1}{2\pi f_0 C} = 20 \Omega$$

$$Z = R + j(X_L - X_C) = 10 + j(20 - 20) = 10 \angle 0^\circ \Omega$$

# Παράδειγμα 2

Εάν τροφοδοτήσουμε το κύκλωμα με μια τάση  $V=100\angle 0^0$  να υπολογισθεί η πτώση τάσεως σε κάθε στοιχείο του κυκλώματος για τις συχνότητες  $573 \text{ Hz}$  ,  $700 \text{ Hz}$  , καθώς και για την συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος .

**Για την συχνότητα  $573 \text{ Hz}$  εάν λάβουμε υπόψιν μας ότι :**

$$X_L = 2\pi fL = 18 \Omega \quad , \quad X_C = \frac{1}{2\pi fC} = 22,2 \Omega$$

$$Z = R + j(X_L - X_C) = 10 + j(18 - 22,2) = 10 - j4,2 = 10,8 \angle -22,8^0$$

Το ρεύμα στο κύκλωμα θα είναι:  $I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{100 \angle 0^0}{10,8 \angle -22,8^0} = 9,26 \angle 22,8^0 \text{ A}$

Άρα :

$$V_R = R \cdot I = 10 \times 9,26 \angle 22,8^0 = 92,6 \angle 22,8^0 \text{ V}$$

$$V_L = X_L \cdot I = 9,26 \angle 22,8^0 \times 18 \angle 90^0 = 167 \angle 112,8^0 \text{ V}$$

$$V_C = X_C \cdot I = 9,26 \angle 22,8^0 \times 22,2 \angle -90^0 = 205,6 \angle -67,2^0 \text{ V}$$

# Παράδειγμα 2

Εάν τροφοδοτήσουμε το κύκλωμα με μια τάση  $V=100\angle 0^\circ$  να υπολογισθεί η πτώση τάσεως σε κάθε στοιχείο του κυκλώματος για τις συχνότητες  $573 \text{ Hz}$  ,  $700 \text{ Hz}$  , καθώς και για την συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος .

**Για την συχνότητα  $700 \text{ Hz}$  εάν λάβουμε υπόψιν μας ότι :**

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = 18,2 \ \Omega \qquad X_L = 2\pi fL = 22 \ \Omega \ ,$$

$$Z = R + j(X_L - X_C) = 10 + j(22 - 18,2) = 10 + j3,8 = 10,7 \angle 20,8^\circ$$

Το ρεύμα στο κύκλωμα θα είναι:  $I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{100 \angle 0^\circ}{10,7 \angle 20,8^\circ} = 9,34 \angle -20,8^\circ \text{ A}$

Άρα :

$$V_R = R \cdot I = 9,34 \angle -20,8^\circ \times 10 = 93,4 \angle -20,8^\circ \text{ V}$$

$$V_L = X_L \cdot I = 9,34 \angle -20,8^\circ \times 22 \angle 90^\circ = 206 \angle 69,2^\circ \text{ V}$$

$$V_C = X_C \cdot I = 9,34 \angle -20,8^\circ \times 18,2 \angle -90^\circ = 170 \angle -110,8^\circ \text{ V}$$

# Παράδειγμα 2

Εάν τροφοδοτήσουμε το κύκλωμα με μια τάση  $V=100\angle 0^\circ$  να υπολογισθεί η πτώση τάσεως σε κάθε στοιχείο του κυκλώματος για τις συχνότητες  $573 \text{ Hz}$  ,  $700 \text{ Hz}$  , καθώς και για την συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος .

**Για την συχνότητα συντονισμού εάν λάβουμε υπόψιν μας ότι :**

$$X_L = 2\pi fL = 20 \ \Omega \quad , \quad X_C = \frac{1}{2\pi fC} = 20 \ \Omega$$

$$Z = R + j(X_L - X_C) = 10 + j(20 - 20) = 10 = 10 \angle 0^\circ \ \Omega$$

Το ρεύμα στο κύκλωμα θα είναι:  $I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{100 \angle 0^\circ}{10 \angle 20,8^\circ} = 9,34 \angle -20,8^\circ \ \text{A}$

Άρα :

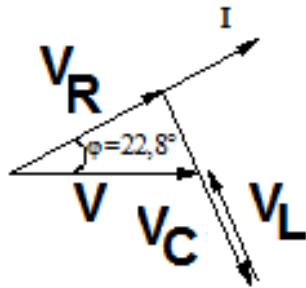
$$V_R = R \cdot I = 9,34 \angle -20,8^\circ \times 10 = 93,4 \angle -20,8^\circ \ \text{V}$$

$$V_L = X_L \cdot I = 9,34 \angle -20,8^\circ \times 22 \angle 90^\circ = 206 \angle 69,2^\circ \ \text{V}$$

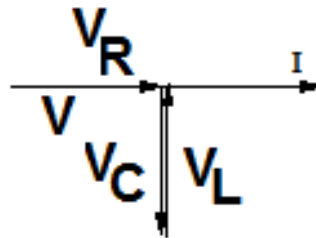
$$V_C = X_C \cdot I = 9,34 \angle -20,8^\circ \times 18,2 \angle -90^\circ = 170 \angle -110,8^\circ \ \text{V}$$

# Παράδειγμα 2

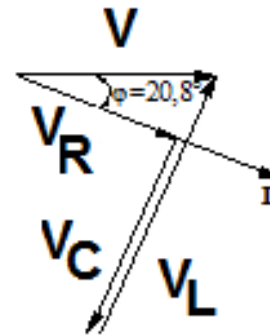
Να σχεδιασθούν τα διανυσματικά διαγράμματα για κάθε περίπτωση :



$f = 573 \text{ Hz}$



$f = 636,94 \text{ Hz}$



$f = 700 \text{ Hz}$

Να υπολογισθεί ο συντελεστής ποιότητας  $Q$  του κυκλώματος :

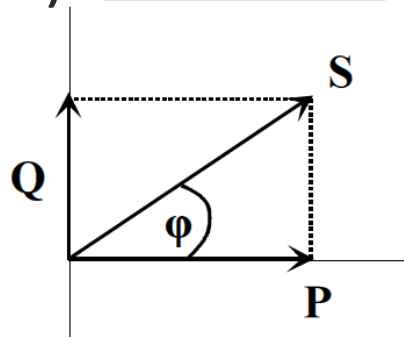
$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Άρα

$$Q = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\frac{5 \times 10^{-3}}{12,5 \times 10^{-6}}} = 2$$

