Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών &
Μηχανικών Υπολογιστών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Επανάληψη Θεωρίας
Ηλεκτρικές Μετρήσεις

Διδάσκουσα: Άννα Τασολάμπρου

Κεφάλαιο 1 : Χαρακτηριστικά αναλογικών ηλεκτρικών οργάνων

- **Σφάλματα μετρήσεων**: σε διάφορους παράγοντες και μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά μία μέτρηση

Απόλυτο σφάλμα $\Delta x = x_{\varepsilon\nu\delta} - x_{\pi\rho\alpha\gamma}$

Σχετικό σφάλμα $\Delta x / x_{\pi\rho\alpha\gamma}$ $\quad \Delta x / x_{\varepsilon\nu\delta}$

Ακρίβεια **S = 1/Σχετικό Σφάλμα**

$$x_{\varepsilon\nu\delta} \approx x_{\pi\rho\alpha\gamma}$$

Παράδειγμα…

Κεφάλαιο 1 : Χαρακτηριστικά αναλογικών ηλεκτρικών οργάνων

της μέτρησης συνήθως δίνεται ως x±Δx. Σαν παράδειγμα, αν σε μία μέτρηση μιας τάσης 10 V βρούμε τιμή 11 V, το απόλυτο σφάλμα είναι 1 V και η μετρούμενη τιμή δίδεται ως 11±1 V. Στην πράξη, επειδή δεν είναι γνωστή η πραγματική τιμή ενός μεγέθους, το απόλυτο σφάλμα βρίσκεται με βάση τα στοιχεία του οργάνου όπως δίνονται από τον κατασκευαστή. Το σχετικό σφάλμα ορίζεται ως ο λόγος του

εκατό. Στο παραπάνω παράδειγμα μέτρησης της τάσης το σχετικό σφάλμα είναι 1/11=0.0909 ή 9.09%. Τέλος, ως ακρίβεια μέτρησης S ορίζεται το αντίστροφο του σχετικού σφάλματος, δηλαδή στην προηγούμενη περίπτωση S=11.

Κεφάλαιο 1 : Χαρακτηριστικά αναλογικών ηλεκτρικών οργάνων

- α) Περιοχή μέτρησης οργάνου.
- β) Εσωτερική αντίσταση του οργάνου (r0).
- γ) Ευαισθησία οργάνου.
- δ) Υπερφόρτιση οργάνου.
- ε) Offset οργάνου.
- ζ) Διακριτική ικανότητα οργάνου.
- η) Μέγιστο σφάλμα οργάνου.
- θ) Κλάση οργάνου.

Κεφάλαιο 1 : Βασικές έννοιες και χαρακτηριστικά οργάνων

- θ) Κλάση οργάνου. Η κλάση G ενός οργάνου ορίζεται από την σχέση:

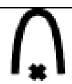
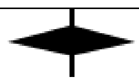
$$G = 100\frac{ΜΑΣ}{ΜΕ}$$

όπου **ΜΑΣ** είναι το μέγιστο απόλυτο σφάλμα του οργάνου και **ΜΕ** είναι η μέγιστη ένδειξη. Δηλαδή η κλάση του οργάνου μας δίνει το επί τοις εκατό σφάλμα στη μέγιστη ένδειξη κατά την μέτρηση με το όργανο.

σφάλμα του οργάνου. Π.χ. έστω βολτόμετρο με κλάση 2 και μέγιστη ένδειξη 100 V. Το μέγιστο απόλυτο σφάλμα του οργάνου υπολογίζεται σε ΜΑΣ=2 V. Αντίστοιχα αν η μέτρηση μας είναι 50 V, το μέγιστο σχετικό σφάλμα είναι 4%. Τέλος, με βάση τα προηγούμενα φαίνεται ότι μία μέτρηση είναι περισσότερο σωστή όταν πραγματοποιείται στο τελευταίο τρίτο της κλίμακας του οργάνου, καθώς εκεί το μέγιστο σχετικό σφάλμα είναι μικρότερο.

Κεφάλαιο 1 : Βασικές έννοιες και χαρακτηριστικά οργάνων

- **Σύμβολα οργάνων.**

Σύμβολο	Σημασία
~	Όργανο για εναλλασσόμενο
=	Όργανο για συνεχές
★	Τάση δοκιμής οργάνου 500 V
	Όργανο στρεπτού πηνίου
	Όργανο διασταυρούμενων πηνίων
	Όργανο κινητού μαγνήτη
2	Κλάση οργάνου 2
	Τοποθέτηση οργάνου σε 60°
⊥	Τοποθέτηση οργάνου σε όρθια θέση

Κεφάλαιο 2 : Σφάλματα

- Σε κάθε μέτρηση που πραγματοποιείται, ένας βασικός παράγοντας που καθορίζει το αποτέλεσμα είναι η απόκλιση της τιμής που μετράμε ή υπολογίζουμε σε σχέση από την πραγματική τιμή.

Είδη σφαλμάτων

α) τα περιβαλλοντικά σφάλματα / σφάλματα παρατήρησης.

β) τα τυχαία σφάλματα.

γ) τα συστηματικά σφάλματα.

Κεφάλαιο 2 : Σφάλματα

α) αν θέλουμε να μετρήσουμε μέγεθος x, πραγματοποιούμε n μετρήσεις και βρίσκουμε την μέση τιμή των μετρήσεων που ορίζεται ως:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n}$$

β) υπολογίζουμε την μέση απόκλιση Ι ορίζεται ως:

$$D = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left| x_j - \overline{x} \right|}{n}$$

γ) υπολογίζουμε το πιθανό σφάλμα Ε της μέσης τιμής

$$E = \frac{D}{\sqrt{n}} 0.845$$

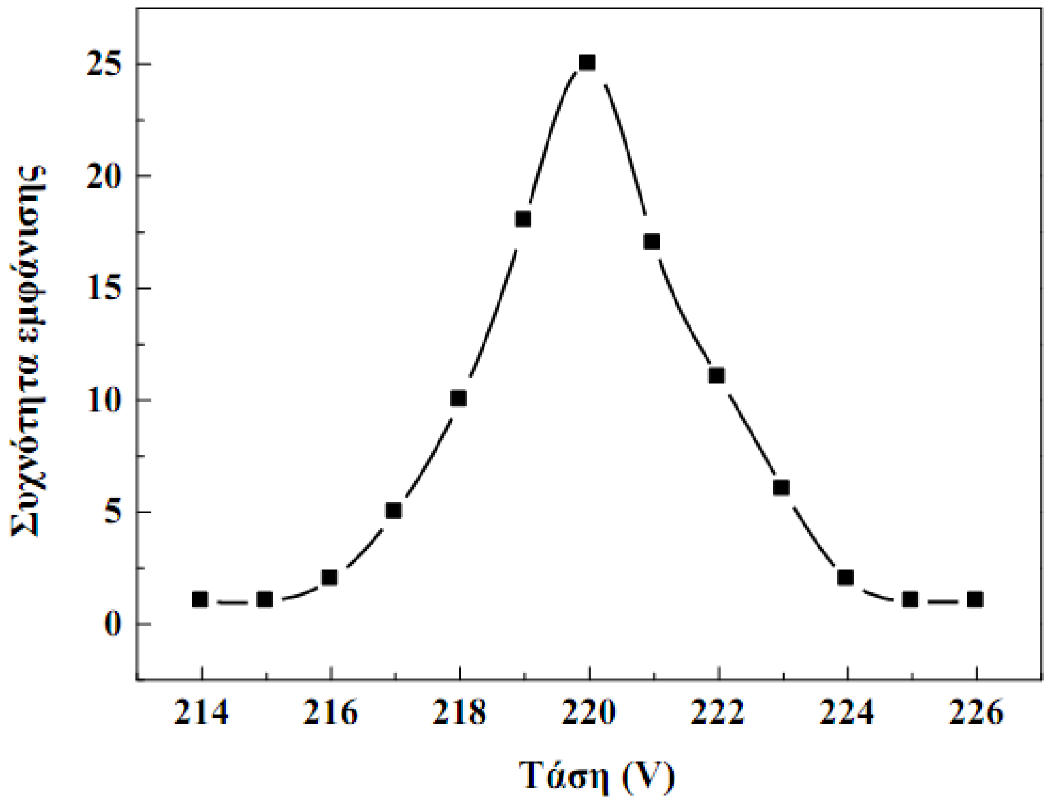
Κεφάλαιο 1 : Βασικές έννοιες και χαρακτηριστικά οργάνων

- Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω: έστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε την τάση στο δίκτυο της ΔΕΗ. Πραγματοποιούμε δέκα μετρήσεις που δίνουν 218V, 222V, 220V, 215V, 226V, 228V, 214V, 225 V, 215 V και 227 V.
- μέση τιμή των μετρήσεων ?
- η μέση απόκλιση ?
- το πιθανό σφάλμα στη μέση τιμή ?

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω: έστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε την τάση στο δίκτυο της ΔΕΗ. Πραγματοποιούμε δέκα μετρήσεις που δίνουν 218V, 222V, 220V, 215V, 226V, 228V, 214V, 225 V, 215 V και 227 V. Η μέση τιμή των μετρήσεων είναι $\overline{V} = 221V$, η μέση απόκλιση D=4.6V και το πιθανό σφάλμα στη μέση τιμή E=1.23V.

Κεφάλαιο 2 : Σφάλματα

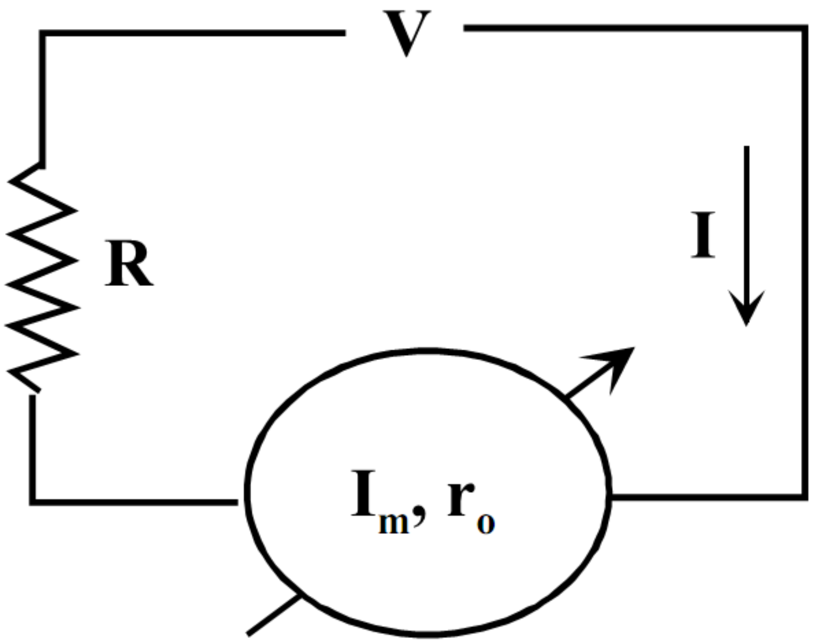
- χρήση κατανομών



Σχήμα 2.1

Κεφάλαιο 7 : Μέτρηση τάσης και ρεύματος

Αμπερόμετρο

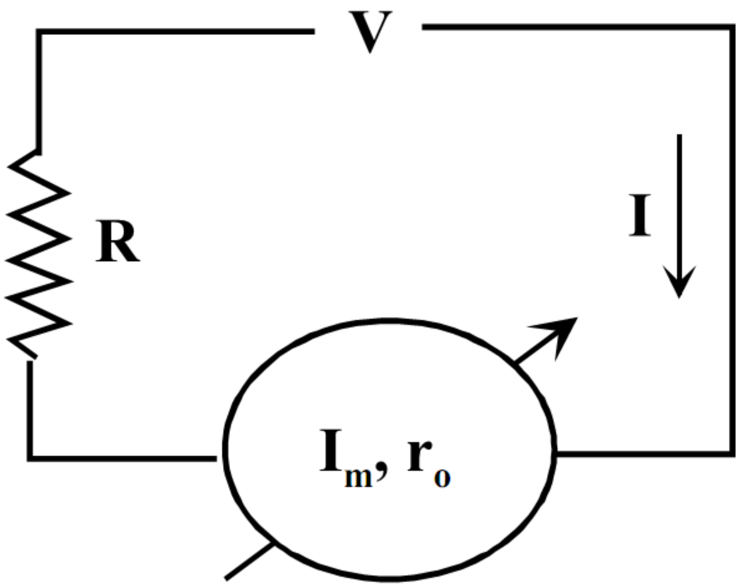


Σχήμα 7.1 Μέτρηση ρεύματος σε κύκλωμα

Ερώτημα: πως επιδρά στα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά ενός κυκλώματος η σύνδεση ενός αμπερομέτρου?

Κεφάλαιο 7 : Μέτρηση τάσης και ρεύματος

Αμπερόμετρο



Σχήμα 7.1 Μέτρηση ρεύματος σε κύκλωμα

όργανο

- μέγιστη ένδειξη Im
- εσωτερική αντίσταση r0

Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα και θα μετρήσει το όργανο είναι

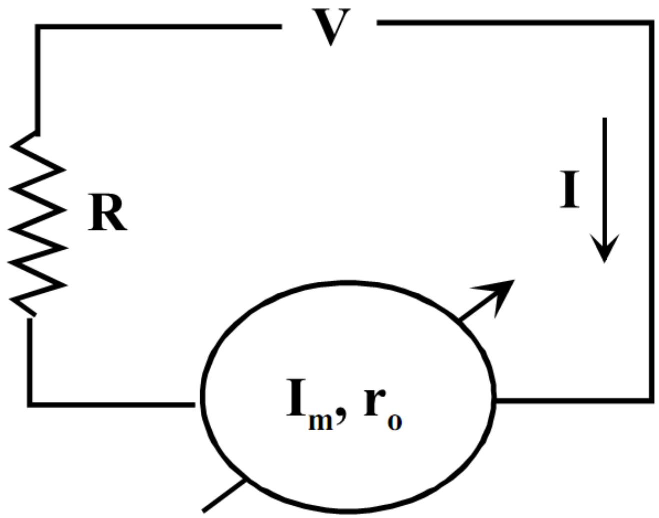
$$I=V/(R+r_0).$$

Αν δεν υπήρχε το όργανο, το ρεύμα στο κύκλωμα θα ήταν

$$I=V/R$$

Κεφάλαιο 7 : Μέτρηση τάσης και ρεύματος

Αμπερόμετρο



Σχήμα 7.1 Μέτρηση ρεύματος σε κύκλωμα

όργανο

- μέγιστη ένδειξη Im
- εσωτερική αντίσταση r0

Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα και θα μετρήσει το όργανο είναι

$$I=V/(R+r_0).$$

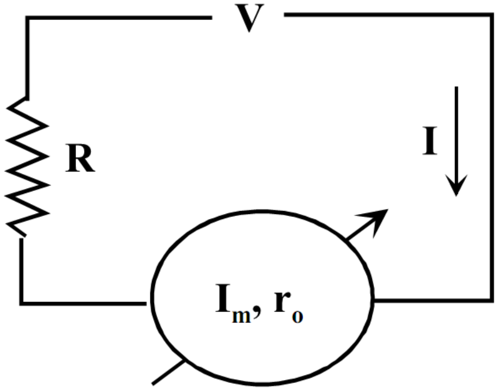
Αν δεν υπήρχε το όργανο, το ρεύμα στο κύκλωμα θα ήταν

$$I=V/R$$

- **Μετράμε ρεύμα μικρότερο από αυτό που θα υπήρχε στο κύκλωμα χωρίς την παρουσία του αμπερομέτρου**

Κεφάλαιο 7 : Μέτρηση τάσης και ρεύματος

Αμπερόμετρο



Σχήμα 7.1 Μέτρηση ρεύματος σε κύκλωμα

Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα και θα μετρήσει το όργανο είναι $I=V/(R+r_0)$.

