

**Σ.Τ.Εφ. - Τμήμα Μηχανολογίας  
Τ.Ε.Ι. ΚΡΗΤΗΣ**

**Μάθημα: ΑΙΟΛΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ  
ΠΤΕΡΥΓΩΣΕΩΝ**

**ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2011  
Κώστας Κονταξάκης  
Επίκουρος καθηγητής ΤΕΙ Κρήτης**

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

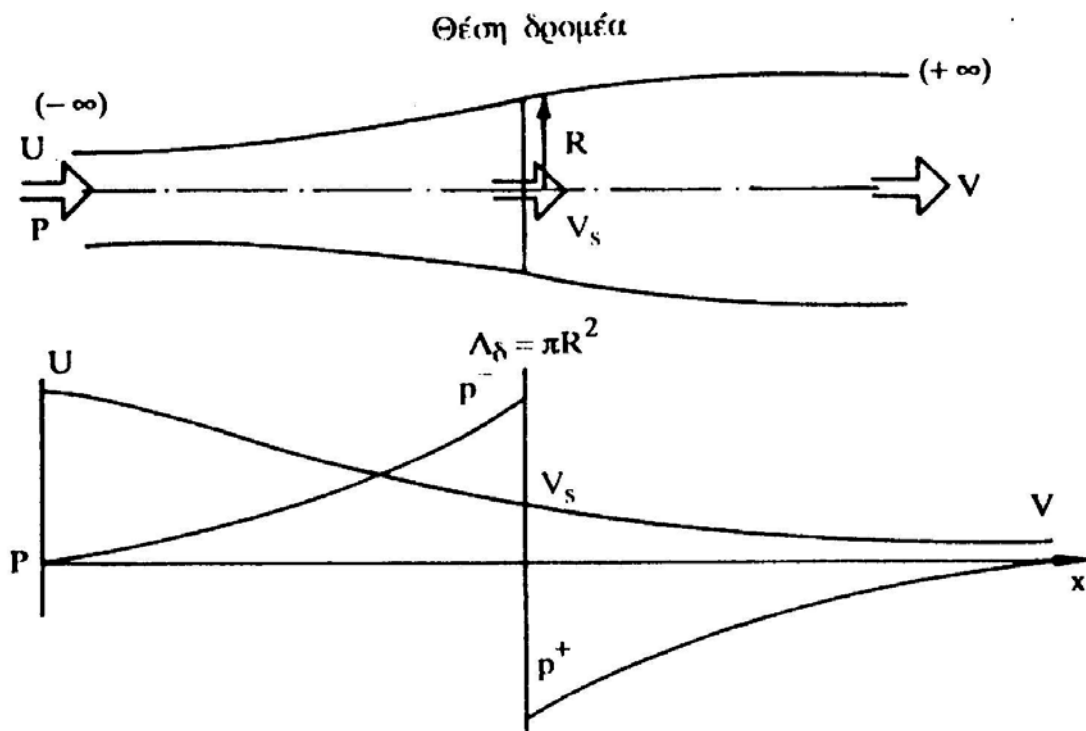
<b>I.</b>	<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΤΕΡΥΓΩΣΕΩΝ.....</b>	<b>4</b>
<b>I.1.</b>	<b>ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΔΙΣΚΟΥ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (RANKINE – FROUDE).....</b>	<b>4</b>
<b>I.2.</b>	<b>ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ .....</b>	<b>6</b>
I.2.1	Διατήρηση μάζας.....	6
I.2.2	Διατήρηση της ορμής .....	6
I.2.3	Ενεργειακός ισολογισμός .....	7
I.2.3.1	ΟΡΙΟ ΤΟΥ BETZ.....	9
I.2.3.2	ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΤΟΥ ΟΜΟΡΡΟΥ .....	11
I.2.4	ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΡΟΠΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ (MOMENTUM VORTEX THEORY) .....	12
<b>I.3.</b>	<b>ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΠΤΕΡΥΓΩΣΗΣ.....</b>	<b>14</b>
<b>I.4.</b>	<b>ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΔΙΣΚΟΥ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ.....</b>	<b>21</b>
I.4.1	Κατάσταση πέδησης (φρένου).....	21
I.4.2	Διορθώσεις ακροπτερυγίων - Διόρθωση Prandtl .....	22
<b>I.5.</b>	<b>ΚΑΜΠΥΛΗ ΙΣΧΥΟΣ ΔΡΟΜΕΑ.....</b>	<b>24</b>
<b>I.6.</b>	<b>ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΧΕΛΙΑΣΗΣ ΔΡΟΜΕΑ .....</b>	<b>28</b>
<b>I.7.</b>	<b>ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΔΡΟΜΕΑ ΑΝΕΜΟΚΙΝΗΤΗΡΑ .....</b>	<b>31</b>