# Ισχύς

- Ισχύς (Watt) στο DC :  $P = V \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{V^2}{R}$
- Ισχύς (Watt) στο AC :  $P = V_{RMS} \cdot I_{RMS} \cdot \cos \varphi$
- Άεργος Ισχύς (Voltage Ampere Reactive-VAR) :  $Q = V_{RMS} \cdot I_{RMS} \cdot \sin \varphi$ 
  - Εκφράζει αποθήκευση/απώλειες ισχύος-ενέργειας στους πυκνωτές και στα πηνία υπό μορφή ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων αντίστοιχα
- Φαινόμενη Ισχύς (VA) :  $|S| = V_{RMS} \cdot I_{RMS}$



$$P = S \cdot \cos \varphi$$

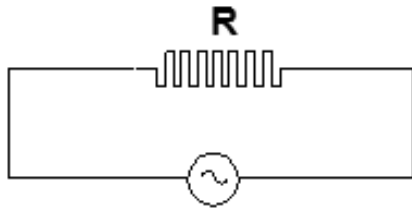
$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$Q = S \cdot \sin \varphi$$

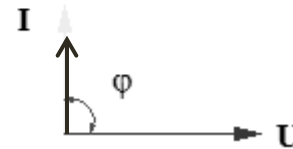
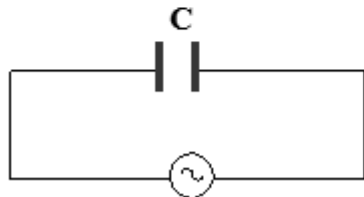
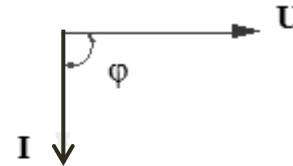
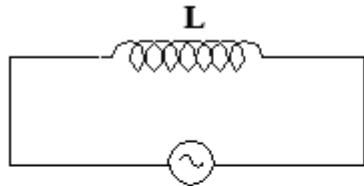
# Συντελεστής Ισχύος

$\cos\phi$  : είναι το συνημίτονο της γωνίας  $\phi$  που σχηματίζεται μεταξύ της τάσεως η οποία εφαρμόζεται στα άκρα του καταναλωτή και της εντάσεως του ρεύματος που διέρχεται από αυτόν.

Για καθαρά ωμικά φορτία   $\cos\phi=1$

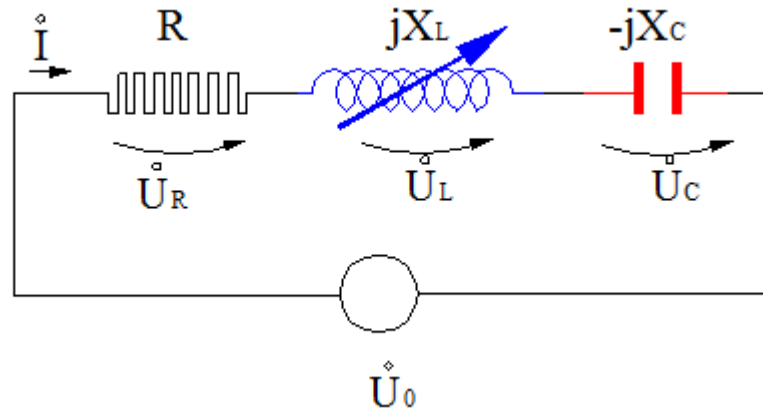


Για καθαρά επαγωγικά ή χωρητικά φορτία   $\cos\phi=0$



# Παράδειγμα 4

Ένα κύκλωμα RLC σειράς με  $R=5\ \Omega$  ,  $C=25\ \mu\text{F}$  και με μεταβλητή  $L$  τροφοδοτείται με τάση  $V=10\angle 0^\circ$  συχνότητας  $1500\ \text{rad/sec}$  . Ρυθμίζουμε την  $L$  έτσι ώστε η τάση στα άκρα της αντίστασης να είναι μέγιστη .



Να υπολογισθεί η τάση στα άκρα κάθε στοιχείου.

Επειδή η μέγιστη τάση στην αντίσταση εμφανίζεται κατά τον συντονισμό δηλαδή το ρεύμα τότε γίνεται μέγιστο

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1500 (25 \times 10^{-6})} = 26,6\ \Omega \Rightarrow X_L = 26,6\ \Omega \quad \text{και} \quad Z = R = 5\angle 0^\circ$$

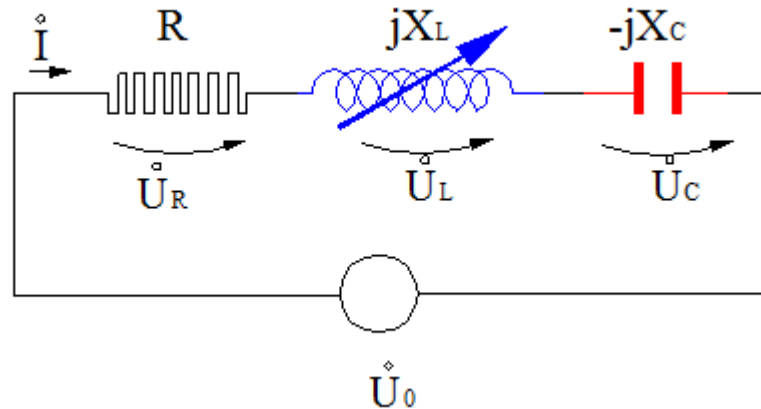
Το ρεύμα στο κύκλωμα θα είναι:

$$I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{rms}}}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{5\angle 0^\circ} = 2\angle 0^\circ\ \text{A}$$

# Παράδειγμα 4

Ένα κύκλωμα RLC σειράς με  $R=5\ \Omega$  ,  $C=25\ \mu\text{F}$  και με μεταβλητή  $L$  τροφοδοτείται με τάση  $V=10\angle 0^\circ$  συχνότητας  $1500\ \text{rad/sec}$  .

Ρυθμίζουμε την  $L$  έτσι ώστε η τάση στα άκρα της αντίστασης να είναι μέγιστη.



Άρα :

$$V_{R_{\text{rms}}} = I_{\text{rms}} R = 2\ \angle 0^\circ \times 5 = 10\ \angle 0^\circ\ \text{V}$$

$$V_{L_{\text{rms}}} = I_{\text{rms}} X_L = 2\ \angle 0^\circ \times 26,6\ \angle 90^\circ = 53,2\ \angle 90^\circ\ \text{V}$$

$$V_{C_{\text{rms}}} = I_{\text{rms}} X_C = 53,2\ \angle 90^\circ\ \text{V}$$

# Παράδειγμα 5

Κατά την μελέτη του συντονισμού σε κύκλωμα RLC σε σειρά που τροφοδοτείται με τάση  $V_{\text{rms}}=100\text{ V}$ , οι μετρήσεις με αμπερόμετρο και βολτόμετρα έδωσαν τα παρακάτω δεδομένα.