Αν δεν υπήρχε το όργανο, το ρεύμα στο κύκλωμα θα ήταν $I=V/R$

Σχετικό σφάλμα της μέτρησης

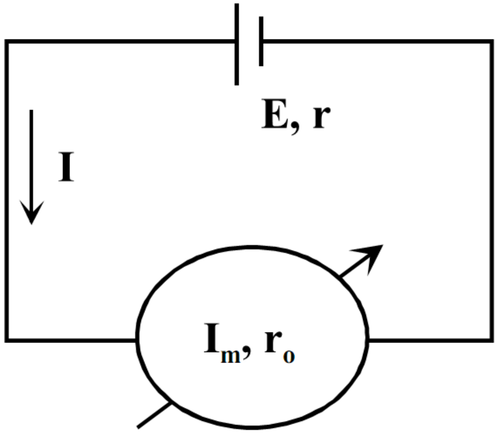
$$\left|\frac{I_{\varepsilon\nu\delta}-I_{\pi\rho\alpha\gamma}}{I_{\varepsilon\nu\delta}}\right|=\left|\frac{\frac{V}{R+r_0}-\frac{V}{R}}{\frac{V}{R+r_0}}\right|=\left|-\frac{r_0}{R}\right|.$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το σχετικό σφάλμα της μέτρησης θα είναι μικρό αν η εσωτερική αντίσταση του αμπερομέτρου είναι πολύ μικρή (ιδανικά μηδέν)

Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι για να μην επηρεάζονται σημαντικά τα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά του κυκλώματος, ***η εσωτερική αντίσταση ενός αμπερομέτρου πρέπει να είναι πολύ μικρότερη από αυτή του υπόλοιπου κυκλώματος*** ώστε να μην δημιουργείται πτώση Συνήθως, η εσωτερική αντίσταση του αμπερομέτρου πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση με **0.1 Ω**.

Κεφάλαιο 7 : Μέτρηση τάσης και ρεύματος

Βολτόμετρο



Σχήμα 7.2 Μέτρηση ΗΕΔ πηγής

Αν σε κάθε όργανο στο οποίο ο δείκτης μετακινείται όταν αυτό **διαρρέεται από ρεύμα** συνδέσουμε **μία τάση V**, τότε λόγω της **εσωτερικής αντίστασης του οργάνου r0**, το **όργανο θα διαρρέεται από ρεύμα I=V/r0**.

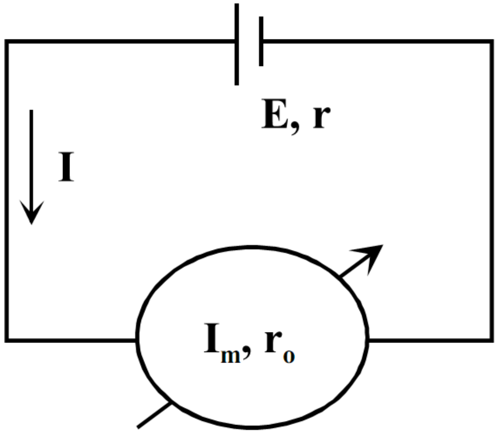
Ο δείκτης του οργάνου θα μετακινηθεί σε θέση που αντιστοιχεί στο ρεύμα I, **η ένδειξη όμως θα σχετίζεται με την τάση V**.

Δηλαδή το όργανο θα λειτουργεί **σαν βολτόμετρο**, θα μετράει μία τάση μέσω του ρεύματος που προκαλεί η τάση αυτή στην αντίσταση r0 και η μέγιστη ένδειξη του θα είναι Vm=Imr0, όπου Im το ρεύμα μέγιστης απόκλισης του οργάνου.

- **Η απαίτηση μετατροπής της τάσης σε ρεύμα οδηγεί στην ανάγκη παράλληλης σύνδεσης ενός βολτομέτρου στο κύκλωμα.**

Κεφάλαιο 7 : Μέτρηση τάσης και ρεύματος

Βολτόμετρο



Σχήμα 7.2 Μέτρηση ΗΕΔ πηγής

Σαν παράδειγμα ας δούμε την **μέτρηση της Ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) πηγής** μιας πηγής E, r με τη χρήση ενός βολτομέτρου με ρεύμα μέγιστης απόκλισης Im και εσωτερική αντίσταση r0

- Αν το ρεύμα του κυκλώματος είναι I,
- η ένδειξη του οργάνου θα είναι V=Ir0
- η ΗΕΔ της πηγής θεωρείται ότι έχει τιμή V.

$$E=I(r+r_0).$$

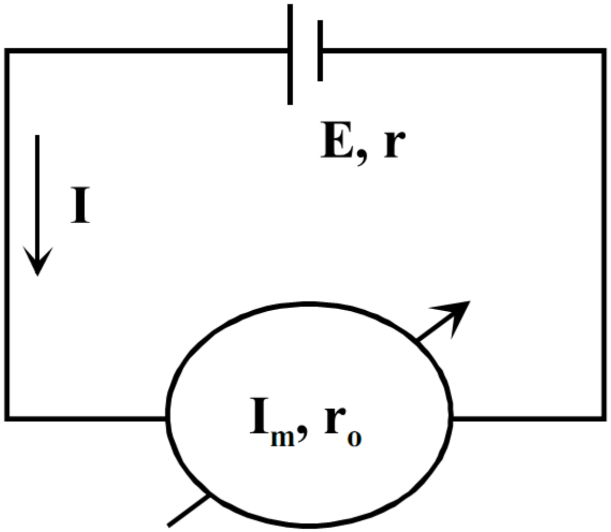
Σχετικό σφάλμα της μέτρησης

$$\left|\frac{E_{\varepsilon\nu\delta}-E_{\pi\rho\alpha\gamma}}{E_{\varepsilon\nu\delta}}\right| = \left|\frac{Ir_0 - I(r+r_0)}{Ir_0}\right| = \left|-\frac{r}{r_0}\right|$$

Το σχετικό σφάλμα της μέτρησης θα είναι μικρό αν **η εσωτερική αντίσταση του βολτομέτρου είναι πολύ μεγάλη** (ιδανικά άπειρη). Για να μην επηρεάζονται σημαντικά τα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά του κυκλώματος, η εσωτερική αντίσταση ενός βολτομέτρου πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή του υπόλοιπου κυκλώματος ώστε το ρεύμα που θα διαρρέει το όργανο να είναι πολύ μικρό ποσοστό του ολικού ρεύματος. Συνήθως, η εσωτερική αντίσταση του βολτομέτρου πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση με 10ΚΩ.

Κεφάλαιο 7 : Μέτρηση τάσης και ρεύματος

Βολτόμετρο



Σχήμα 7.2 Μέτρηση ΗΕΔ πηγής

Σε σχέση με πρακτικές εφαρμογές, σε μετρήσεις DC τάσεων απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στην πολικότητα της τάσης ενώ σε μετρήσεις AC τάσεων η ένδειξη του οργάνου αφορά ενεργές τιμές Vεν (Vεν=V0/2). Για συνεχείς τάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν όργανα στρεπτού πηνίου, κινητού σιδήρου και κινητού μαγνήτη. Για εναλλασσόμενες τάσεις αντίστοιχα μπορούν να χρησιμοποιηθούν όργανα επαγωγικά, κινητού σιδήρου και στρεπτού πηνίου με ανορθωτική διάταξη.

Κεφάλαιο 7 : Μέτρηση τάσης και ρεύματος

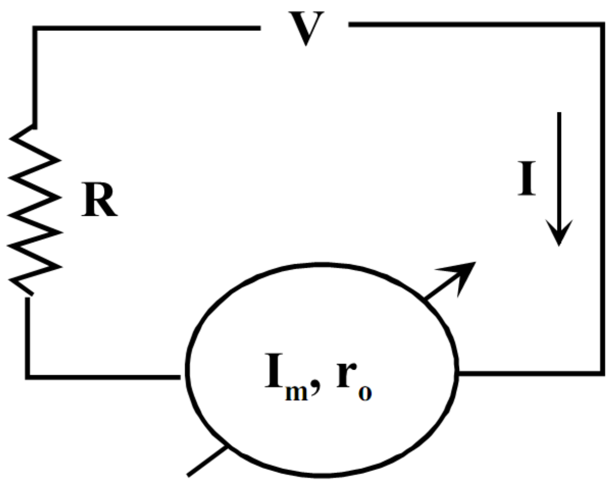
Επέκταση της κλίμακας οργάνων

Η περιοχή μέτρησης ενός οργάνου καθορίζεται από διάφορους παράγοντες που σχετίζονται με την κατασκευή του όπως η αρχή λειτουργίας του, η ανασταλτική διάταξη κλπ. Πολλές φορές όμως, η περιοχή μέτρησης του οργάνου δεν είναι ικανοποιητική ώστε να γίνει εφικτή η μέτρηση ενός μεγάλου μεγέθους (π.χ. διαθέτουμε βολτόμετρο 1 V και θέλουμε να μετρήσουμε την τάση μίας μπαταρία 9V). ***Σε αυτή την περίπτωση η μέτρηση γίνεται εφικτή μέσω της διαδικασίας επέκτασης της κλίμακας του οργάνου.***

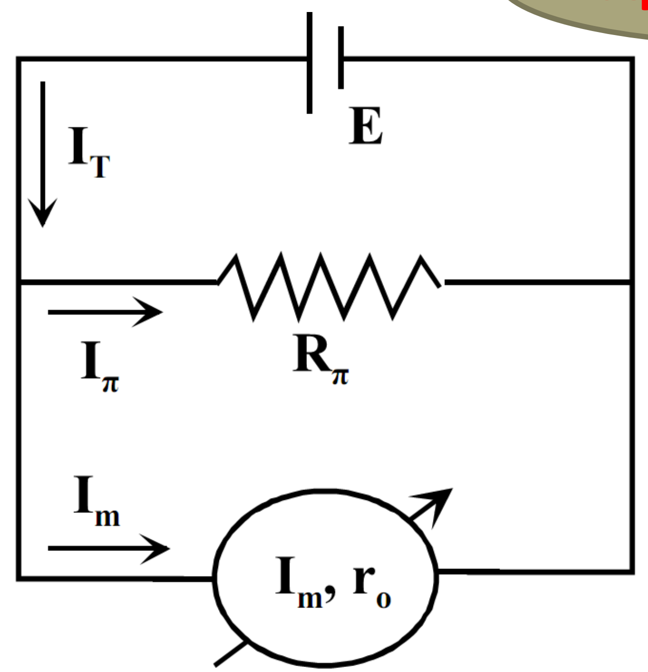
Κεφάλαιο 7 : Μέτρηση τάσης και ρεύματος

Επέκταση της κλίμακας οργάνων

Αμπερόμετρο



Σχήμα 7.1 Μέτρηση ρεύματος σε κύκλωμα



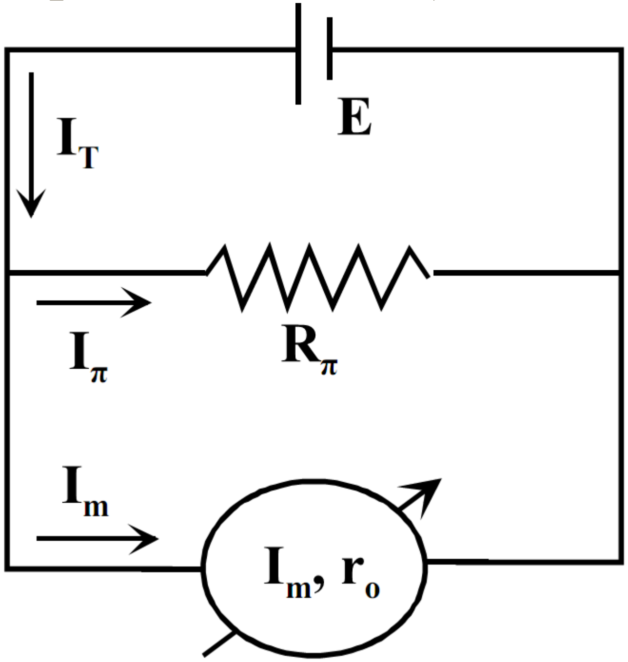
Σχήμα 7.3 Επέκταση κλίμακας αμπερομέτρου

Η επέκταση της κλίμακας του αμπερομέτρου ή αλλιώς η μέτρηση ενός ρεύματος I με I> Im επιτυγχάνεται **με την σύνδεση μιας κατάλληλης αντίστασης Rπ παράλληλα στο όργανο** η οποία ονομάζεται αντίσταση διακλάδωσης ή Shunt.

Κεφάλαιο 7 : Μέτρηση τάσης και ρεύματος

Αμπερόμετρο

Επέκταση της κλίμακας οργάνων



Σχήμα 7.3 Επέκταση κλίμακας αμπερομέτρου

Λόγω της αντίστασης διακλάδωσης:

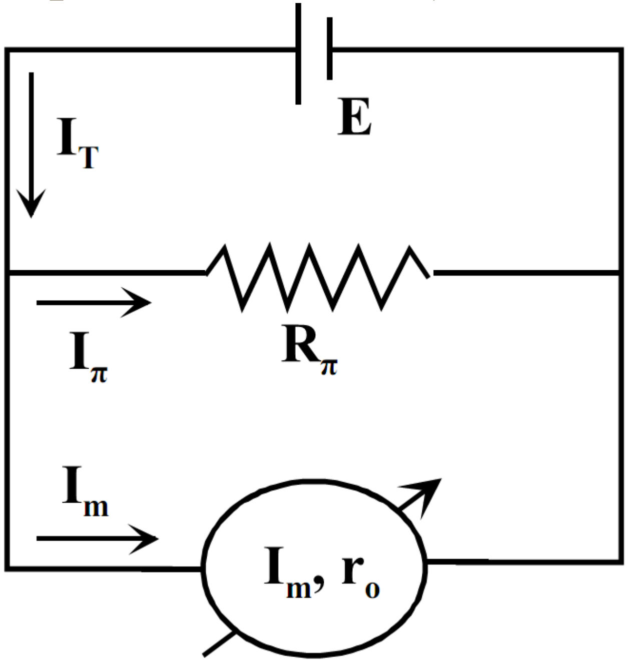
- το μέγιστο ρεύμα που διαρρέει το αμπερόμετρο παραμένει Im ενώ,
- η Rπ διαρρέεται από το υπόλοιπο ρεύμα I-Im

Για την επέκταση της κλίμακας αμπερομέτρου, η αντίσταση διακλάδωσης πρέπει να μικρότερη από την εσωτερική αντίσταση του οργάνου ώστε το περισσότερο ρεύμα να διέρχεται από την αντίσταση διακλάδωσης.