# I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΤΕΡΥΓΩΣΕΩΝ

## I.1. ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΔΙΣΚΟΥ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (RANKINE – FROUDE)

Σύμφωνα με τη θεωρία του δίσκου ενέργειας ο μηχανισμός δέσμευσης της κινητικής ενέργειας του ανέμου από το δρομέα του ανεμοκινητήρα θεωρείται ιδανικός, δηλαδή χωρίς απώλειες, (σύμφωνα με τις παραδοχές που θα αναφερθούν στη συνέχεια). Ο δρομέας εξετάζεται σαν ένα «μαύρο κουτί» δια μέσου του οποίου περνάει ο αέρας που υφίσταται μεταβολή της ενέργειας του, μεταβολή που ουσιαστικά εκφράζεται με την πτώση της στατικής του πίεσης. Επιπλέον ο δρομέας θεωρείται σαν ένας δίσκος που ενεργεί πάνω στο ρευστό, εξ ου και η ονομασία του «δίσκος ενέργειας».



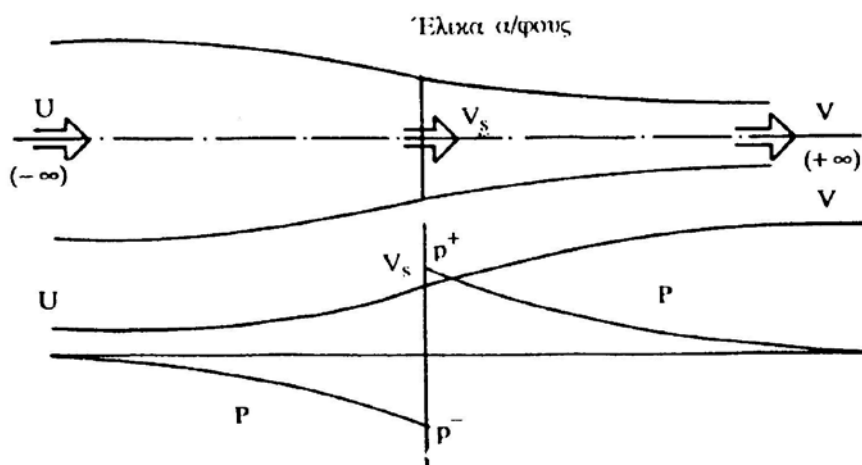
Σχήμα I.1.α. : Ροϊκός σωλήνας δρομέα ανεμοκινητήρα

Το Σχήμα I.1.α. δείχνει το ροϊκό σωλήνα ανεμοκινητήρα που ορίζεται από τη διάμετρο του δρομέα. Ο αέρας πολύ μακριά (στο άπειρο) πριν από το δίσκο (ανάντι) έχει στατική πίεση  $p$  και πλησιάζει με ταχύτητα  $U$ . Ο δίσκος αφαιρεί ενέργεια από τον αέρα και συνεπώς πολύ μακριά μετά από το δίσκο (κατάντι) όπου η πίεση του αέρα θα έχει αποκατασταθεί στην πίεση του περιβάλλοντος  $p$ , η ταχύτητα του ανέμου  $V$  θα είναι μικρότερη από την  $U$ . Για λόγους διατήρησης της μάζας μέσα στο ροϊκό σωλήνα, θα πρέπει η διατομή άρα και η διάμετρος του ροϊκού σωλήνα να μεγαλώνει πίσω από το δρομέα, δηλαδή να υπάρχει διαστολή του ρεύματος του αέρα (ομόρρου) του ανεμοκινητήρα, όπως ακριβώς διαγραμματικά παριστάνεται στο Σχήμα I.1α.

