Εισαγωγή : Εναλλασσόμενο και μιγαδικοί

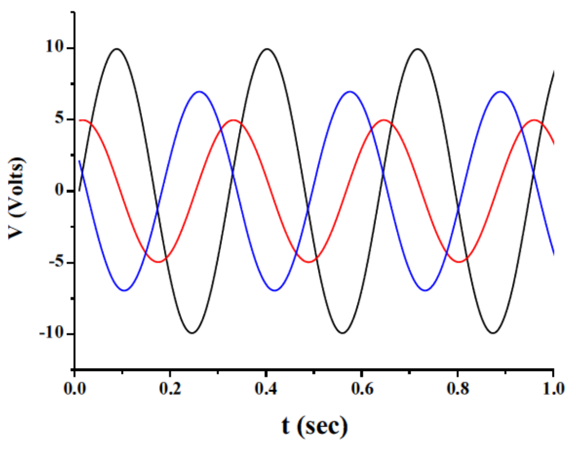
Γενικά

Σε κυκλώματα DC, τα ηλεκτρικές μεγέθη εξαρτώνται αποκλειστικά από τις ωμικές αντιστάσεις, φυσικά μετά την ολοκλήρωση πιθανών μεταβατικών φαινομένων λόγω παρουσίας πηνίων και πυκνωτών, και δεν υφίστανται διαφορές φάσης μεταξύ ρεύματος και τάσης. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τον χειρισμό των DC ηλεκτρικών ποσοτήτων ως μονόμετρων ποσοτήτων, οπότε για τις σχετικές πράξεις είναι αρκετή η απλή αριθμητική. Σε αντίθεση, στα κυκλώματα AC, ο ρόλος των πηνίων και των πυκνωτών είναι πιο ουσιαστικός καθώς και τα ηλεκτρικά μεγέθη επηρεάζουν και προκαλούν διαφορές φάσεις μεταξύ ρευμάτων και τάσεων. Επομένως, ο χειρισμός των ηλεκτρικών μεγεθών σε κυκλώματα AC είναι πιο περίπλοκη και υπάρχουν τρεις δυνατότητες για την περιγραφή τους. Η πρώτη είναι η ημιτονοειδής, η δεύτερη αφορά περιστρεφόμενα διανύσματα, ενώ η τρίτη βασίζεται στους μιγαδικούς αριθμούς

Ημιτονοειδής αναπαράσταση

Οι βασικές συνθήκες που ισχύουν σε ένα εναλλασσόμενο ρεύμα είναι: (α) η τιμή του ρεύματος (ή της τάσης) μεταβάλλεται με το χρόνο παίρνοντας θετικές και αρνητικές τιμές, (β) η εξέλιξη των τιμών είναι περιοδική με περίοδο T και (γ) το ολοκλήρωμα των βασικών μεγεθών σε μία περίοδο είναι μηδέν. Με βάση αυτές τις συνθήκες, η βασική και κλασσική αναπαράσταση των ηλεκτρικών μεγεθών στα AC κυκλώματα είναι η ημιτονοειδής, δηλαδή τα μεγέθη έχουν την μαθηματική μορφή $I=I_0\sin(\omega t+\varphi)$, όπου:

- I_0 είναι το μέγιστο πλάτος του ρεύματος
- I είναι η στιγμιαία τιμή του ρεύματος σε χρόνο t
- ω είναι η κυκλική συχνότητα ($\omega=2\pi/T$, με $T=1/f$ όπου f είναι η συχνότητα)
- φ είναι η αρχική φάση
- $\omega t+\varphi$ είναι η φάση κατά την χρονική στιγμή t