Κεφάλαιο 7 : Μέτρηση τάσης και ρεύματος

Αμπερόμετρο

Επέκταση της κλίμακας οργάνων



Σχήμα 7.3 Επέκταση κλίμακας αμπερομέτρου

α' νόμο Kirckcoff

$$I_T = I_\pi + I_m$$

νόμο του Ohm

$$I_\pi R_\pi = I_m r_0$$

$$I_T = I_m\left(1 + \frac{r_0}{R_\pi}\right)$$

συντελεστή επέκτασης κλίμακας $K = I/I_m$

Με βάση την τελευταία σχέση μπορεί να υπολογιστεί η κατάλληλη αντίσταση για πολλαπλασιασμό της κλίμακας του αμπερομέτρου επί παράγοντα K

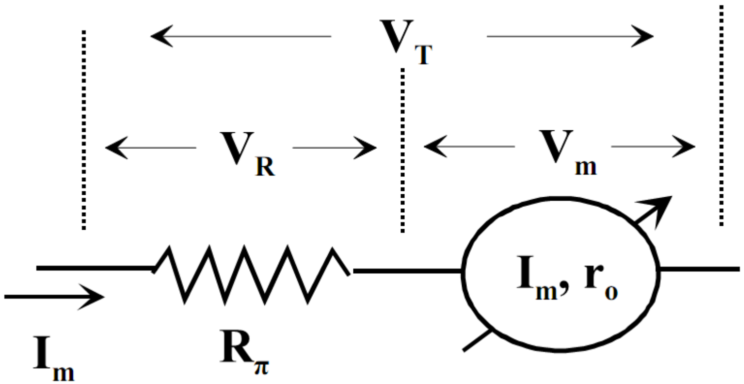
$$R_\pi = r_0/(K-1)$$

Παράδειγμα…

Κεφάλαιο 7 : Μέτρηση τάσης και ρεύματος

Επέκταση της κλίμακας οργάνων

Βολτόμετρο



Σχήμα 7.4 Επέκταση κλίμακας βολτομέτρου

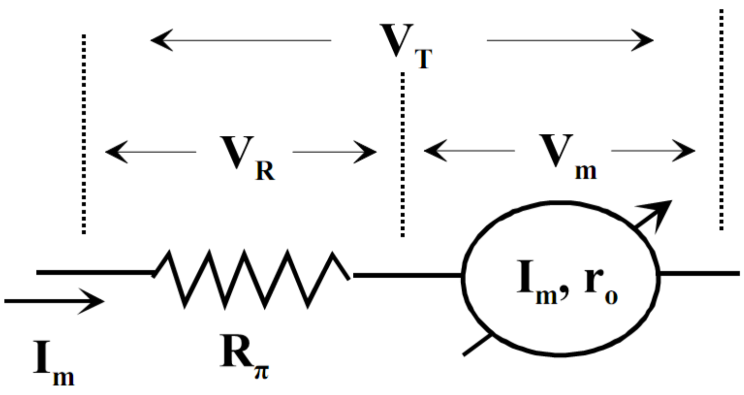
Έστω όργανο με ρεύμα μέγιστης απόκλισης Im και εσωτερικής αντίστασης r0 που δίνει βολτόμετρο μέγιστης ένδειξης Vm=Imr0.

Η επέκταση της κλίμακας του βολτομέτρου ή αλλιώς η μέτρηση μιας τάσης V με V>Vm επιτυγχάνεται με την σύνδεση μιας **κατάλληλης αντίστασης Rπ σε σειρά στο όργανο.**

Κεφάλαιο 7 : Μέτρηση τάσης και ρεύματος

Επέκταση της κλίμακας οργάνων

Βολτόμετρο



Σχήμα 7.4 Επέκταση κλίμακας βολτομέτρου

Έστω όργανο με ρεύμα μέγιστης απόκλισης Im και εσωτερικής αντίστασης r0 που δίνει βολτόμετρο μέγιστης ένδειξης Vm=Imr0.

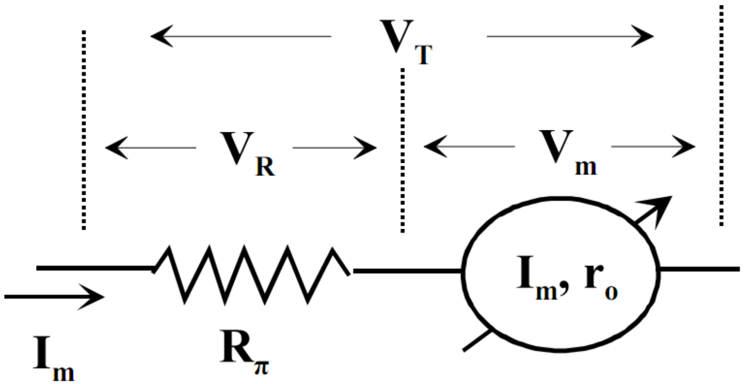
Η επέκταση της κλίμακας του βολτομέτρου ή αλλιώς η μέτρηση μιας τάσης V με V>Vm επιτυγχάνεται με την σύνδεση μιας **κατάλληλης αντίστασης Rπ σε σειρά στο όργανο.**

Λόγω της αντίστασης αυτής, **η μέγιστη τάση στα άκρα του βολτομέτρου παραμένει Vm ενώ η υπόλοιπη τάση V-Vm βρίσκεται στην Rπ**. Όπως είναι φανερό, για να επιτύχουμε επέκταση της κλίμακας βολτομέτρου, η Rπ πρέπει να μεγαλύτερη από την εσωτερική αντίσταση του οργάνου ώστε το μεγαλύτερο ποσοστό της τάσης να βρίσκεται στην Rπ.

Κεφάλαιο 7 : Μέτρηση τάσης και ρεύματος

Επέκταση της κλίμακας οργάνων

Βολτόμετρο



Σχήμα 7.4 Επέκταση κλίμακας βολτομέτρου

Να μετρηθεί η τάση VT με χρήση του οργάνου μέγιστης ένδειξης Vm=Imr0 και χρήση της αντίστασης Rπ.

νόμο του Ohm

$$V_T = I_m R_\pi + I_m r_0 = I_m (R_\pi + r_0) = \frac{V_m}{r_0}(R_\pi + r_0) = V_m\left(1 + \frac{R_\pi}{r_0}\right)$$

συντελεστή επέκτασης κλίμακας $K=V/V_m$,

αντίσταση για πολλαπλασιασμό της κλίμακας του βολτομέτρου επί παράγοντα Κ.

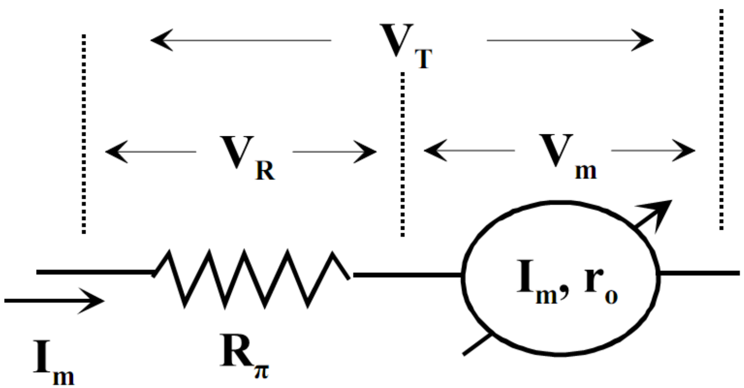
$$R_\pi = r_0(K-1)$$

Παράδειγμα…

Κεφάλαιο 7 : Μέτρηση τάσης και ρεύματος

Επέκταση της κλίμακας οργάνων

Βολτόμετρο



Σχήμα 7.4 Επέκταση κλίμακας βολτομέτρου

Να μετρηθεί η τάση VT με χρήση του οργάνου μέγιστης ένδειξης Vm=Imr0 και χρήση της αντίστασης Rπ.

νόμο του Ohm

$$V_T = I_m R_\pi + I_m r_0 = I_m\left(R_\pi + r_0\right) = \frac{V_m}{r_0}\left(R_\pi + r_0\right) = V_m\left(1 + \frac{R_\pi}{r_0}\right)$$

συντελεστή επέκτασης κλίμακας $K=V/V_m$,

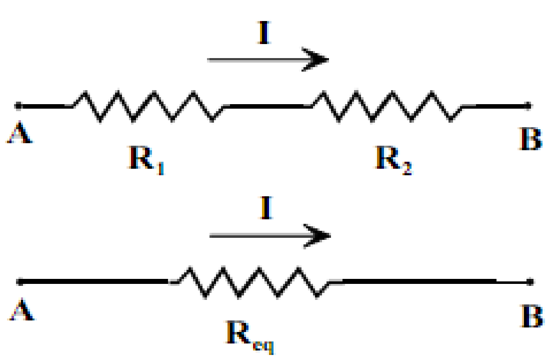
αντίσταση για πολλαπλασιασμό της κλίμακας του βολτομέτρου επί παράγοντα Κ.

$$R_\pi = r_0(K-1)$$

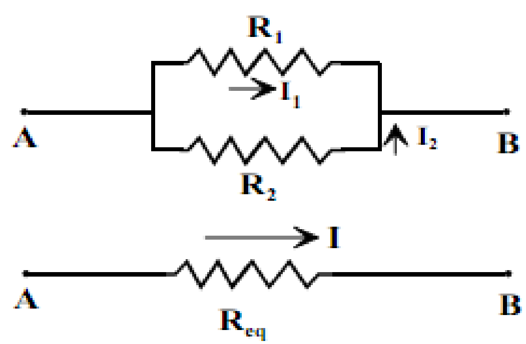
Παράδειγμα…

Κεφάλαιο 8 : Μέτρηση ωμικής αντίστασης

Κάθε συνδυασμό (σύνδεση) αντιστάσεων που υπακούουν τον νόμο του Ohm μπορούμε να τον αντικαταστήσουμε με μία μόνο αντίσταση, **την ισοδύναμη αντίσταση**. Η ισοδύναμη αντίσταση είναι τέτοια *ώστε να διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα με το συνδυασμό και στα άκρα της να υπάρχει η ίδια διαφορά δυναμικού.*



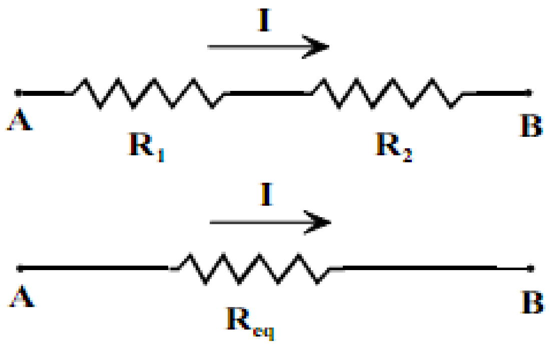
Σχήμα 6.1 Σύνδεση αντιστάσεων σε σειρά



Σχήμα 8.2 Σύνδεση αντιστάσεων παράλληλα

Κεφάλαιο 8 : Μέτρηση ωμικής αντίστασης

Σύνδεση σε σειρά



Σχήμα 6.1 Σύνδεση αντιστάσεων σε σειρά

$$V_{R1} = IR_1 \text{ και } V_{R2} = IR_2 \Rightarrow V_{AB} = IR_1 + IR_2$$

$$V_{AB} = V_{R\,eq} = IR_{eq} \Rightarrow IR_{eq} = IR_1 + IR_2 \Rightarrow$$

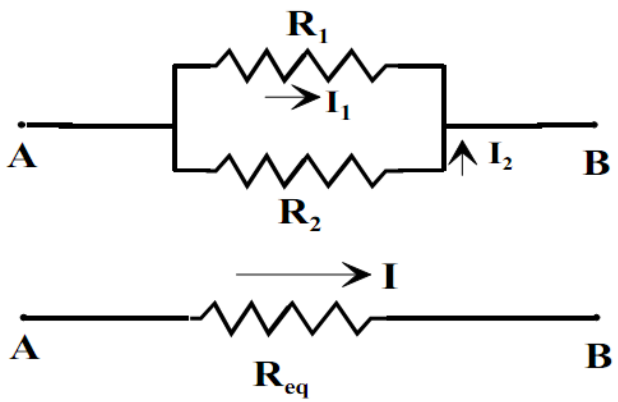
$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

ΙΔΙΟ ΡΕΥΜΑ!!!

Γενικά: $R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots + R_N$

Κεφάλαιο 8 : Μέτρηση ωμικής αντίστασης

Σύνδεση παράλληλα



Σχήμα 8.2 Σύνδεση αντιστάσεων παράλληλα

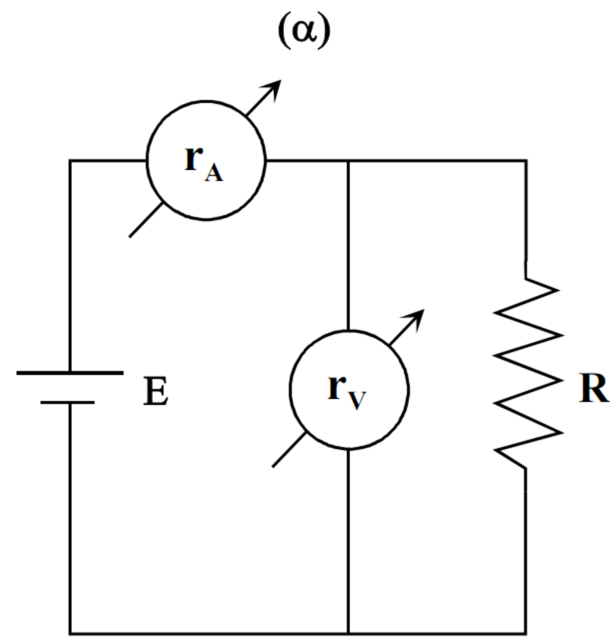
$$I_1 = \frac{V}{R_1},\ I_2 = \frac{V}{R_2} \text{ και } I_{eq} = \frac{V}{R_{eq}} \text{ άρα}$$

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ΙΔΙΟ ΤΑΣΗ!!!!

$$\text{Γενικά: } \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{R_N}$$

Κεφάλαιο 8 : Μέτρηση ωμικής αντίστασης



Στην περίπτωση (α) το αμπερόμετρο ***μετρά όχι μόνο το ρεύμα στην αντίσταση αλλά και το ρεύμα που διαρρέει το βολτόμετρο***.