$\omega$ (rad/s)	I (A)	$V_L$ (V)	$V_C$ (V)
200	1,04	4,14	103,61
500	3,16	31,62	126,49
750	6,51	97,62	173,54
1000	10,00	200,00	200,00
1500	5,14	154,35	68,60
2000	3,16	126,49	31,62
2500	2,32	115,81	18,53

Ποια είναι η συχνότητα συντονισμού; Ποια είναι η συμπεριφορά του κυκλώματος σε κάθε συχνότητα; Πόσο είναι το R, το L και το C; Συμπληρώστε τον πίνακα ως προς το  $x_L$ ,  $x_C$ , Z και το  $\cos\phi$ .

# Παράδειγμα 5

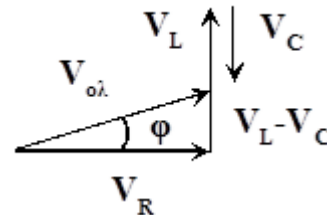
(α) η συχνότητα συντονισμού είναι τα 1000 rad/s

(β) Για  $\omega < 1000$  rad/s έχουμε χωρητική συμπεριφορά ενώ για  $\omega > 1000$  rad/s επαγωγική

(γ) από το συντονισμό έχουμε  $R = V/I = 100/10 = 10 \Omega$ . Επίσης, από τα 500 rad/s, έχουμε  $L = V_L/I\omega = 0,02$  H και  $C = I/V_C\omega = 50 \mu\text{F}$

(δ) Ισχύει:  $x_L = V_L/I$ ,  $x_C = V_C/I$ ,  $z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}$ ,  $\cos\phi = V_R/V_{ολ}$  (όπου  $V_R = IR$ ).

$\omega$ (rad/s)	I (A)	$V_L$ (V)	$V_C$ (V)	$x_L$ ( $\Omega$ )	$x_C$ ( $\Omega$ )	z ( $\omega$ )	cos $\phi$
200	1,04	4,14	103,61	3,98	99,63	99,97	0,10
500	3,16	31,62	126,49	10,01	40,03	95,40	0,32
750	6,51	97,62	173,54	15,00	26,66	76,58	0,65
1000	10	200	200	20,00	20,00	10,00	1,00
1500	5,14	154,35	68,6	30,03	13,35	86,33	0,51
2000	3,16	126,49	31,62	40,03	10,01	95,40	0,32
2500	2,32	115,81	18,53	49,92	7,99	97,79	0,23



# Παράδειγμα 6

Κατά την μελέτη του συντονισμού σε κύκλωμα RLC σε σειρά που τροφοδοτείται με τάση  $V_{rms}=100\text{ V}$ , οι μετρήσεις με αμπερόμετρο και βολτόμετρα έδωσαν τα παρακάτω δεδομένα.

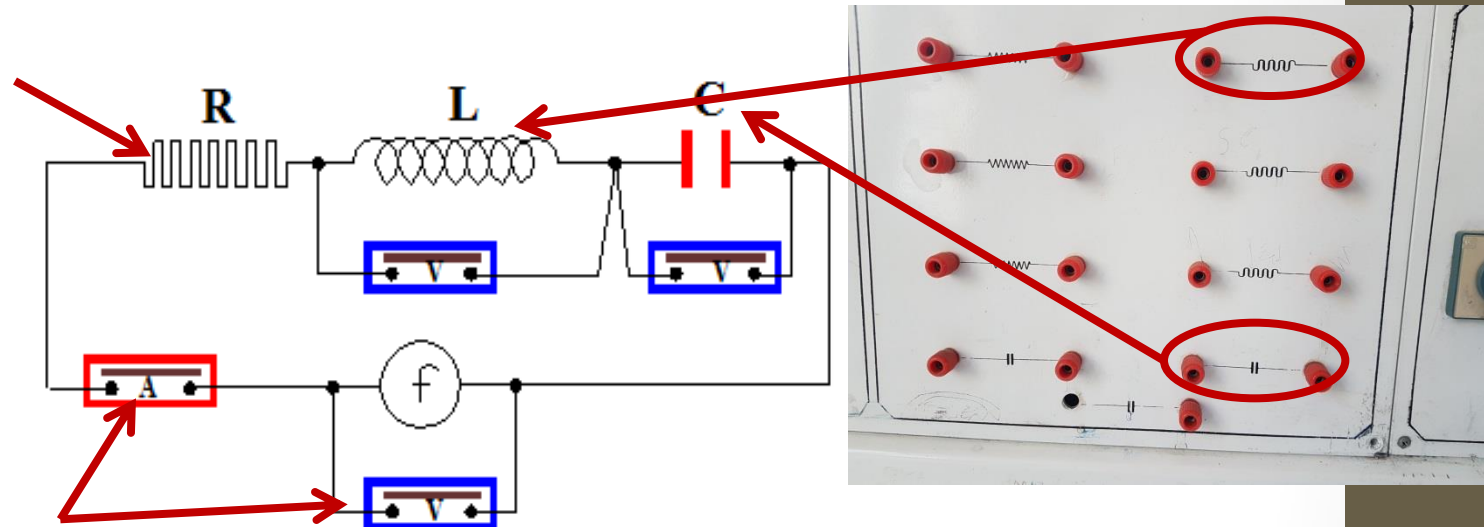
$\omega$ (rad/s)	I (A)	$V_L$ (V)	$V_C$ (V)
200	1,92	3,84	96,00
500	4,00	20,00	80,00
750	4,81	36,08	64,12
1000	5,00	50,00	50,00
1500	4,61	69,15	30,75
2000	4,00	80,00	20,00
2500	3,45	86,25	13,80

Ποια είναι η συχνότητα συντονισμού; Ποια είναι η συμπεριφορά του κυκλώματος σε κάθε συχνότητα; Πόσο είναι το R, το L και το C; Συμπληρώστε τον πίνακα ως προς το  $x_L$ ,  $x_C$ , Z και το  $\cos\phi$ .

# Εργαστηριακή Άσκηση 4

Να πραγματοποιηθεί το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος

- 290Ω Αντίσταση



- Ψηφιακά Πολύμετρα  
1 αμπερόμετρο, 1 βολτόμετρο

Μεταβάλλοντας την συχνότητα από την γεννήτρια σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα στην επόμενη σελίδα να μετρήσετε τα  $V_{ολ}$ ,  $V_L$ ,  $V_C$ ,  $I$  και να καταχωρήσετε τις μετρήσεις σας στον πίνακα μετρήσεων.