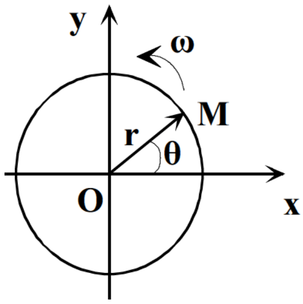
Εικόνα 1 Ημιτονοειδής αναπαράσταση

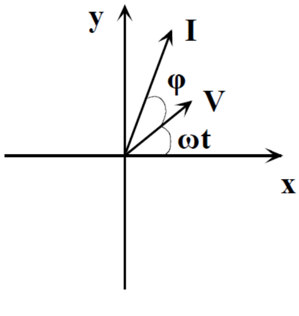
Σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να επισημανθεί εδώ ότι δεν υπάρχει κάποια διαφορά αν για την περιγραφή χρησιμοποιηθεί ημίτονο ή συνημίτονο, καθώς οι δυο συναρτήσεις απλά διαφέρουν κατά μία αρχική φάση π/2.Όταν χρησιμοποιείται ημιτονοειδής αναπαράσταση, οι πράξεις μεταξύ των ηλεκτρικών μεγεθών βασίζεται στην τριγωνομετρία, αλλά δεν είναι πάντα εύκολες. Παράλληλα όμως, η γραφική αναπαράσταση των μεγεθών είναι μάλλον προβληματική, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, όπου έχουν σχεδιαστεί τρεις τάσεις οι: V_1=10ημ(20t), V2=5ημ(20t-π/6) και V3=7ημ(20t-π/3).

Αναπαράσταση με περιστρεφόμενα διανύσματα

Ένας ευκολότερος τρόπος να διαχειριστούμε εναλλασσόμενα μεγέθη είναι τα περιστρεφόμενα διανύσματα. Έστω οριζόντιο σύστημα αξόνων και ένα διάνυσμα ΟΜ με μήκος r το οποίο περιστρέφεται αριστερόστροφα με γωνιακή ταχύτητα ω. Σε κάποια χρονική στιγμή t, το διάνυσμα σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x. Τότε, οι x, y προβολές του διανύσματος θα δίνονται από τις σχέσεις: x=rcosθ και y=rsinθ. Αν κατά την χρονική στιγμή t=0 το διάνυσμα ξεκίνησε από τον άξονα x, τότε για κάθε χρονική στιγμή t, η γωνία θ θα δίνεται από την σχέση θ=ωt. Άρα, οι προβολές του διανύσματος θα είναι: x=rcosωt και y=rsinωt. Αντίστοιχα, αν κατά την χρονική στιγμή t=0 το διάνυσμα σχημάτιζε γωνία φ με τον άξονα x, τότε θα ισχύει: x=rcos(ωt+φ) και y=rsin(ωt+φ). Βλέπουμε δηλαδή ότι οι προβολές ενός διανύσματος που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι ημιτονοειδείς συναρτήσεις και μοιάζουν με τις συναρτήσεις που περιγράφουν εναλλασσόμενα ηλεκτρικά μεγέθη. Με βάση αυτή την παρατήρηση, μπορούμε να περιγράψουμε το εναλλασσόμενο ρεύμα με περιστρεφόμενα διανύσματα. Μάλιστα, δεν είναι απαραίτητο να παρουσιάζεται όλη η χρονική εξέλιξη των μεγεθών καθώς, αν όλα τα μεγέθη περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, σε κάθε χρονική στιγμή t, θα έχουν μεταξύ τους την ίδια διαφορά φάσης με αυτή του είχαν κατά την χρονική στιγμή t=0. Σαν παράδειγμα, αν έχω σε ένα κύκλωμα χωρητική συμπεριφορά, το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά φ και τα δύο ηλεκτρικά μεγέθη αναπαρίστανται όπως στο παρακάτω σχήμα με $V=V_0$sinμ(ωt), $I=I_0$sin(ωt+φ).

Με την προσέγγιση των περιστρεφόμενων διανυσμάτων είναι εύκολη η μαθηματική επεξεργασία προβλημάτων αλλά και η γραφική αναπαράσταση των μεγεθών.