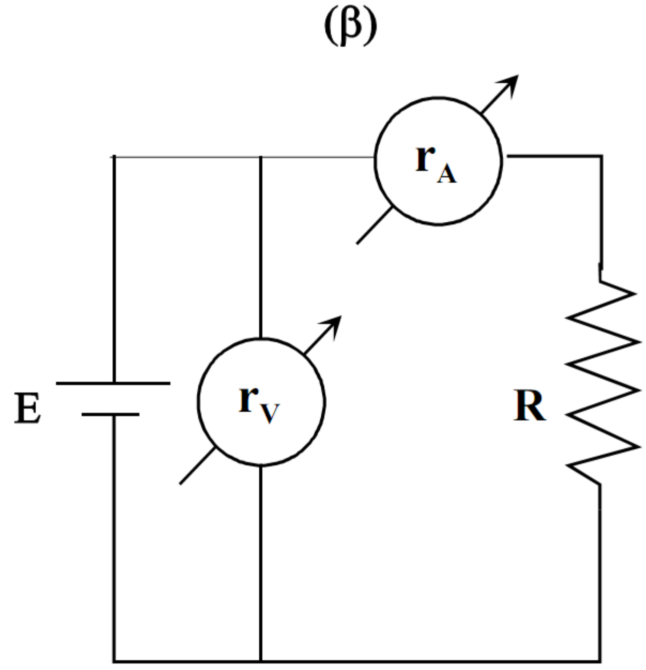
$$V_R = V,\ I_R = I - V/r_V,$$

διόρθωση $$R = \frac{V}{I - V/r_V}$$

σφάλμα $$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R - R_{\iota\sigma o\delta}}{R} = \frac{R - \dfrac{R r_V}{R + r_V}}{R} = \frac{R}{R + r_V} = \frac{1}{1 + \dfrac{r_V}{R}}$$

**Επομένως στην περίπτωση που το βολτόμετρο συνδέεται στην αντίσταση, το σχετικό σφάλμα της μέτρησης είναι μικρό για μικρές αντιστάσεις.*

Κεφάλαιο 8 : Μέτρηση ωμικής αντίστασης



στην περίπτωση (β) το βολτόμετρο μετράει την πτώση τάσης στα άκρα του αμπερομέτρου. Θα ισχύει

$$V_R = V - Ir_A,\ I_R = I,$$

όπου VR και IR η τάση και το ρεύμα στην αντίσταση. Επομένως, για να αποφύγουμε τα σφάλματα θα πρέπει να γίνει η παρακάτω διόρθωση:

διόρθωση

$$R = \frac{V - Ir_A}{I}$$

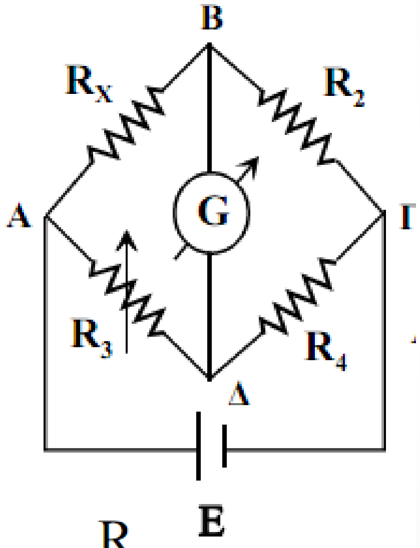
σφάλμα

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R - R_{\iota\sigma o\delta}}{R} = \frac{R - (R + r_A)}{R} = \frac{r_A}{R}$$

**Επομένως στην περίπτωση που το αμπερόμετρο συνδέεται στην αντίσταση, το σχετικό σφάλμα της μέτρησης είναι μικρό για μεγάλες αντιστάσεις.*

Κεφάλαιο 8 : Μέτρηση ωμικής αντίστασης

Μέτρηση της ωμικής αντίστασης με γέφυρα



Με μεταβολή της αντίστασης R3 επιτυγχάνουμε το μηδενισμό του ρεύματος στη γραμμή ΒΔ που αλλιώς ονομάζεται ισορροπία της γέφυρας.

$$I_{AB}=I_{B\Gamma},\ I_{A\Delta}=I_{\Delta\Gamma},\ V_{AB}=V_{A\Delta},\ V_{\Gamma B}=V_{\Gamma\Delta}$$

$$\frac{V_{AB}}{V_{B\Gamma}}=\frac{V_{A\Delta}}{V_{\Gamma\Delta}}\Rightarrow\frac{I_{AB}R_X}{I_{B\Gamma}R_2}=\frac{I_{A\Delta}R_3}{I_{\Gamma\Delta}R_4}\Rightarrow\frac{R_X}{R_2}=\frac{R_3}{R_4}\Rightarrow R_X=R_2\frac{R_3}{R_4}$$

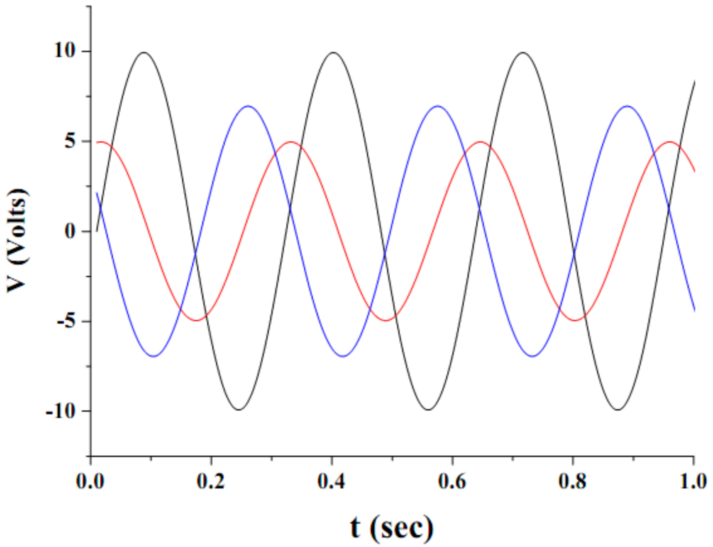
Κεφάλαιο 9: Μιγαδικοί Αριθμοί

Σε κυκλώματα DC, οι ηλεκτρικές μεγέθη εξαρτώνται αποκλειστικά από τις ωμικές αντιστάσεις, φυσικά μετά την ολοκλήρωση πιθανών μεταβατικών φαινομένων λόγω παρουσίας πηνίων και πυκνωτών, και δεν υφίστανται διαφορές φάσης μεταξύ ρεύματος και τάσης. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα **τον χειρισμό των DC ηλεκτρικών ποσοτήτων ως μονόμετρων ποσοτήτων**, οπότε για τις σχετικές πράξεις είναι αρκετή η απλή αριθμητική. Σε αντίθεση, στα κυκλώματα AC, ο ρόλος των πηνίων και των πυκνωτών είναι πιο ουσιαστικός καθώς και τα ηλεκτρικά μεγέθη επηρεάζουν και προκαλούν **διαφορές φάσεις μεταξύ ρευμάτων και τάσεων**. Επομένως, ο χειρισμός των ηλεκτρικών μεγεθών σε κυκλώματα AC είναι πιο περίπλοκη και υπάρχουν τρεις δυνατότητες για την περιγραφή τους. Η πρώτη είναι η **ημιτονοειδής, η δεύτερη αφορά περιστρεφόμενα διανύσματα, ενώ η τρίτη βασίζεται στους μιγαδικούς αριθμούς**

Κεφάλαιο 9: Μιγαδικοί Αριθμοί

Ημιτονοειδής αναπαράσταση

(α) η **τιμή** του ρεύματος (τάσης) μεταβάλλεται με το χρόνο παίρνοντας θετικές και αρνητικές τιμές,
(β) η περιοδική εξέλιξη με περίοδο **T**
(γ) *το ολοκλήρωμα των βασικών μεγεθών σε μία περίοδο είναι μηδέν*.



Σχήμα 9.1 Τριγωνομετρική αναπαράσταση εναλλασσόμενων μεγεθών

$$I=I_0\eta\mu(\omega t+\varphi)$$

I_0 είναι το μέγιστο πλάτος του ρεύματος

I είναι η στιγμιαία τιμή του ρεύματος σε χρόνο t

ω είναι η κυκλική συχνότητα (ω=2π/T, με T=1/f όπου f είναι η συχνότητα)

φ είναι η αρχική φάση

ωt+φ είναι η φάση κατά την χρονική στιγμή t

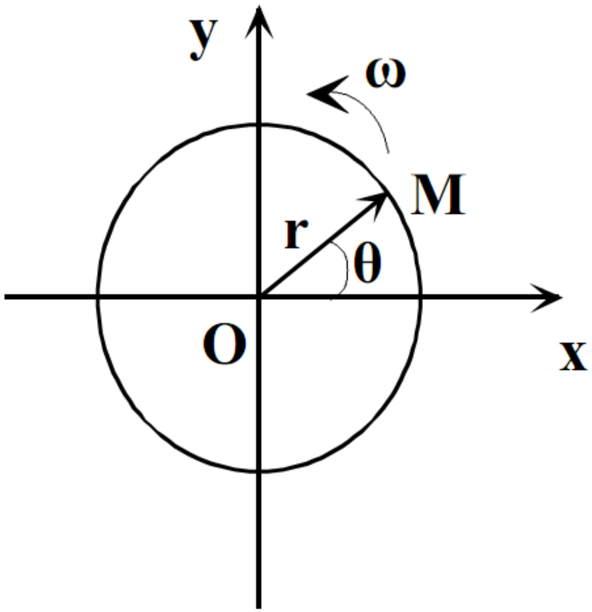
Κεφάλαιο 9: Μιγαδικοί Αριθμοί

Αναπαράσταση με περιστρεφόμενα διανύσματα

Ένας ευκολότερος τρόπος να διαχειριστούμε εναλλασσόμενα μεγέθη είναι τα περιστρεφόμενα διανύσματα. Έστω οριζόντιο σύστημα αξόνων και ένα διάνυσμα ΟΜ με μήκος r το οποίο περιστρέφεται αριστερόστροφα με γωνιακή ταχύτητα ω. Σε κάποια χρονική στιγμή t, το διάνυσμα σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x. Τότε, οι x, y προβολές του διανύσματος θα δίνονται:

$$x = r\,\text{συν}\theta \quad \text{και} \quad y = r\,\text{ημ}\theta.$$

$$\theta = \omega t.$$



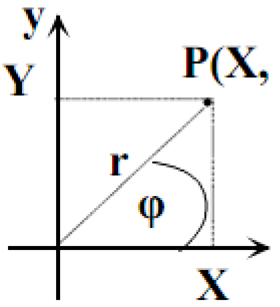
Σχήμα 9.2 Περιστρεφόμενο διάνυσμα

Κεφάλαιο 9: Μιγαδικοί Αριθμοί

Αναπαράσταση με μιγαδικούς αριθμούς

Είναι γνωστό ότι οι πραγματικοί αριθμοί Χ θεωρούνται σημεία σε μία ευθεία, έστω οριζόντια. Αν προσθέσουμε και μία κατακόρυφη ευθεία και σε κάθε σημείο της αντιστοιχήσουμε ένα φανταστικό αριθμό

jY



Σχήμα 9.5 Αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού

Μιγαδικός Αριθμός $Z = X + jY$

Μέτρο $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$,

Φάση $\varepsilon\varphi\varphi = Y/X$

Ημιτονοειδής μορφή

$r\sigma\upsilon\nu\varphi + jr\eta\mu\varphi$

Πολική μορφή

$re^{j\varphi}$

Κεφάλαιο 9: Μιγαδικοί Αριθμοί

Α) Για πρόσθεση ή αφαίρεση μιγαδικών αριθμών χρησιμοποιούμε την καρτεσιανή μορφή. Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

$$Z_1 \pm Z_2 = (X_1 \pm X_2) + j(Y_1 \pm Y_2)$$

Β) Για πολλαπλασιασμό και διαίρεση χρησιμοποιούμε την πολική μορφή. Ισχύει:

$$Z_1 Z_2 = (r_1 r_2) e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Γ) Στο παραπάνω πλαίσιο είναι χρήσιμο να θυμάται κάποιος ποιος μετατρέπεται η μία μορφή στην άλλη:

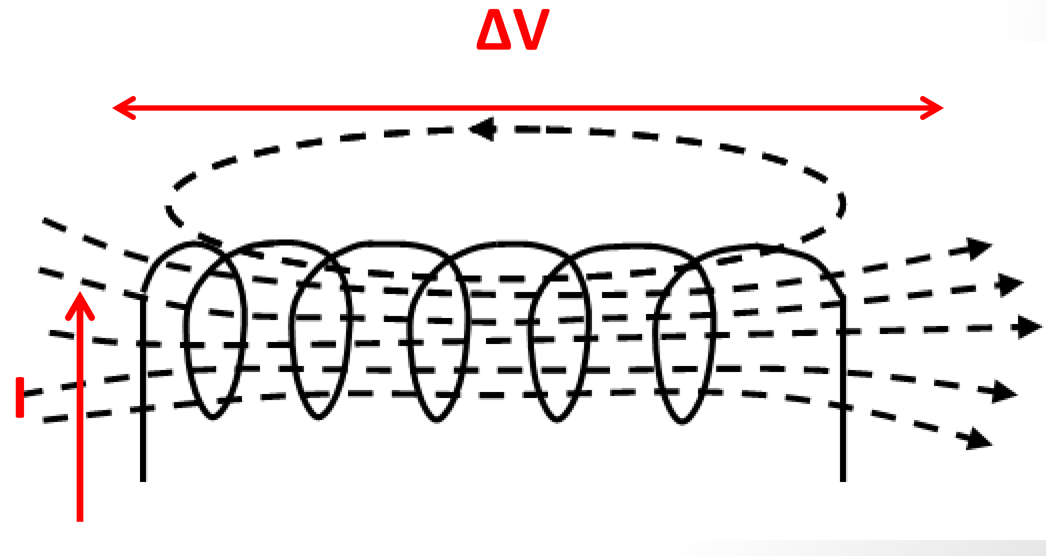
Καρτεσιανή →Πολική		**Πολική → Καρτεσιανή**	
Z=X+jY	$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$ εφφ=Y/X	$re^{j\varphi}$	Z= (rσυνφ)+j(rημφ)

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

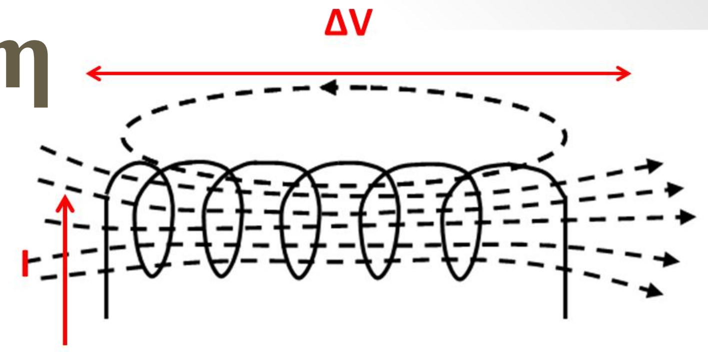
Ορισμός αυτεπαγωγής

Σύμφωνα με το νόμο Faraday, αν σε ένα ακίνητο κύκλωμα (π.χ. ένα πηνίο) μεταβάλλεται η μαγνητική ροή με το χρόνο, τότε επάγεται σε αυτό ΗΕΔ. Αν η μεταβολή της ροής οφείλεται σε μεταβολή του ρεύματος του ίδιου του κυκλώματος, τότε παρουσιάζεται το εξής φαινόμενο: η μεταβολή του ρεύματος σε ένα πηνίο προκαλεί επαγόμενη ΗΕΔ σε αυτό. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται αυτεπαγωγή.