\* Χρησιμοποιείτε το μέγιστο πλάτος της τάσης από την γεννήτρια

# Εργαστηριακή Άσκηση 4

ΠΕΡΙΟΧΗ ΡΥΘΜΙΣΗΣ (Hz)	I	V <sub>L</sub>	V <sub>C</sub>	V <sub>ολ</sub>	X <sub>L</sub>	X <sub>C</sub>	Z	φ	COSφ	ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ
10										
20										
50										
75										
100										
150										
200										
250										
500										
1000										
f <sub>0</sub>										

$$V_{L_{rms}} = X_L I_{rms}$$

$$V_{C_{rms}} = X_C \cdot I_{rms}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[ \frac{X_L - X_C}{R} \right]$$

$$X_L = 2\pi fL \quad , \quad X_C = \frac{1}{2\pi fC}$$

# Εργαστηριακή 4

- 3) Να υπολογίσετε :

Την συχνότητα συντονισμού  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Το συντελεστή ποιότητας του κυκλώματος  $Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$

- 4) Να χαραχθούν οι καμπύλες

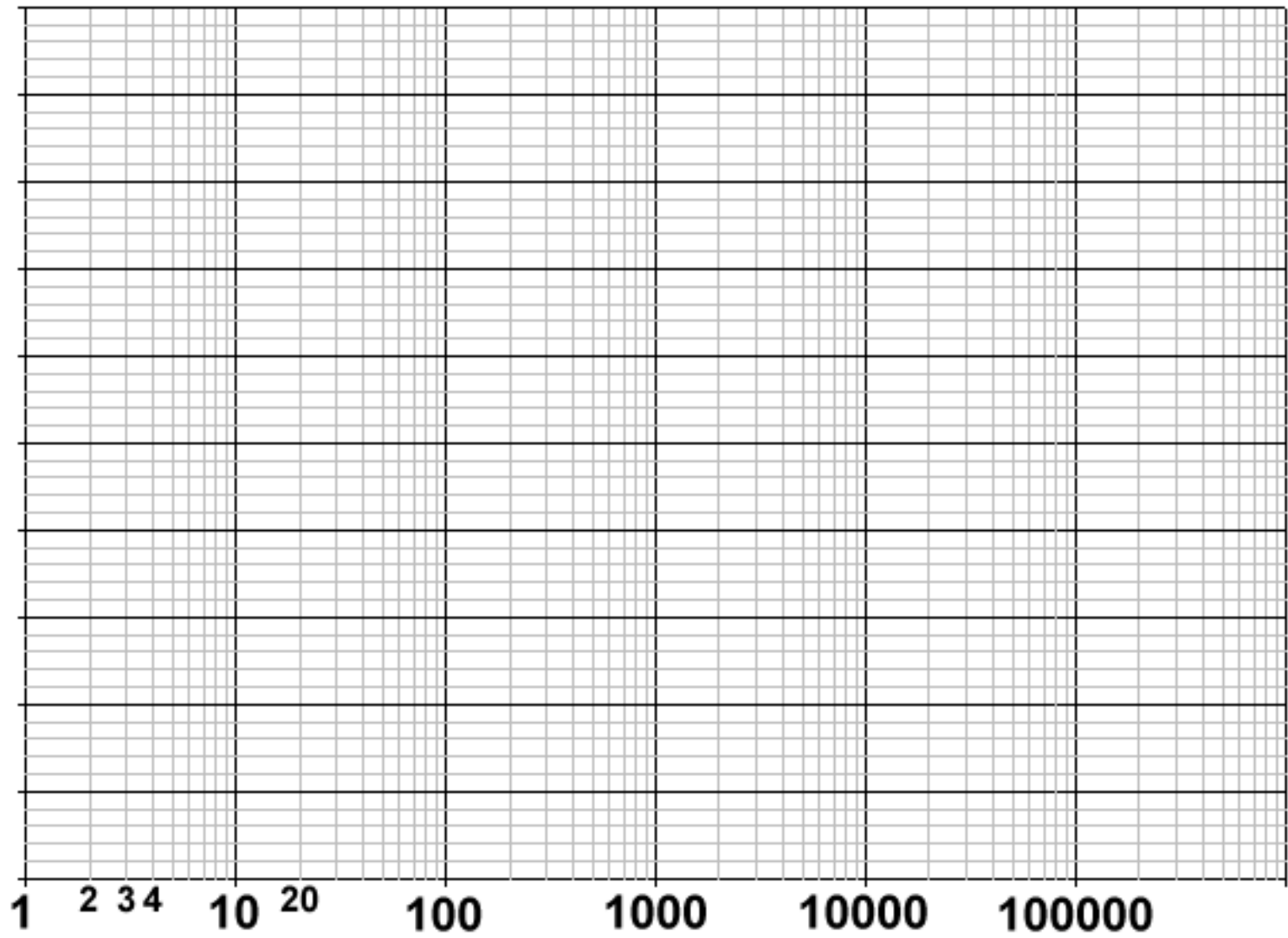
α)  $I(f)$

β)  $V_L(f)$ ,  $V_C(f)$

γ)  $X_L(f)$ ,  $X_C(f)$

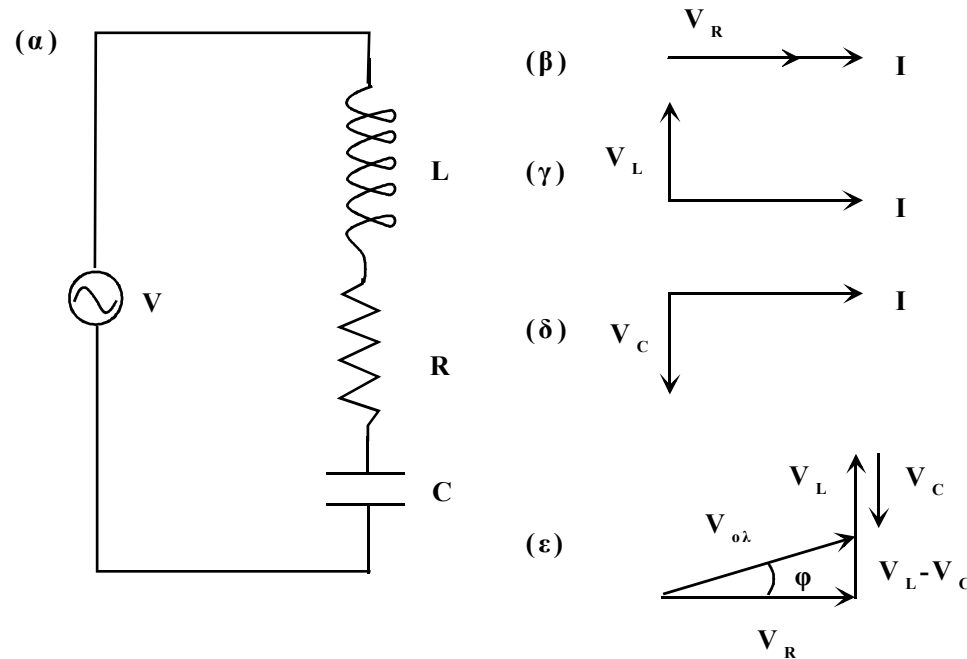
δ)  $\phi(f)$

ε)  $Z(f)$



# Συντονισμός Β κύκλος

# Συντονισμός Σειράς



Συνολική Τάση

$$V_{ολ, \text{rms}} = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

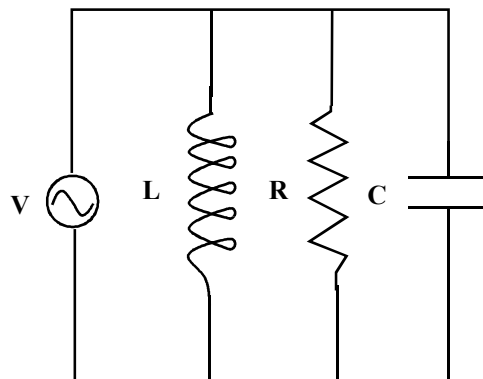
$$\begin{aligned} V_{ολ} &= IZ \\ V_R &= IR \\ V_L &= IX_L \\ V_C &= IX_C \end{aligned}$$

$$IZ = \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2} \Rightarrow$$

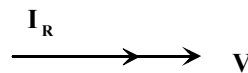
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow$$