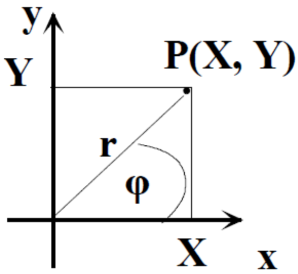


Εικόνα 2 Αναπαράσταση με περιστρεφόμενα διανύσματα

Βασικές έννοιες των μιγαδικών αριθμών

Είναι γνωστό ότι οι πραγματικοί αριθμοί X θεωρούνται σημεία σε μία ευθεία, έστω οριζόντια. Αν προσθέσουμε και μία κατακόρυφη ευθεία και σε κάθε σημείο της αντιστοιχήσουμε ένα φανταστικό αριθμό jY (όπου $j=\sqrt{-1}$ και Y πραγματικός αριθμός), τότε κάθε σημείο του επιπέδου θα έχει προβολή στον άξονα x πραγματικό αριθμό, ενώ στον άξονα y φανταστικό. Δηλαδή, κάθε σημείο του επιπέδου θα δίνεται από τις συντεταγμένες (X,Y) και θα αντιστοιχεί σε ένα μιγαδικό αριθμό της μορφής Z=X+jY, με X την προβολή στον άξονα x και Y στον άξονα y. Η μορφή Z=X+jY ονομάζεται καρτεσιανή μορφή, ενώ παράλληλα ισχύουν:

$r=\sqrt{X^2+Y^2}$, $\tan\varphi = Y/X$ και $Z = X + jY = r\cdot\cos\varphi + j\cdot r\cdot\sin\varphi = r\cdot e^{j\varphi}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 3 Πολική μορφή μιγαδικών αριθμών

Το r είναι το μέτρο του μιγαδικού αριθμού και φ το όρισμα του, το οποίο δεν είναι μοναδικό καθώς κάθε γωνία φ+2kπ (όπου k ακέραιος) αντιστοιχεί στο ίδιο σημείο. Η μορφή $Z = r\cdot\cos\varphi + j\cdot r\cdot\sin\varphi$ ονομάζεται συνημιτονοειδής, ενώ η μορφή $Z = r\cdot e^{j\varphi}$ εκθετική ή πολική.

Μερικά χρήσιμα στοιχεία για τους μιγαδικούς, που αφορούν την χρήση τους για την περιγραφή εναλλασσομένων ηλεκτρικών μεγεθών είναι:

i) Για πρόσθεση ή αφαίρεση μιγαδικών αριθμών χρησιμοποιούμε την καρτεσιανή μορφή. Στην περίπτωση αυτή ισχύει : $Z_1 \pm Z_2 = X_1 \pm X_2 + j\cdot(Y_1 \pm Y_2)$

ii) Για πολλαπλασιασμό και διαίρεση χρησιμοποιούμε την πολική μορφή. Ισχύει:

$$Z_1\cdot Z_2 = r_1\cdot r_2\cdot(e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}) \qquad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot(e^{j(\varphi_1-\varphi_2)})$$

iii) Στο παραπάνω πλαίσιο είναι χρήσιμο να θυμάται κάποιος ποιος μετατρέπεται η μία μορφή στην άλλη :

Καρτεσιανή →Πολική		Πολική → Καρτεσιανή	
Z=X+jY	$r=\sqrt{X^2+Y^2}$ $\tan\varphi = Y/X$	$re^{j\varphi}$	$Z = r\cdot\cos\varphi + j\cdot r\cdot\sin\varphi$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

- **Άθροισμα - διαφορά**

Για να προσθέσουμε δυο μιγαδικούς αριθμούς προσθέτουμε χωριστά τα πραγματικά και χωριστά τα φανταστικά μέρη .
Για να αφαιρέσουμε δυο μιγαδικούς αριθμούς αφαιρούμε χωριστά τα πραγματικά και χωριστά τα φανταστικά μέρη .
Για πρόσθεση ή αφαίρεση μιγαδικών αριθμών μας συμφέρει να έχουμε τους μιγαδικούς σε καρτεσιανή μορφή.
π.χ. $Z_1 = 3+j5$, $Z_2 = 8+j9$ $\Rightarrow$ $Z_1+Z_2 = (3+8)+j\,(5+9)= 11+j14$