σε ένα κύκλωμα μπορούμε να έχουμε επαγόμενη ΗΕΔ λόγω μεταβολής του ρεύματος που το διαρρέει.



Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής



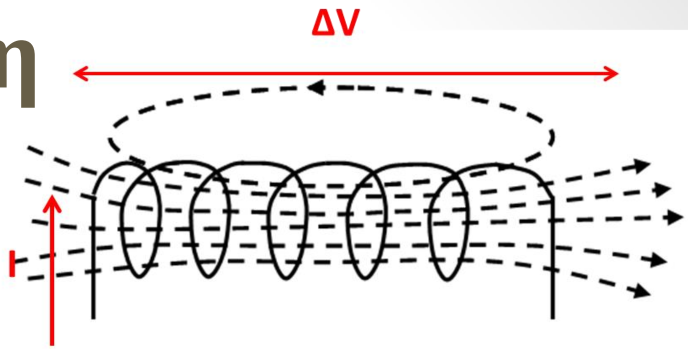
Κύκλωμα R-L στο συνεχές (DC).

Η παρουσία αυτεπαγωγής σε ένα κύκλωμα συνεχούς ρεύματος έχει σαν αποτέλεσμα την εξάρτηση των ηλεκτρικών μεγεθών από το χρόνο. Σαν παράδειγμα, σε κύκλωμα με αυτεπαγωγή L, ωμική αντίσταση R και πηγή E, το ρεύμα δεν παίρνει αμέσως την μέγιστη του τιμή αλλά να αυξάνεται ακολουθώντας μία εξίσωση της μορφής:

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)$$

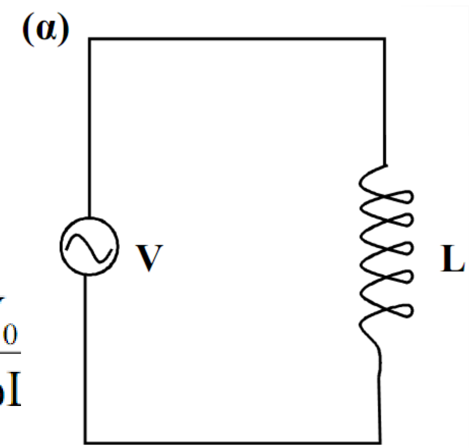
Δηλαδή, η αυτεπαγωγή σε κύκλωμα συνεχούς έχει σαν αποτέλεσμα το ρεύμα να πλησιάζει ασυμπτωτικά την τελική του τιμή. Όσο μεγαλύτερη είναι η αυτεπαγωγή, τόσο καθυστερεί το ρεύμα να πάρει την τελική του τιμή, με την διαδικασία να εξαρτάται από το λόγο L/R. ¨Όμως η τελική τιμή του ρεύματος δεν εξαρτάται από την αυτεπαγωγή αλλά μόνο από την ωμική αντίσταση.

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής



Κύκλωμα R-L στο εναλλασσόμενο (AC).

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{di}{dt} = 0$$



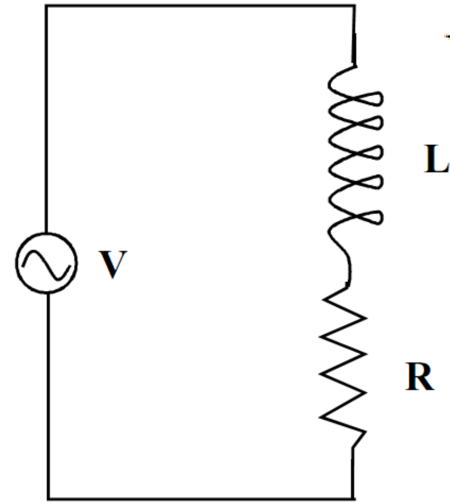
Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I = Ae^{j\omega t}$

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{d}{dt}\left(Ae^{j\omega t}\right) = 0 \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - j\omega L A e^{j\omega t} = 0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{j\omega I}$$

$$I = Ae^{j\omega t} \Rightarrow I = \frac{V_0}{j\omega L} e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\omega L} e^{j\omega t - \pi/2}$$

Το ρεύμα καθυστερεί κατά π/2 σε σχέση με την τάση. Επίσης η ποσότητα ωL παρουσιάζει ρόλο αντίστοιχο με την ωμική αντίσταση (ισούται με το λόγο τάση/ρεύμα) και ονομάζεται επαγωγική αντίσταση που στη μιγαδική μορφή δίνεται από **xL=jωL.** Όμως η συμπεριφορά αυτή εμφανίζεται μόνο στο εναλλασσόμενο καθώς στο συνεχές (**ω=0**) η τιμή της επαγωγικής αντίστασης είναι μηδέν.

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής



$V=L(di/dt)$

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{di}{dt} = iR$$

Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I=Ae^{j\omega t}$

$$V_0 e^{j\omega t} - L\frac{d}{dt}\left(Ae^{j\omega t}\right) = iR \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - j\omega L A e^{j\omega t} = RAe^{j\omega t} \Rightarrow A = \frac{V_0}{R + j\omega L}$$

$$I = \frac{V_0}{R + j\omega L} e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j\omega t - \varphi}$$

Η αντίσταση του κυκλώματος ονομάζεται εμπέδηση, είναι συνδυασμός της ωμικής και της επαγωγικής αντίστασης $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$

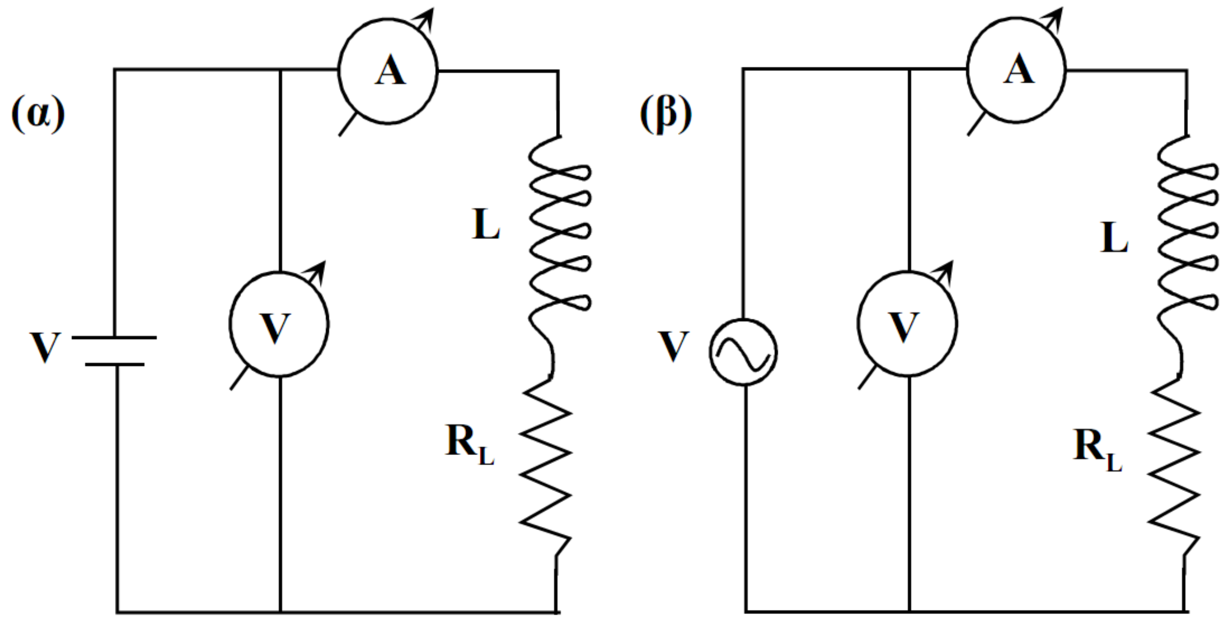
(η μιγαδική μορφή είναι $z_L=R+j\omega L$).

το ρεύμα καθυστερεί σε σχέση με την τάση κατά γωνία φ $\varepsilon\varphi\varphi=\omega L/R$.

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

Μέτρηση με βολτόμετρο και αμπερόμετρο.

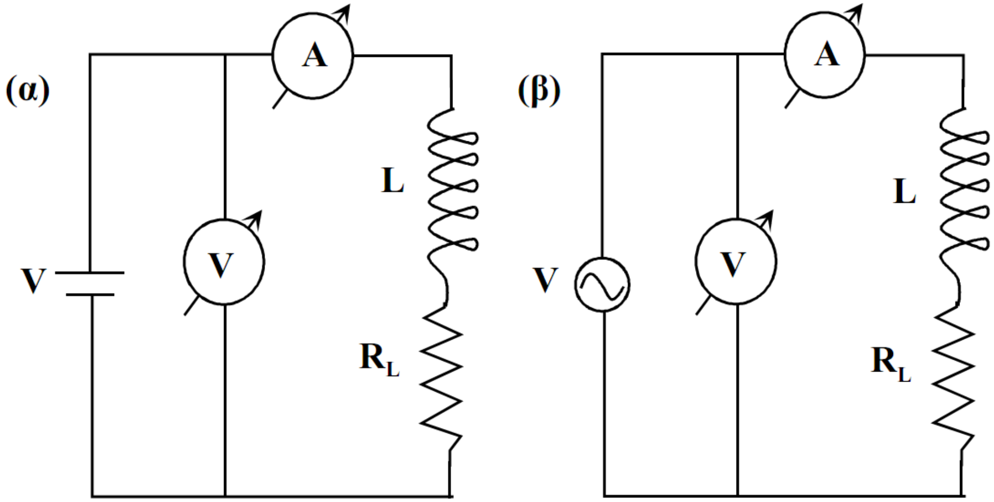
Η μέτρηση μιας αυτεπαγωγής μπορεί απλά να επιτευχθεί με αμπερόμετρο και βολτόμετρο όταν μετρηθούν τα ηλεκτρικά μεγέθη του κυκλώματος διαδοχικά για συνεχή και εναλλασσόμενη τάση. Έστω άγνωστο πηνίο L, RL του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε τα χαρακτηριστικά.



Σχήμα 10.2 Μέτρηση αυτεπαγωγής με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

Μέτρηση με βολτόμετρο και αμπερόμετρο.



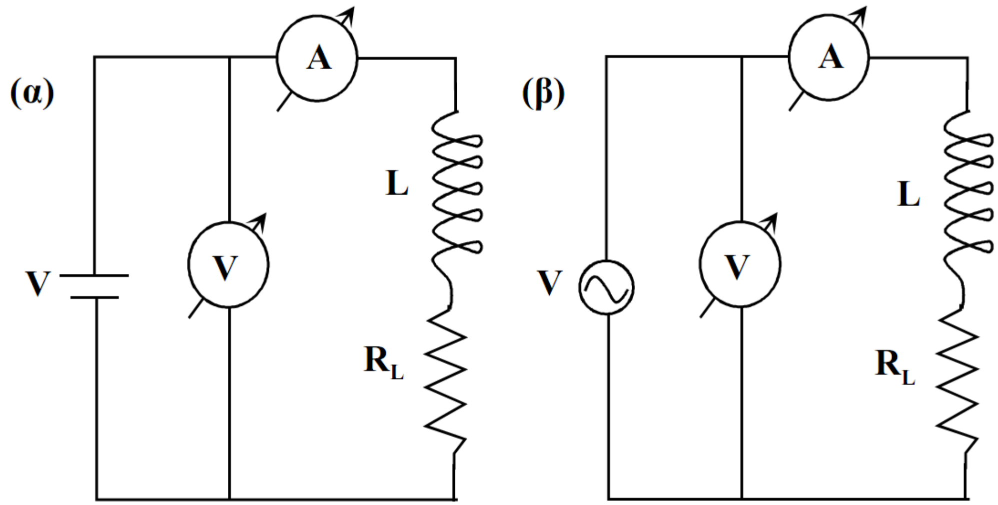
Σχήμα 10.2 Μέτρηση αυτεπαγωγής με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

Κύκλωμα R-L στο συνεχές (DC).

$$R_L = \frac{V_{DC}}{I_{DC}}$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

Μέτρηση με βολτόμετρο και αμπερόμετρο.



Σχήμα 10.2 Μέτρηση αυτεπαγωγής με βολτόμετρο και αμπερόμετρο

Κύκλωμα R-L στο συνεχές (AC).

$$z_L = \frac{V_{AC}}{I_{AC}} \quad z_L = \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2}$$

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{V_{AC}}{I_{AC}}\right)^2 - \left(\frac{V_{DC}}{I_{DC}}\right)^2}$$

Κεφάλαιο 10 : Μέτρηση αυτεπαγωγής

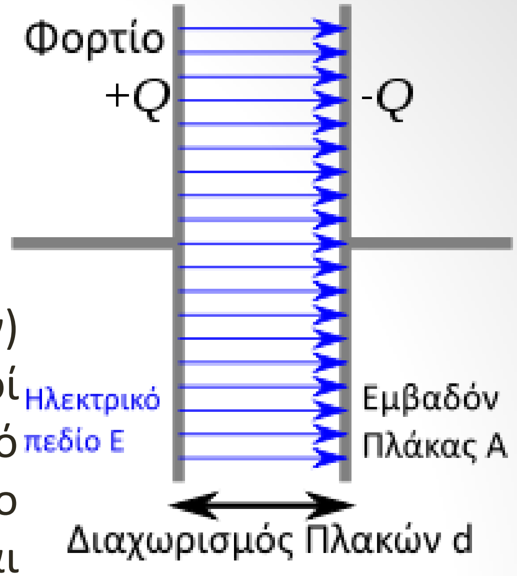
1) Αν σε ένα κύκλωμα η τάση και το ρεύμα δίνονται από τις σχέσεις:

$$V=150ημ(500t+10°),\ I=13.42ημ(500t-53.4°)$$

να βρείτε τα στοιχεία του κυκλώματος.