# Συντονισμός Παράλληλα

(α)



(β)



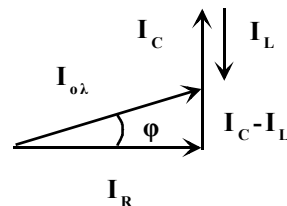
(γ)



(δ)



(ε)



Το ολικό ρεύμα  $I$  ισούται με :

$$I_{ολ} = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$$

$$I_{ολ} = V_{ολ} / Z$$

$$I_R = V_R / R$$

$$I_L = V_L / X_L$$

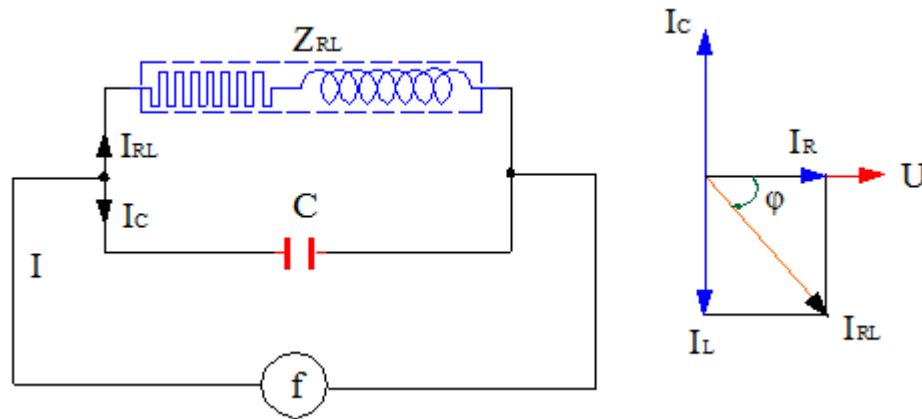
$$I_C = V_C / X_C$$

$$\frac{V}{Z} = \sqrt{\left(\frac{V}{R}\right)^2 + \left(\frac{V}{\omega L} - V\omega C\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$$

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$$

$$\varepsilon\phi\phi = \frac{I_C - I_L}{I_R} = \frac{1/\omega L - \omega C}{1/R}$$

# Συντονισμός Παράλληλα



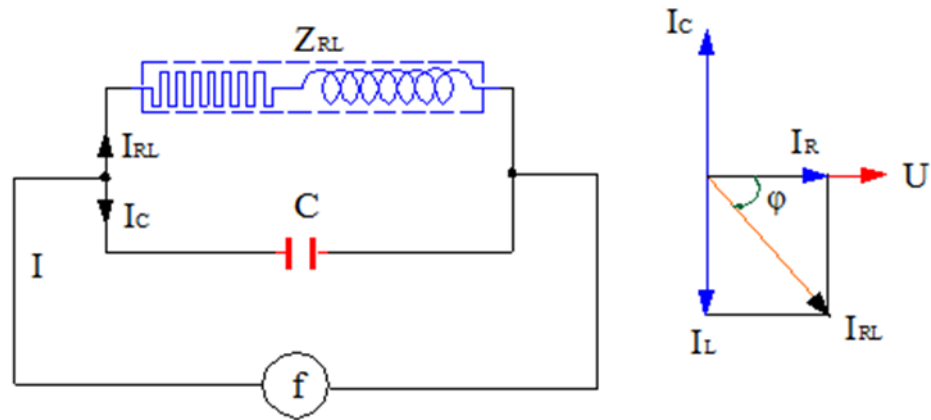
Η σύνθετη αντίσταση στο πηνίο είναι :  $Z_{RL} = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (2\pi \cdot f \cdot L)^2}$

Η Ενεργή τιμή Ρεύματος στο πηνίο είναι :  $I_{RL_{rms}} = |I_{RL_{rms}}| = \frac{|V_{RL_{rms}}|}{|Z|} = \frac{V_{RL_{rms}}}{\sqrt{R^2 + (2\pi \cdot f \cdot L)^2}}$

Η συνιστώσα  $I_L$  του ρεύματος  $I_{RL}$  είναι :  $I_L = I_{RL} \cdot \sin \varphi = \frac{V_{RL_{rms}}}{\sqrt{R^2 + (2\pi \cdot f \cdot L)^2}} \cdot \sin \varphi$

Το ρεύμα  $I_c$  είναι :  $I_c = \frac{V_{rms}}{X_c} = \frac{V_{rms}}{\frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}} = 2\pi \cdot f \cdot C \cdot V_{rms}$

# Συντονισμός Παράλληλα



Κατά τον συντονισμό έχουμε :  $X_L = X_C$  ή  $\frac{V_{rms}}{I_L} = \frac{V_{rms}}{I_C}$  ή  $I_L = I_C$

$$I_C = I_L \Rightarrow 2\pi \cdot f_0 \cdot C \cdot V_{rms} = \frac{V_{rms}}{\sqrt{R^2 + (2\pi \cdot f_0 \cdot L)^2}} \cdot \sin \varphi \Rightarrow 2\pi \cdot f_0 \cdot C = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{R^2 + (2\pi \cdot f_0 \cdot L)^2}}$$

Γνωρίζοντας για το  $\sin \varphi$  ότι :

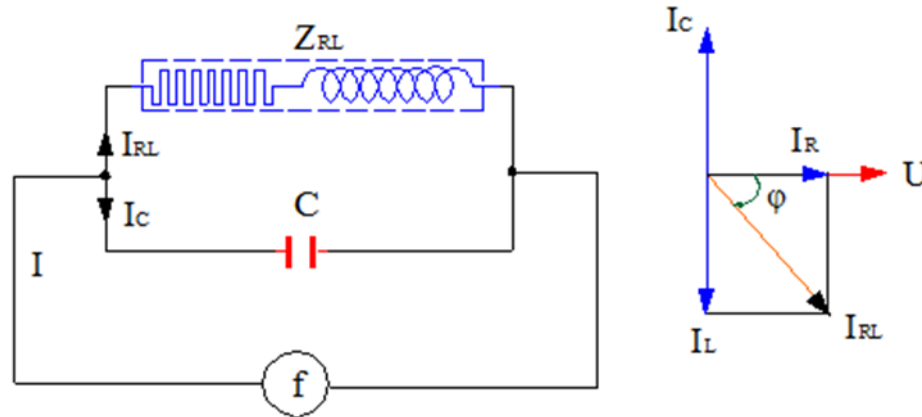
$$\sin \varphi = \frac{I_L}{I_{RL}} = \frac{\frac{V_{rms}}{X_L}}{\frac{V_{rms}}{Z_{RL}}} = \frac{X_L}{Z_{RL}} = \frac{2\pi \cdot f_0 \cdot L}{\sqrt{R^2 + (2\pi \cdot f_0 \cdot L)^2}}$$