$Z_1 = 3-j8$, $Z_2 = 8+j9$ $\Rightarrow$ $Z_1-Z_2 = (3-8)-j\,(-8+9)= -5-j1$

- **Πολλαπλασιασμός**

Εάν οι μιγαδικοί αριθμοί είναι σε εκθετική μορφή σύμφωνα με τις ιδιότητες των δυνάμεων είναι:

$Z_1 = r_1e^{j\theta1}$, $Z_2 = r_2e^{j\theta2}$ $\Rightarrow$ $Z_1.Z_2 = r_1r_2e^{j(\theta1+2)}$

π.χ.

$Z_1 = 8e^{j\pi/3}$, $Z_2 = 15e\text{-}^{j\pi/6}$ $\Rightarrow$ $Z_1.Z_2 = 120e^{j\pi/6}$

Εάν οι μιγαδικοί αριθμοί είναι σε πολική μορφή:

$Z_1 = r_1\angle\,\theta_1$, $Z_2 = r_2\angle\,\theta_2$ $\Rightarrow$ $Z_1.Z_2 = r_1r_2\angle\,\theta_{1+}\,\theta_2$

π.χ.

$Z_1 = 15\angle\,45^0$, $Z_2 = 17\angle 25^0$ $\Rightarrow$ $Z_1.Z_2 = 255\ \angle\,70^0$

$Z_1 = 15\angle\,-45^0$, $Z_2 = 17\angle 25^0$ $\Rightarrow$ $Z_1.Z_2 = 255\ \angle\,-20^0$

Εάν οι μιγαδικοί αριθμοί είναι σε καρτεσιανή μορφή:

$Z_1 = x_1+jy_1$, $Z_2 = x_2 + jy_2$ $\Rightarrow$ $Z_1.Z_2 = (x_1+jy_1).(x_2+jy_2)$

π.χ.

$Z_1 = 2+j3$, $Z_2 = -1 - j3$ $\Rightarrow$ $Z_1.Z_2 = (2+j3).(-1-j3) = 7-j9$

- **Διαίρεση**

Εάν οι μιγαδικοί αριθμοί είναι σε εκθετική μορφή σύμφωνα με τις ιδιότητες των δυνάμεων είναι:

$Z_1 = r_1 e^{j\theta 1}$, $Z_2 = r_2 e^{j\theta 2}$ $\Rightarrow$ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

π.χ.

$Z_1 = 8e^{j\pi/3}$, $Z_2 = 15e^{j\pi/6}$ $\Rightarrow$ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{8}{15} e^{j\pi/6}$ $= 0{,}53e^{j\pi/6}$

Εάν οι μιγαδικοί αριθμοί είναι σε πολική μορφή:

$Z_1 = r_1 \angle \theta_1$, $Z_2 = r_2 \angle \theta_2$ $\Rightarrow$ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2$

π.χ.

$Z_1 = 15\angle 45^0$, $Z_2 = 17\angle 25^0$ $\Rightarrow$ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{15}{17} \angle 45^0 - 25^0$ $= 0{,}822\angle 20^0$

$Z_1 = 15\angle -45^0$, $Z_2 = 17\angle 25^0$ $\Rightarrow$ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{15}{17} \angle -45^0 - 25^0$ $= 0{,}822\angle -70^0$

Εάν οι μιγαδικοί αριθμοί είναι σε καρτεσιανή μορφή :

$Z_1 = x_1 + jy_1$, $Z_2 = x_2 + jy_2$ $\Rightarrow$ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}$

π.χ.

$Z_1 = 4-j5$, $Z_2 = 1+j2$ $\Rightarrow$ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{4 - j5}{1 + j2}\left(\frac{1 - j2}{1 - j2}\right) = \frac{-6 - j13}{5}$