2) Σε κύκλωμα RL έχουμε R=20Ω, L=60 mH και φ=80°. Να βρεθεί το ω

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας



Πυκνωτή ονομάζουμε τη διάταξη δύο αγωγών (οπλισμών) που διαχωρίζονται από κάποιο μονωτή. Οι δύο αγωγοί έχουν ίσο και αντίθετο φορτίο, όπου ο αγωγός με το θετικό φορτίο έχει μεγαλύτερο δυναμικό. Το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών άρα και η διαφορά δυναμικού είναι ανάλογο του φορτίου (νόμος Gauss). Επομένως ο λόγος (φορτίο)/(διαφορά δυναμικού) είναι σταθερή ποσότητα που ονομάζεται χωρητικότητα C **(C=Q/V)** με μονάδα στο SI το ***Farad (F).*** Ο απλούστερος τύπος πυκνωτή είναι ο επίπεδος πυκνωτής: δύο παράλληλες επίπεδες αγώγιμες πλάκες, με εμβαδόν A και σε απόσταση d (με A>>d). Λόγω έλξης των αντιθέτων φορτίων, τα περισσότερα φορτία θα είναι στις απέναντι εσωτερικές επιφάνειες των πλακών. Το ηλεκτρικό πεδίο E στο χώρο μεταξύ των πλακών είναι Eπυκν=σ/ε0, άρα η χωρητικότητα μπορεί να υπολογιστεί σε:

$$V_{AB} = E_{\pi\upsilon\kappa\nu} d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Q/A}{\varepsilon_0} d \Rightarrow C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

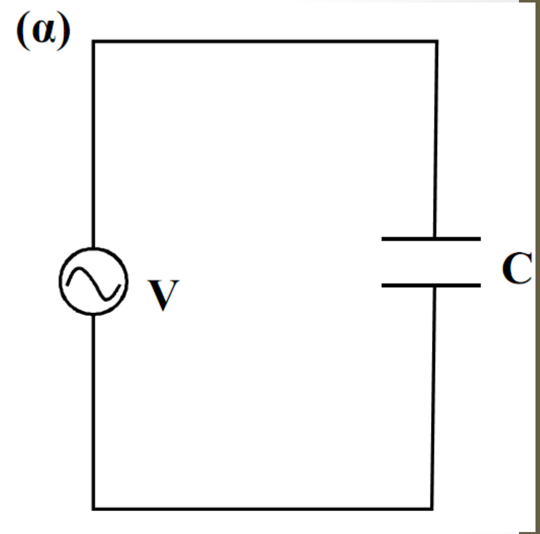
Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας

Κύκλωμα R-C στο συνεχές.
Η παρουσία χωρητικότητας σε ένα κύκλωμα συνεχούς έχει επίσης σαν αποτέλεσμα την εξάρτηση των ηλεκτρικών μεγεθών από το χρόνο. Σαν παράδειγμα,

$$i = \frac{E}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC}$$

Επομένως, η χωρητικότητα σε κύκλωμα συνεχούς έχει σαν αποτέλεσμα το ρεύμα να τείνει να μηδενιστεί, με τη διαδικασία να εξαρτάται από το γινόμενο RC. Δηλαδή ο πυκνωτής στο συνεχές λειτουργεί σαν διακόπτης.

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας



Κύκλωμα R-C στο εναλλασσόμενο.

$$V_0 e^{j\omega t} - \frac{q}{C} = 0$$

Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I = Ae^{j\omega t}$

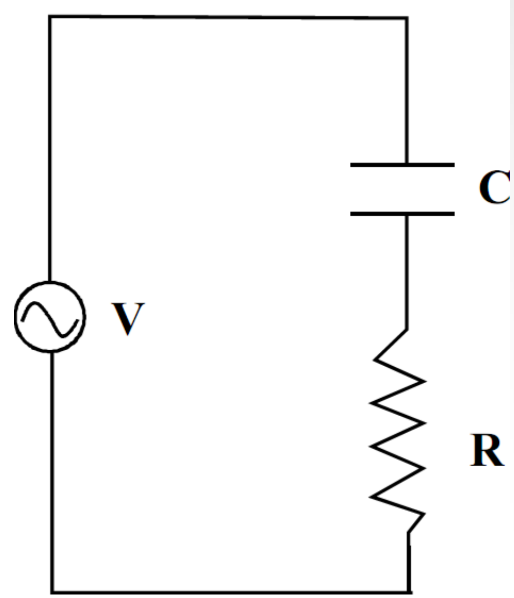
$$V_0 e^{j\omega t} - \frac{1}{C}\int Ae^{j\omega t}dt = 0 \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - \frac{1}{j\omega C}Ae^{j\omega t} = 0 \Rightarrow A = j\omega C V_0$$

$$I = j\omega C V_0 e^{j\omega t} = \omega C V_0 e^{j\omega t + \pi/2}$$

φαίνεται ότι το ρεύμα προηγείται κατά π/2 της τάσης.

Η ποσότητα 1/ωC παρουσιάζει ρόλο αντίστοιχο της αντίστασης και ονομάζεται χωρητική αντίσταση που στη μιγαδική μορφή δίνεται από xC=-j(1/ωC). Όμως η συμπεριφορά αυτή εμφανίζεται μόνο στο εναλλασσόμενο καθώς στο συνεχές (ω=0) η τιμή της χωρητικής αντίστασης είναι άπειρη και ο πυκνωτής, όπως ήδη αναφέρθηκε, λειτουργεί σαν διακόπτης.

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας



$$V_0 e^{j\omega t} - \frac{q}{C} = iR$$

Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα δίνεται από εξίσωση της μορφής $I = Ae^{j\omega t}$

$$V_0 e^{j\omega t} - \frac{1}{C}\int Ae^{j\omega t}dt = iR \Rightarrow V_0 e^{j\omega t} - \frac{1}{j\omega C}Ae^{j\omega t} = ARe^{j\omega t} \Rightarrow A = \frac{V_0}{R - j\,{}^{1}\!/_{\omega C}}$$

$$I = \frac{V_0}{R - j\,{}^{1}\!/_{\omega C}}e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left({}^{1}\!/_{\omega C}\right)^2}}e^{j\omega t + \varphi}$$

Η εμπέδηση του κυκλώματος είναι συνδυασμός της ωμικής και της χωρητικής αντίστασης και δίνεται από τη σχέση $\sqrt{R^2 + \left({}^{1}\!/_{\omega C}\right)^2}$

$z_C = R - j/\omega C)$ $\quad$ $\varepsilon\varphi\varphi = 1/(\omega CR)$

Κεφάλαιο 11 : Μέτρηση χωρητικότητας

1) Αν σε ένα κύκλωμα η τάση και το ρεύμα δίνονται από τις σχέσεις:

$$V=311\eta\mu(2500t+170°),\ I=15.5\eta\mu(2500t-145°)$$

2) Σε κύκλωμα RC έχουμε $R=20\Omega$, $C=5\ \mu F$ και $\varphi=-80°$. Να βρεθεί το ω.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

$$I = Ae^{i\omega t}, V = Be^{i(\omega t+\vartheta)}$$

$$\frac{V}{I} = \frac{B}{A}e^{i\vartheta} = \frac{B}{A}(\cos\vartheta + j\sin\vartheta) = \overset{\substack{\alpha\nu\tau\iota\sigma\tau\alpha\sigma\eta \\ resis\tan ce}}{\alpha} + j\overset{\substack{\alpha\nu\tau\iota\delta\rho\alpha\sigma\eta \\ reac\tan ce}}{\beta} = \varepsilon\mu\pi\varepsilon\delta\eta\sigma\eta\ impedance$$

Αντίσταση πηνίου: 0 Ω

Αντίδραση πηνίου (επαγωγική): $X_L = \omega L$

Αντίσταση πυκνωτή: 0 Ω

Αντίδραση πυκνωτή (χωρητική): $X_c = -\frac{1}{\omega C}$

Το μέτρο της εμπέδησης καλείται σύνθετη αντίσταση

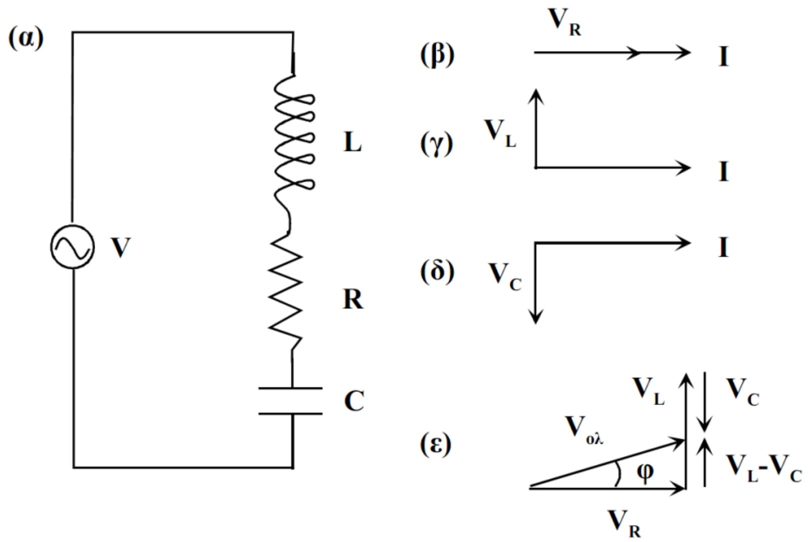
Σύνθετη αντίσταση πηνίου : $\|j\omega L\| = \sqrt{\omega^2 L^2} = \omega L$

Σύνθετη αντίσταση πυκνωτή : $\left\|-j\frac{1}{\omega C}\right\| = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{1}{\omega C}$

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

Κύκλωμα RLC σε σειρά

- πηνίο L,
- ωμική αντίσταση R
- χωρητικότητα C
- πηγή τροφοδοσίας $V=V_0e^{j\omega t}$



Σχήμα 12.1 Κύκλωμα RLC σε σειρά

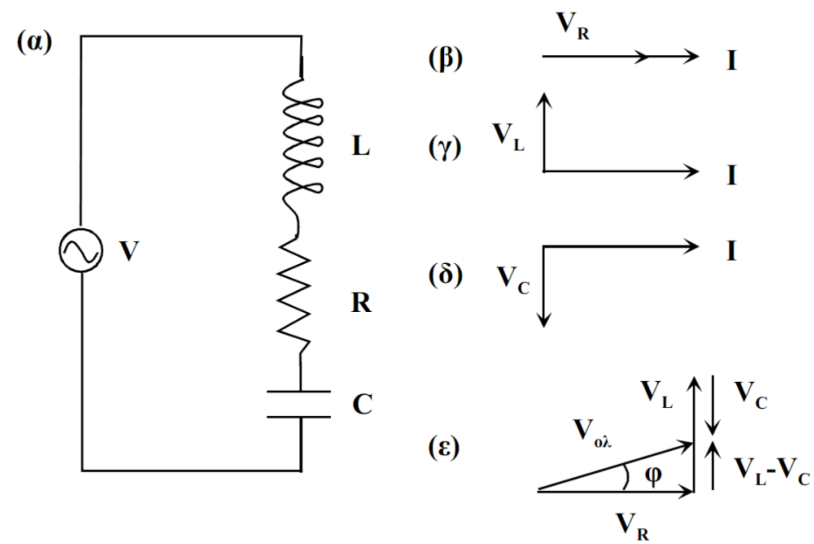
Αν υποθέσουμε ότι το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα I:

- η τάση στα άκρα της ωμικής αντίστασης **θα είναι συμφασική** με το ρεύμα
- η τάση στα άκρα της αυτεπαγωγής **θα προηγείται του ρεύματος κατά π/2**
- η τάση στα άκρα της χωρητικότητας **θα καθυστερεί σε σχέση με το ρεύμα κατά π/2**

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

Κύκλωμα RLC σε σειρά

- πηνίο L,
- ωμική αντίσταση R
- χωρητικότητα C
- πηγή τροφοδοσίας $V=V_0e^{j\omega t}$



Σχήμα 12.1 Κύκλωμα RLC σε σειρά

Αν το ρεύμα I περιγράφεται από την εξίσωση $I=I_0e^{j\omega t}$, ο νόμος τάσεων Kirchhoff

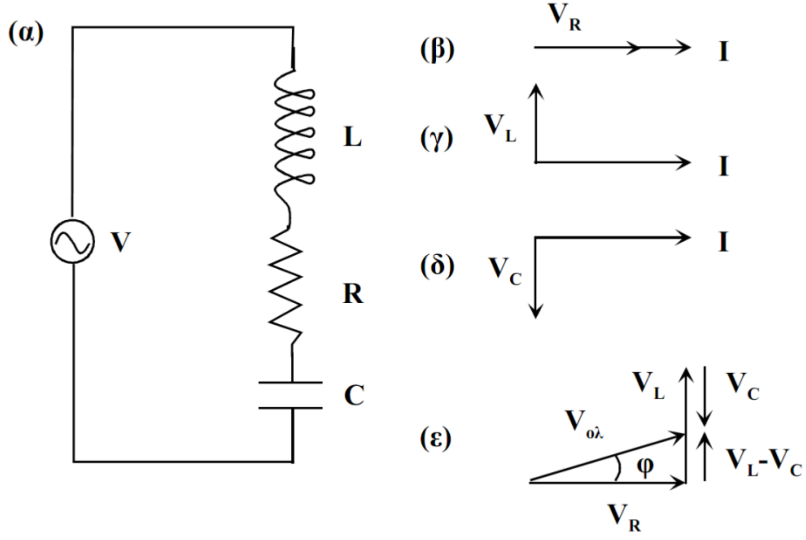
$$V_0e^{j\omega t} - L\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\int i\,dt = iR \Rightarrow V_0e^{j\omega t} - j\omega L I_0 e^{j\omega t} - \frac{1}{j\omega C} I_0 e^{j\omega t} = RI_0e^{j\omega t}$$

$$I_0 = \frac{V_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

Κύκλωμα RLC σε σειρά

- πηνίο L,
- ωμική αντίσταση R
- χωρητικότητα C
- πηγή τροφοδοσίας $V=V_0e^{j\omega t}$