Αντικαθιστώντας το  $\sin \varphi$  έχουμε :

$$2\pi f_0 C = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (2\pi f_0 L)^2}} \cdot \frac{2\pi f_0 L}{\sqrt{R^2 + (2\pi f_0 L)^2}} \Rightarrow 2\pi f_0 C = \frac{2\pi f_0 L}{(\sqrt{R^2 + (2\pi f_0 L)^2})^2} \Rightarrow 2\pi f_0 C = \frac{2\pi f_0 L}{R^2 + (2\pi f_0 L)^2}$$

# Συντονισμός Παράλληλα

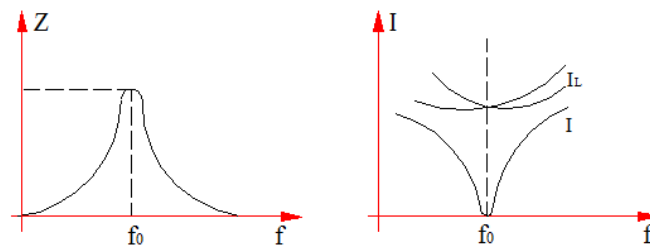
$$2\pi f_0 C = \frac{2\pi f_0 L}{R^2 + (2\pi f_0 L)^2}$$



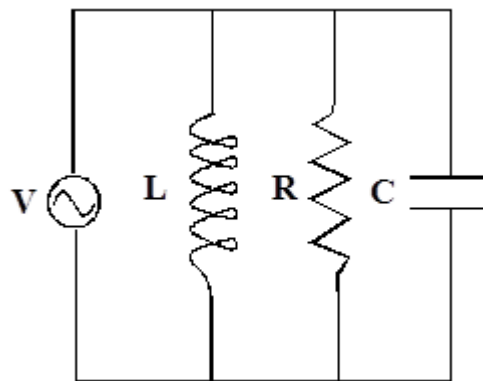
Επειδή στην πράξη το  $X_L \gg R$  και η  $R^2 \ll X_L^2$  :  $2\pi f_0 C \cong \frac{2\pi f_0 L}{(2\pi f_0 L)^2} \Rightarrow 2\pi f_0 C \cong \frac{1}{2\pi f_0 L}$

Η συχνότητα συντονισμού είναι :  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

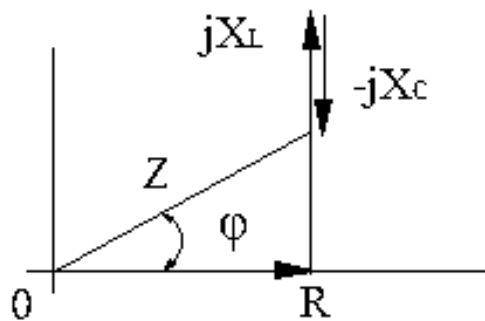
- Το ολικό ρεύμα λαμβάνει την ελάχιστη δυνατή τιμή.
- Το ρεύμα  $I_C$  γίνεται ίσο με το ρεύμα  $I_L$
- Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος γίνεται μέγιστη και ίση με την άεργο αντίδραση του πηνίου πολ/μενη με τον συντελεστή ποιότητας του κυκλώματος



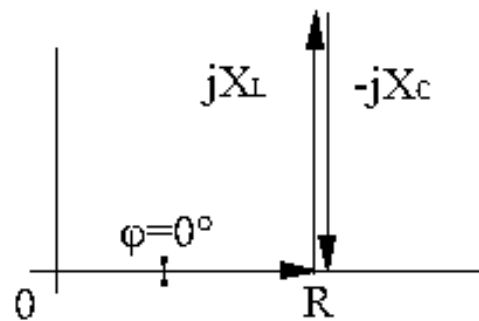
# Συντονισμός Παράλληλα



Σε κύκλωμα RLC έχουμε :



Κατά τον συντονισμό έχουμε :



- Για  $f > f_0 \rightarrow X_L > X_C \rightarrow I_L < I_C$  και το κύκλωμα συμπεριφέρεται χωρητικά
  - Για  $f < f_0 \rightarrow X_L < X_C \rightarrow I_L > I_C$  και το κύκλωμα συμπεριφέρεται επαγωγικά
  - Για  $f = f_0 \rightarrow X_L = X_C$  και το κύκλωμα συμπεριφέρεται ωμικά
    - ❖ το ρεύμα γίνεται ελάχιστο και η σύνθετη αντίσταση μέγιστη
- Η συχνότητα συντονισμού είναι ανεξάρτητη από την ωμική αντίσταση του κυκλώματος, εξαρτάται όμως από αυτήν η ένταση του ρεύματος.

# Συντονισμός Παράλληλα

- Αν η  $X_L$  είναι μεγαλύτερη από την  $X_C$ , τότε το ρεύμα θα προηγείται της τάσης και το κύκλωμα εμφανίζει χωρητική συμπεριφορά.
  - Τα ρεύματα είναι αντιστρόφως ανάλογα των αντιστάσεων. Μεγαλύτερη επαγωγική αντίσταση σημαίνει μικρότερη επαγωγική συνιστώσα ρεύματος, άρα θα υπερισχύει η χωρητική συνιστώσα.
- Κατά τον συντονισμό κυκλώματος RLC παράλληλα, η εμπέδηση του κυκλώματος γίνεται μέγιστη (και ίση με την ωμική αντίσταση  $R$ ) και η τάση με το ρεύμα είναι συμφασικά. Λόγω της μεγιστοποίησης της εμπέδησης, το ρεύμα ελαχιστοποιείται και αν δεν υπάρχει ωμική αντίσταση το ολικό ρεύμα μηδενίζεται.
- Αποδεικνύεται ότι η τιμή του μέτρου της εμπέδησης στο συντονισμό και το ρεύμα δίνονται από τις σχέσεις:

# ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ

## Q

- Συντελεστή ποιότητας ονομάζουμε το λόγο του ρεύματος  $I_L$  ή  $I_C$  προς το ρεύμα της πηγής