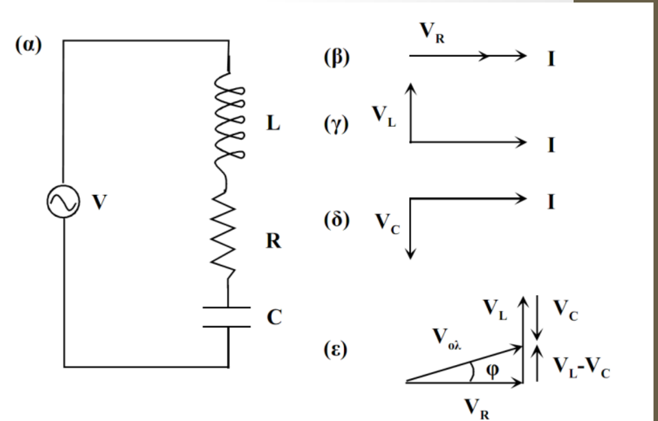
$$V_0e^{j\omega t}-L\frac{di}{dt}-\frac{1}{C}\int idt=iR\Rightarrow V_0e^{j\omega t}-j\omega LI_0e^{j\omega t}-\frac{1}{i\omega C}I_0e^{j\omega t}=RI_0e^{j\omega t}$$

$$I_0=\frac{V_0}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$I=\frac{V_0}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}e^{j\omega t}=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}e^{j\omega t-\varphi}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{\omega L-1/\omega C}{R}$$

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός



Σχήμα 12.1 Κύκλωμα RLC σε σειρά

Κύκλωμα RLC σε σειρά

$$I_0 = \frac{V_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$I = \frac{V_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j\omega t - \varphi} \qquad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

Στο κύκλωμα RLC, η εμπέδηση του κυκλώματος είναι συνδυασμός της **ωμικής, της επαγωγικής και της χωρητικής αντίστασης** και δίνεται από τη σχέση

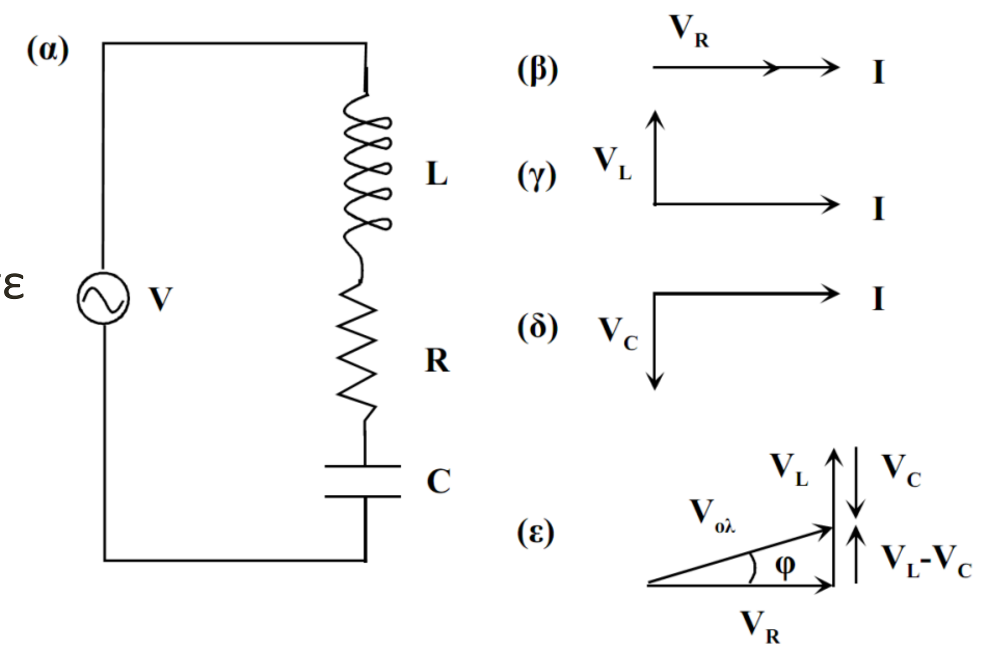
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$ η μιγαδική μορφή είναι $z=R+j(\omega L-1/\omega C)$

Επομένως, αν η επαγωγική αντίσταση είναι μεγαλύτερη από την χωρητική, η τάση θα προηγείται του ρεύματος και το κύκλωμα θα έχει επαγωγική συμπεριφορά ενώ θα έχει χωρητική συμπεριφορά για μεγαλύτερη χωρητική αντίσταση.

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

Κύκλωμα RLC σε σειρά

Ένας άλλος μαθηματικός τρόπος προσέγγισης του κυκλώματος RLC σε σειρά είναι **με διανύσματα**



Σχήμα 12.1 Κύκλωμα RLC σε σειρά

η ολική τάση δίνεται από τη σχέση:

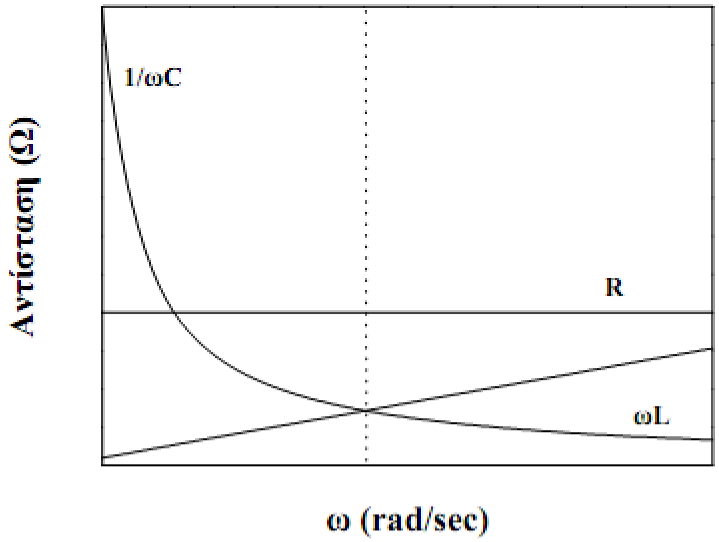
$$V_{ολ} = \sqrt{V_R^2 + \left(V_L - V_C\right)^2}$$

$V_{ολ}=Iz$, $V_R=IR$, $V_L=Ix_L$ και $V_C=Ix_C$,

$$Iz = \sqrt{(IR)^2 + \left(Ix_L - Ix_C\right)^2} \Rightarrow z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}$$

$$εφφ = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

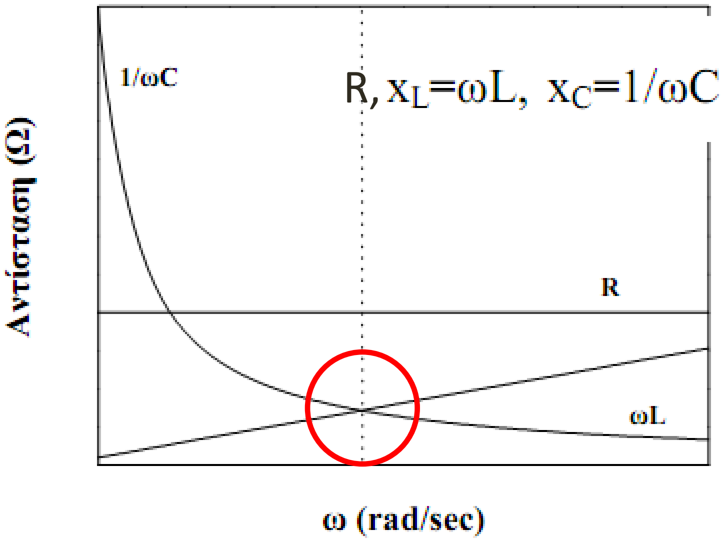


Σχήμα 12.3 Μεταβολή της αντίστασης με τη συχνότητα

R, $x_L=\omega L$, $x_C=1/\omega C$

Η ωμική αντίσταση δεν μεταβάλλεται με την γωνιακή συχνότητα, οι αντίστοιχες επαγωγική και χωρητική εξαρτώνται από την γωνιακή συχνότητα του εναλλασσομένου. Η μεν πρώτη αυξάνεται γραμμικά με την γωνιακή συχνότητα ενώ η άλλη ελαττώνεται υπερβολικά

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός



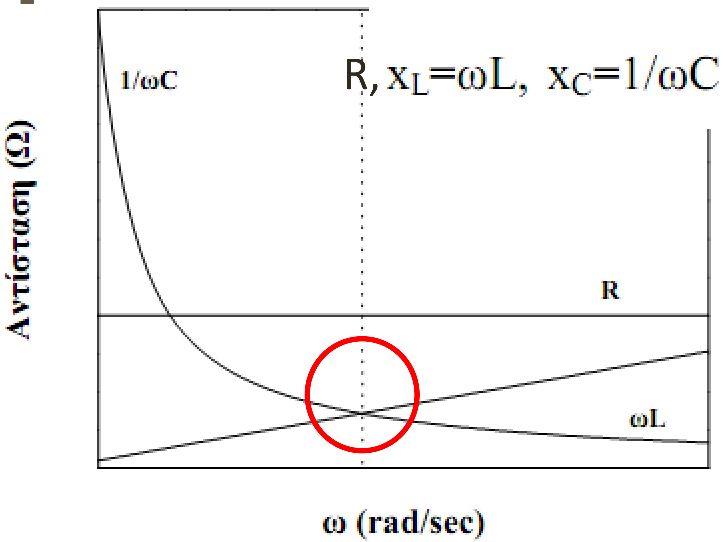
Σχήμα 12.3 Μεταβολή της αντίστασης με τη συχνότητα

Σε κάποια γωνιακή συχνότητα ω0, η τιμή των xL and xc θα **εξισώνεται.**

Στη συχνότητα ω0 **η χωρητική και η επαγωγική αντίσταση θα αλληλοεξουδετερώνονται** και το κύκλωμα θα εμφανίζει καθαρή ωμική συμπεριφορά. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **συντονισμός** και η γωνιακή συχνότητα στην οποία εμφανίζεται δίνεται από την εξίσωση:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός



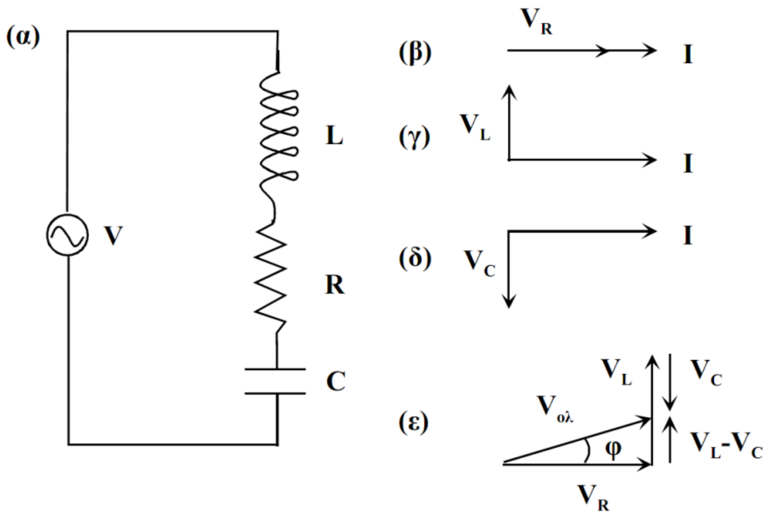
Σχήμα 12.3 Μεταβολή της αντίστασης με τη συχνότητα

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Στην περίπτωση συντονισμού **σε κύκλωμα RLC σε σειρά**, η εμπέδηση του κυκλώματος γίνεται ελάχιστη και ίση με την ωμική αντίσταση R και η τάση με το ρεύμα είναι συμφασικά. Όπως φαίνεται από το σχήμα 12.3, για γωνιακές συχνότητες μικρότερες από την συχνότητα συντονισμού το κύκλωμα έχει χωρητική συμπεριφορά ενώ για μεγαλύτερες επαγωγική. Λόγω της ελαχιστοποίησης της εμπέδησης, το ρεύμα μεγιστοποιείται και γίνεται ίσο με V/R.

Κεφάλαιο 11 : Συντονισμός

Πηνίο RL=10 Ω, L=0.1 H συνδέεται σε σειρά με πυκνωτή 200 μF και το κύκλωμα τροφοδοτείται με 220 V/ 50 Hz. Να βρεθούν: το ρεύμα, η τάση του πηνίου, η τάση του πυκνωτή, η συχνότητα συντονισμού, το ρεύμα σε συντονισμό και η τάση πηνίου/πυκνωτή σε συντονισμό.



Σχήμα 12.1 Κύκλωμα RLC σε σειρά

$$V_{ολ} = \sqrt{V_R^2 + \left(V_L - V_C\right)^2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$V_{ολ}=Iz$, $V_R=IR$, $V_L=Ix_L$ και $V_C=Ix_C$,

$$Iz = \sqrt{(IR)^2 + \left(Ix_L - Ix_C\right)^2} \Rightarrow z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}$$

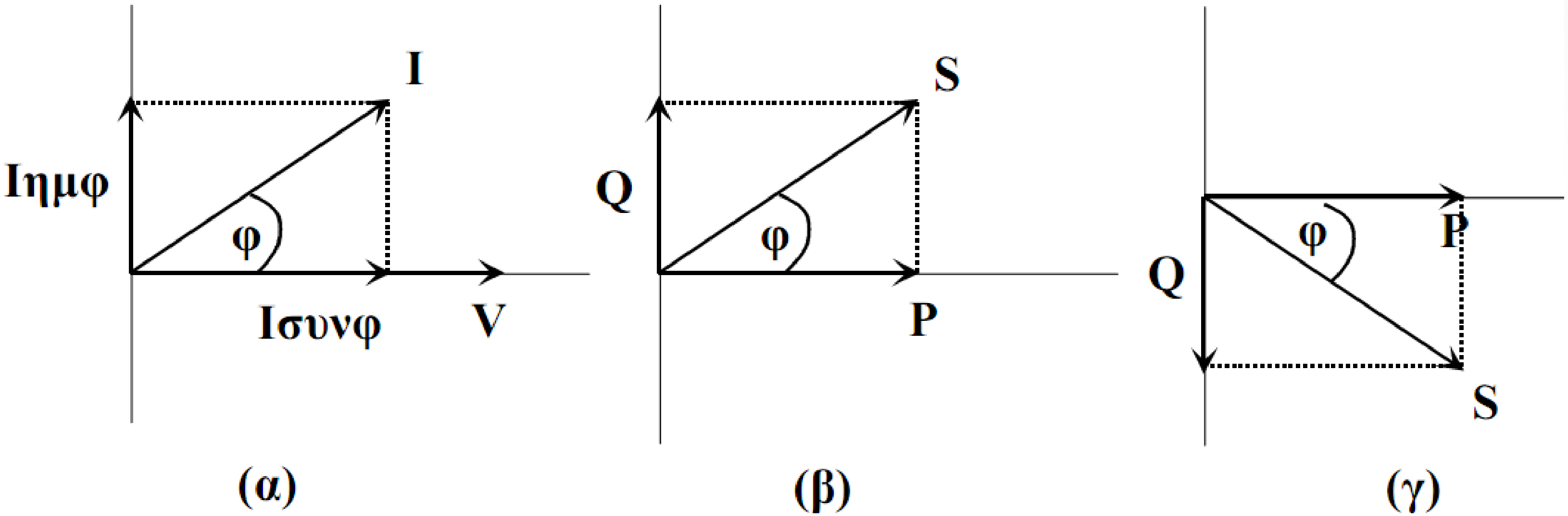
$$εφφ = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

Κεφάλαιο 13 : Μέτρηση ενεργούς (πραγματικής) ισχύος

$$\overline{P} = \frac{V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \sigma\upsilon\nu\varphi}{2\pi} \left(\omega t \Big|_0^{2\pi} \right) = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \sigma\upsilon\nu\varphi$$

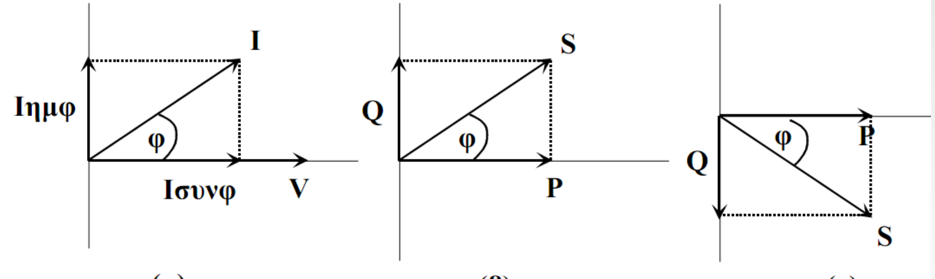
Βλέπουμε δηλαδή ότι η μέση ισχύς στο εναλλασσόμενο δίνεται από το γινόμενο των ενεργών τιμών της τάσης και του ρεύματος επί το συνημίτονο της διαφοράς φάσης μεταξύ τους. Η ισχύς αυτή είναι η χρήσιμη ισχύς που ονομάζεται και πραγματική ισχύς ή ενεργός ισχύς και έχει μονάδες W. Ο ορισμός της σχέσης 13.2 δείχνει ότι για καθαρό ωμικό καταναλωτή (συνφ=1), η ισχύς περιγράφεται με την ίδια εξίσωση όπως το συνεχές (P=VI). Αντίστοιχα, για καθαρούς (ιδανικούς) επαγωγικούς ή χωρητικούς καταναλωτές (συνφ=0) η μέση ισχύς είναι μηδέν. Φυσικά αυτό δεν σημαίνει ότι τα πηνία και οι πυκνωτές δεν καταναλώνουν κάποια ισχύ αλλά ότι η ισχύ έχει κάποια άλλη μορφή (άεργος ισχύς) όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 14 : Μέτρηση αέργου ισχύος-Διόρθωση συντελεστή ισχύος



Σχήμα 14.1 Ορισμοί αβατικής συνιστώσας ρεύματος (α) και αέργου ισχύος με ρεύμα σε προπορεία (β) ή καθυστέρηση (γ)

Κεφάλαιο 14 : Μέ
Διόρθωση συντελ



Σχήμα 14.1 Ορισμοί αβατικής συνιστώσας ρεύματος (α) και αέργου ισχύος με ρεύμα σε προπορεία (β) ή καθυστέρηση (γ)

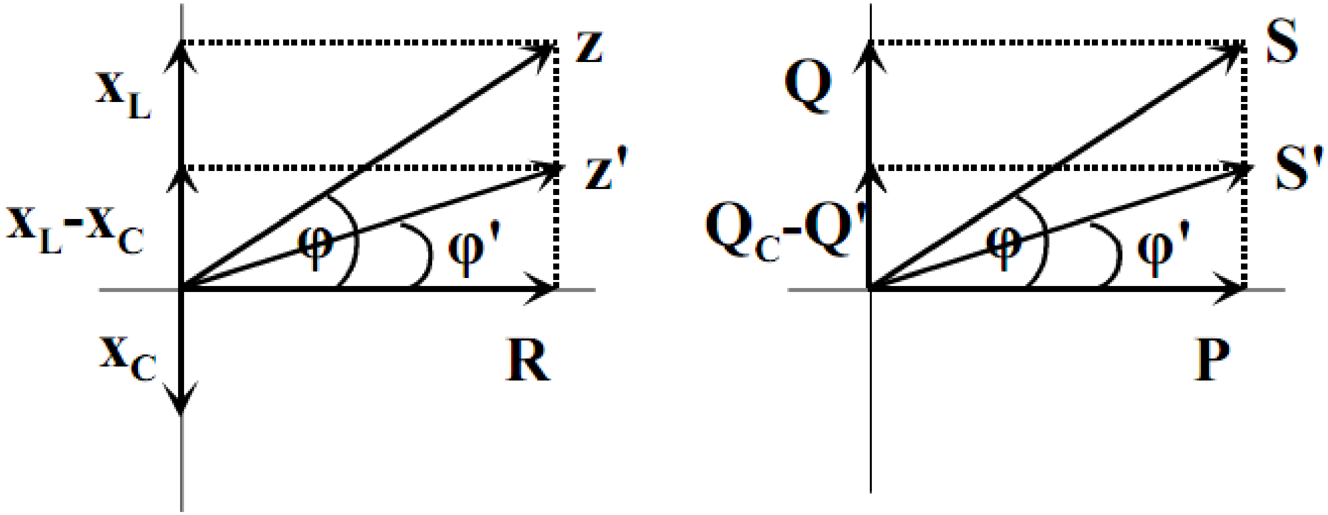
η ενεργός ισχύς ορίζεται από τη σχέση P=VIσυνφ. Ουσιαστικά δηλαδή, η πραγματική (χρήσιμη) ισχύς σε ένα κύκλωμα δίνεται από το γινόμενο της τάσης επί την συνιστώσα του ρεύματος που είναι σε φάση με την τάση (I_φ=Iσυνφ). Υπάρχει όμως και μία άλλη συνιστώσα του ρεύματος (I_α=Iημφ) η οποία έχει διαφορά φάσης π/2 από την τάση και που ονομάζεται αβατική ή μαγνητίζουσα συνιστώσα (σχήμα 14.1α). Αυτή η συνιστώσα ρεύματος ορίζει την άεργο ισχύ Q η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$Q = VI\eta\mu\varphi \qquad (14.1)$$

Η άεργος ισχύς, που έχει μονάδες VAR (Volt Ampere Reactive), σχετίζεται με απώλειες ισχύος-ενέργειας στους πυκνωτές και στα πηνία υπό μορφή ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων αντίστοιχα. Τέλος, το γινόμενο VI αντιστοιχεί στην φαινόμενη ισχύ S (S=VI), η οποία έχει μονάδες VA. Από τα διαγράμματα των σχημάτων 14.1β και 14.1γ (όπου στην περίπτωση β ρεύμα είναι σε προπορεία σε σχέση με την τάση ενώ σε καθυστέρηση για την περίπτωση γ) έχουμε τις σχέσεις:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \qquad P = S\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad Q = S\eta\mu\varphi \qquad (14.2)$$

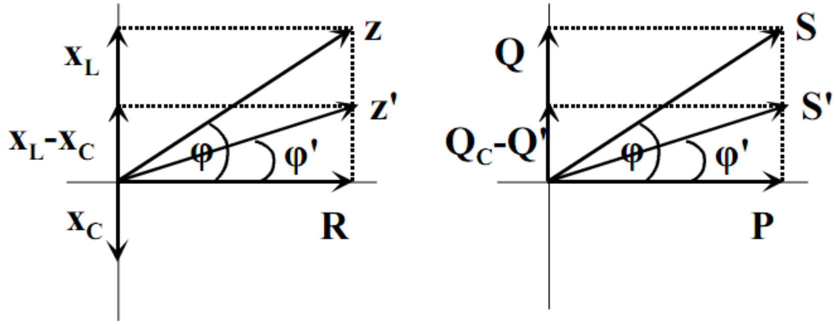
Κεφάλαιο 14 : Μέτρηση αέργου ισχύος-Διόρθωση συντελεστή ισχύος



Σχήμα 14.6 Διανυσματικά διαγράμματα για την διόρθωση συνημιτόνου

Η διόρθωση του συντελεστή ισχύος, δηλαδή η μεταβολή της τιμής του συνφ έτσι ώστε να μεγαλώσει η τιμή του, επιτυγχάνεται με την προσθήκη παράλληλα στον καταναλωτή ενός κατάλληλου πυκνωτή. Με αυτόν τον τρόπο, όπως φαίνεται στο σχήμα 14.6, η χωρητική αντίσταση ελαττώνει την γωνία φ. Σαν αποτέλεσμα, η πραγματική ισχύς παραμένει η ίδια ενώ ελαττώνεται η άεργος και η φαινόμενη ισχύς.

Κεφάλαιο 14 : Μέτρηση αέργου ισχύος-Διόρθωση συντελεστή ισχύος



Σχήμα 14.6 Διανυσματικά διαγράμματα για την διόρθωση συνημιτόνου

Σχετικά με τον υπολογισμό της χωρητικότητας του πυκνωτή που απαιτείται για μία συγκεκριμένη διόρθωση συνημιτόνου, αυτή μπορεί να προκύψει από τα διαγράμματα του σχήματος 14.6 ως εξής: ισχύουν

$$\varepsilon\varphi\varphi' = \frac{Q'}{P} = \frac{Q - Q_C}{P} \Rightarrow Q_C = Q - P\varepsilon\varphi\varphi' \qquad (14.10)$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{Q}{P} = \Rightarrow Q = P\varepsilon\varphi\varphi \qquad (14.12)$$

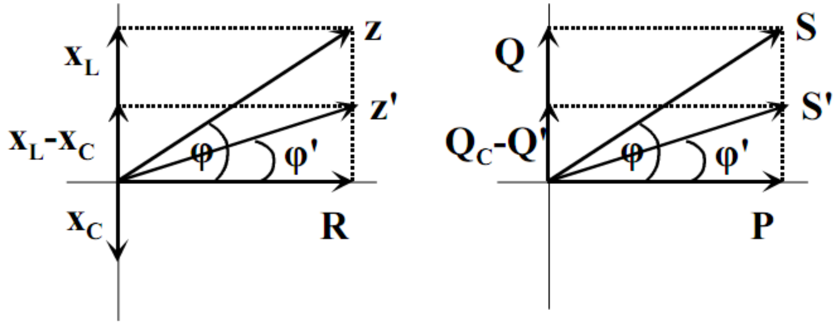
άρα από τις (14.10) και (14.11) έχουμε:

$$Q_C = P(\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi\varphi') \qquad (14.13)$$

Η σχέση (14.13) τελικά μας δίνει:

$$Q_C = P(\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi\varphi') \Rightarrow V^2\omega C = P(\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi\varphi') \Rightarrow C = \frac{P}{V^2\omega}(\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi\varphi') \qquad (14.14)$$

Κεφάλαιο 14 : Μέτρηση αέργου ισχύος- Διόρθωση συντελεστή ισχύος

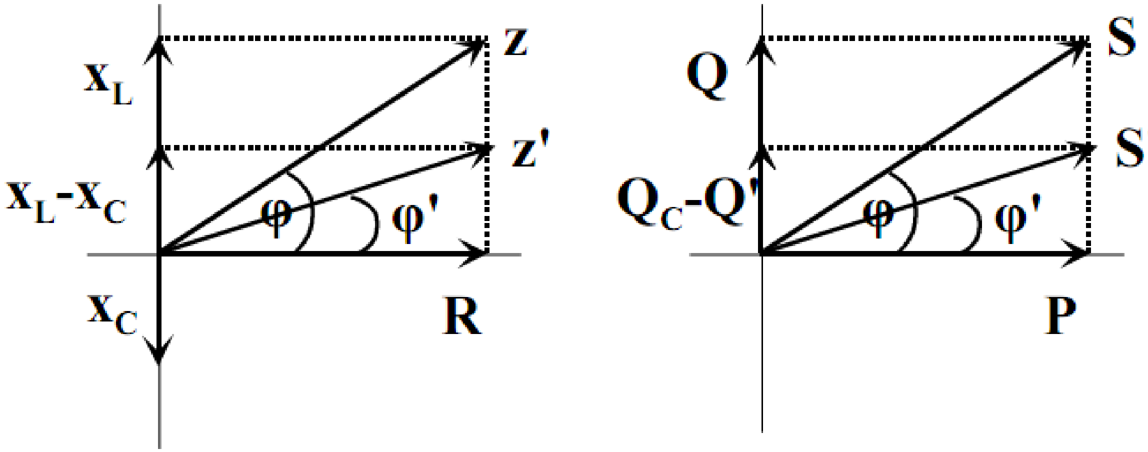


Σχήμα 14.6 Διανυσματικά διαγράμματα για την διόρθωση συνημιτόνου

$$Q_C = P(\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi\varphi') \Rightarrow V^2\omega C = P(\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi\varphi') \Rightarrow C = \frac{P}{V^2\omega}(\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi\varphi') \quad (14.14)$$

Δηλαδή, από τη σχέση (14.14) μπορούμε να υπολογίσουμε την χωρητικότητα για μία αλλαγή της γωνίας φάσης από φ σε φ' για καταναλωτή με ισχύ P και τάση V. Στην πράξη, για μία διόρθωση του συντελεστή ισχύος δεν απαιτούνται υπολογισμοί με την εξίσωση (14.14) αλλά χρησιμοποιούνται ειδικοί πίνακες και διαγράμματα. Σε αυτά, κάθε μεταβολή από ένα δεδομένο συνφ σε ένα συγκεκριμένο συνφ' αντιστοιχεί σε ένα συντελεστή K ο οποίος είναι ίσος με τον λόγο της απαιτούμενης για διόρθωση άεργης ισχύος προς την ενεργό ισχύ του καταναλωτή. Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι το πρόβλημα της διόρθωσης συνημιτόνου είναι ένα ιδιαίτερα δύσκολο εγχείρημα στην βιομηχανία όπου η ύπαρξη μεγάλων μονάδων με επαγωγική συμπεριφορά απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή.

Κεφάλαιο 14 : Μέτρηση αέργου ισχύος-Διόρθωση συντελεστή ισχύος



Σχήμα 14.6 Διανυσματικά διαγράμματα για την διόρθωση συνημιτόνου

14.4 Παράδειγμα.

Έστω λάμπα 60 W που λειτουργεί στα 220V/50Hz με συντελεστή ισχύος 0.4. Να βρεθεί η τιμή της χωρητικότητας που πρέπει να συνδεθεί παράλληλα έτσι ώστε ο συντελεστής ισχύος να γίνει 0.9.