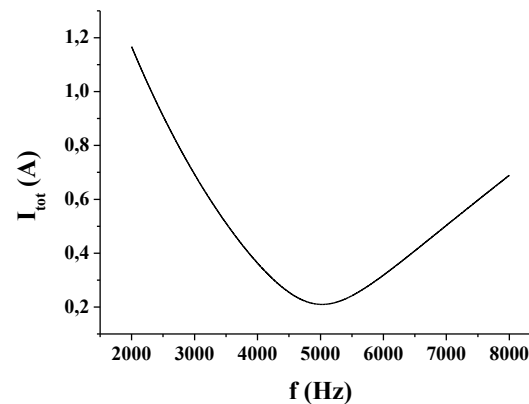
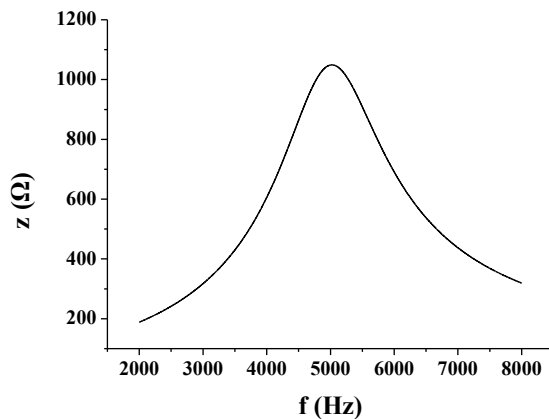
$$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} = \frac{\frac{V}{X_L}}{\frac{V}{R}} = \frac{V}{X_C} = \frac{R}{X_C} = \frac{R}{2\pi f_o L} = \frac{2\pi f_o RC}{1}$$

$$Q = \frac{R}{\frac{2\pi C}{2\pi\sqrt{LC}}} = R \frac{\sqrt{LC}}{C} = R \cdot \frac{\sqrt{LC}}{\sqrt{C^2}} = R \cdot \sqrt{\frac{LC}{C^2}} = R \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Q = R \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

# Συντονισμός Παράλληλα

Πως μεταβάλλεται σαν συνάρτηση της συχνότητας  $f$  το ρεύμα και η εμπέδηση κυκλώματος που αποτελείται από πηνίο με  $R_L=100 \Omega$ ,  $L=10 \text{ mH}$  και  $C=100 \text{ nF}$  που είναι συνδεδεμένα παράλληλα και τροφοδοτούνται με  $230 \text{ V}_{\text{rms}}$ :



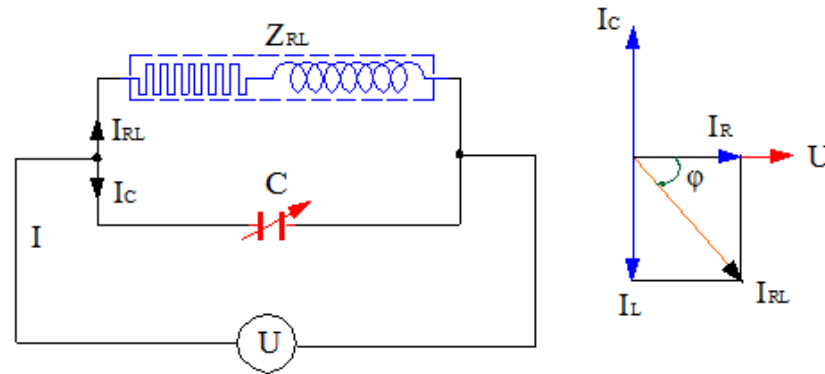
- Υπάρχει μια συχνότητα όπου η εμπέδηση μεγιστοποιείται ενώ το ρεύμα ελαχιστοποιείται .

# Εφαρμογές του συντονισμού

- (α) Ο συντονισμός σε σειρά εμφανίζει ενδιαφέρον σε εφαρμογές που απαιτούν μεγιστοποίηση του ρεύματος
  - οι δέκτες ΗΜ ακτινοβολίας (π.χ. ραδιόφωνα) όπου ένας οξύς συντονισμός επιτρέπει την καλή λήψη στην συχνότητα συντονισμού ενώ ταυτόχρονα περιορίζει την λήψη σε γειτονικές συχνότητες.
- (β) Αντίστοιχα, στο συντονισμό παράλληλα, η ελαχιστοποίηση του ρεύματος μέσω του συντονισμού παράλληλα οδηγεί στην ανάπτυξη φίλτρων.

# Παράδειγμα

Σε ένα κύκλωμα αποτελείται από  $R=15 \Omega$ ,  $L=1,5 \text{ H}$ , και από ένα μεταβλητό πυκνωτή συνδεμένα παράλληλα όπως στο σχήμα



Στο κύκλωμα εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση με ενεργό τιμή  $220 \text{ V}$  συχνότητας  $50 \text{ Hz}$ . Μεταβάλλουμε τον πυκνωτή ώστε το ρεύμα  $I$  στο κύκλωμα να γίνει ελάχιστο (συντονισμός)

Να υπολογισθεί η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος  $Z_{RL}$ .

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times \pi \times 50 \times 1.5 = 471 \Omega$$

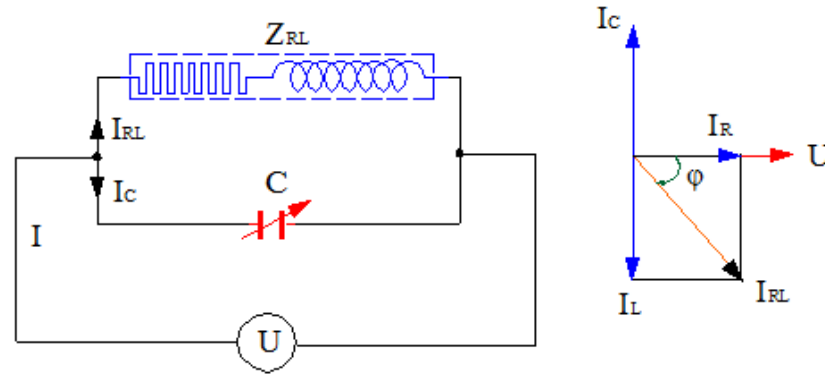
$$Z_{RL} = R + jX_L = 15 + j471 = 471,23 \angle 88,2^\circ \Omega$$

Να υπολογισθεί το ρεύμα  $I_{RL}$  που διαρρέει το πηνίο.

$$I_{RL} = \frac{V}{Z_{RL}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{471,23 \angle 88,2^\circ} = 0,466 \angle -88,2^\circ \text{ A}$$

# Παράδειγμα

Σε ένα κύκλωμα αποτελείται από  $R=15 \Omega$ ,  $L=1,5 \text{ H}$ , και από ένα μεταβλητό πυκνωτή συνδεμένα παράλληλα όπως στο σχήμα



Στο κύκλωμα εφαρμόζεται AC τάση  $230 \angle 0^\circ$  συχνότητας  $50 \text{ HZ}$ . Έχουμε συντονισμό

Να υπολογισθεί η χωρητική αντίδραση  $X_C$  και η χωρητικότητα  $C$  του πυκνωτή

$$X_L = X_C \quad \text{άρα} \quad X_C = 471 \Omega \Rightarrow X_C = 471 = \frac{1}{2\pi fC} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi f X_C} = 6,75 \mu\text{F}$$

Να υπολογισθεί η ολική ένταση του κυκλώματος.

$$\cos \varphi_{RL} = \frac{R}{Z_{RL}} = \frac{15}{471,23} = 0,0318$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{I_R^2} = I_R = 0,0148$$

$$I_R = \cos \varphi_{RL} \times I_{RL} = 0,318 \times 0,466 = 0,0148 \text{ A}$$

Να υπολογισθεί η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{230 \angle 0^\circ}{0,0148 \angle 0^\circ} = 15540,54 \angle 0^\circ \Omega$$

# Παράδειγμα 2

Κατά την μελέτη του συντονισμού σε κύκλωμα αποτελούμενο από πηνίο  $L$ ,  $R_L$  και πυκνωτή  $C$  συνδεδεμένα παράλληλα, που τροφοδοτούνται με τάση  $V=220$  V, οι μετρήσεις με αμπερόμετρα έδωσαν τα παρακάτω δεδομένα.

f (Hz)	$I_{tot}$ (A)	$I_L$ (A)	$I_C$ (A)
1000	1,79	1,86	0,14
2000	1,17	1,37	0,28
3000	0,69	1,03	0,41
4000	0,36	0,81	0,55
5000	0,21	0,67	0,67
6000	0,32	0,56	0,83
7000	0,50	0,49	0,97
8000	0,69	0,43	1,11
9000	0,87	0,38	1,24

Ποια είναι η συχνότητα συντονισμού; Ποια είναι η συμπεριφορά του κυκλώματος σε κάθε συχνότητα; Συμπληρώστε τον πίνακα ως προς το  $X_L$ ,  $x_C$  και  $Z$ .

# Παράδειγμα 2

(α) η συχνότητα συντονισμού είναι τα 5000 Hz,

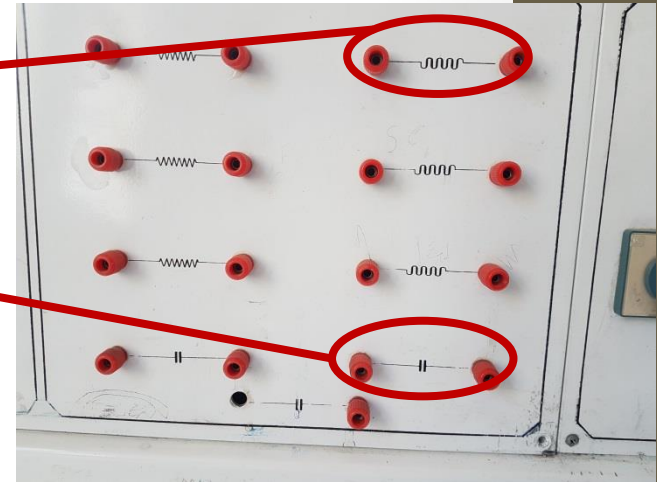
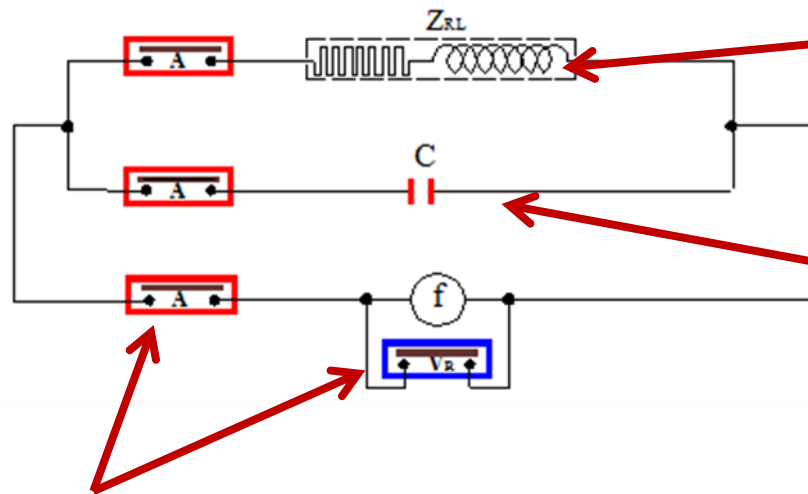
(β) Για  $f < 5000$  Hz επαγωγική συμπεριφορά ενώ χωρητική για  $f > 5000$  Hz

(γ) Ισχύει:  $X_L = V/I_L$ ,  $X_C = V/I_C$ ,  $Z = V/I_{tot}$ . Οπότε έχουμε:

f (Hz)	$I_{tot}$ (A)	$I_L$ (A)	$I_C$ (A)	$X_L$ ( $\Omega$ )	$X_C$ ( $\Omega$ )	Z ( $\Omega$ )
1000	1,79	1,86	0,14	118,08	1592,36	122,67
2000	1,17	1,37	0,28	160,55	796,18	188,53
3000	0,69	1,03	0,41	213,29	530,79	317,40
4000	0,36	0,81	0,55	270,37	398,09	605,71
5000	0,21	0,67	0,67	329,54	329,54	1048,44
6000	0,32	0,56	0,83	389,84	265,39	691,10
7000	0,50	0,49	0,97	450,83	227,48	437,31
8000	0,69	0,43	1,11	512,26	199,04	319,22
9000	0,87	0,38	1,24	573,98	176,93	253,29

# Εργαστηριακή Άσκηση 5

Να πραγματοποιηθεί το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος



- Ψηφιακά Πολύμετρα  
3 αμπερόμετρα, 1 βολτόμετρο

Μεταβάλλοντας την συχνότητα από την γεννήτρια σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα στην επόμενη σελίδα να μετρήσετε τα  $I_{oλ}$ ,  $I_L$ ,  $I_C$ ,  $V$  και να καταχωρήσετε τις μετρήσεις σας στον πίνακα μετρήσεων.

\* Χρησιμοποιείτε το μέγιστο πλάτος της τάσης από την γεννήτρια

ΠΕΡΙΟΧΗ ΡΥΘΜΙΣΗΣ (Hz)	V	I <sub>L</sub>	I <sub>C</sub>	I <sub>ολ</sub>	X <sub>L</sub>	X <sub>C</sub>	Z	φ	COSφ	ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ
10										
20										
50										
75										
100										
150										
200										
250										
500										
1000										
f <sub>0</sub>										

$$X_L = \frac{V}{I_{L, \text{rms}}}$$

$$X_C = \frac{V}{I_{C, \text{rms}}}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[ \frac{X_L - X_C}{R} \right]$$

$$X_L = 2\pi fL \quad , \quad X_C = \frac{1}{2\pi fC}$$