Το ρευστό μετά το δίσκο έχει μικρότερη ενέργεια από αυτήν πριν από το δίσκο και επειδή η αξονική ταχύτητα του ρευστού πάνω στο δίσκο και οριακά λίγο πριν και λίγο μετά από το δίσκο παραμένει η ίδια για λόγους διατήρησης της μάζας (η διαφορά κινητικής ενέργειας του ανέμου πριν και μετά το δίσκο δεσμεύτηκε από τον ιδανικό δρομέα του ανεμοκινητήρα) τότε η στατική πίεση του ρευστού μετά από το

δίσκο θα είναι μικρότερη από τη στατική πίεση του ρευστού πριν από το δίσκο. Συνεπώς ο δίσκος αποτελεί μια επιφάνεια ασυνέχειας πίεσης, αλλά συνέχειας όμως της αξονικής ταχύτητας και ασυνέχειας της περιφερειακής ταχύτητας όπως θα φανεί παρακάτω. Τυπική μεταβολή των μεγεθών της αξονικής ταχύτητας και πίεσης του ανέμου κατά μήκος του άξονα του ροϊκού σωλήνα, παρουσιάζεται στο Σχήμα I.1α.

Στο Σχήμα I.1.β. παρουσιάζεται η μορφή του ροϊκού σωλήνα καθώς και η αξονική διανομή πίεσης και ταχύτητας για την περίπτωση έλικας αεροσκάφους ή πλοίου. Εδώ παρατηρείται συστολή του ομόρρου και ασυνέχεια της πίεσης του ρευστού καθώς αυτό διέρχεται από το δίσκο, βεβαίως με την αύξηση της πίεσης του.



Σχήμα I.1.β. : Ροϊκός σωλήνας έλικας αεροσκάφους

Για τη μελέτη του αεροδυναμικού πεδίου γύρω από το δίσκο θα εφαρμοστούν οι γνωστοί νόμοι της Μηχανικής των Ρευστών και πιο συγκεκριμένα:

- Η εξίσωση διατήρησης της μάζας
- Η εξίσωση διατήρησης της ορμής
- Ενεργειακός ισολογισμός
- Η εξίσωση της ροπής της ορμής

Σε πρώτη προσέγγιση επίλυσης του προβλήματος γίνονται οι ακόλουθες παραδοχές:

1. Η εναλλαγή ενέργειας μεταξύ ρευστού και δίσκου γίνεται χωρίς απώλειες.
2. Ομοιόμορφη κατανομή της ταχύτητας στο δίσκο
3. Η φόρτιση (διαφορά πίεσης πριν και μετά) πάνω σε ολόκληρο το δίσκο είναι σταθερή.
4. Ο δίσκος δεν περιστρέφει τη φλέβα της ροής. Η παραδοχή αυτή πρακτικά μπορεί να επιτευχθεί με την ύπαρξη δύο αντίθετα στρεφόμενων δρομέων ενώ οι παραδοχές 2 & 3 απαιτούν άπειρο αριθμό και πτερύγια κατάλληλης σχεδίασης.

Στην συνέχεια ορίζονται τα μεγέθη  $p$  και  $U$  ως η στατική πίεση και η ταχύτητα του ανέμου στο άπειρο ανάντι του δίσκου,  $p^-$  και  $p^+$ , η στατική πίεση του ρευστού πριν και μετά το δίσκο, πάνω στο δίσκο,  $V_s$  η ταχύτητα του ρευστού δια μέσου του δίσκου και τέλος  $p$  και  $V$  η στατική πίεση (πλήρης ανάκτηση πίεσης) και η



Η παροχή  $Q$  διαμέσου της παράπλευρης επιφάνειας του κυλινδρικού όγκου ισολογισμού είναι:

$$Q = \rho \cdot A_{\infty} \cdot U - \rho \cdot A_{\delta} \cdot V_s$$

Το ρευστό εισέρχεται στον όγκο ισολογισμού με αξονική ταχύτητα ίση με  $U$ .

Εφαρμόζοντας το θεώρημα διατήρησης της ορμής, δηλαδή ότι η ώση ισούται με την εν θέσει μεταβολή της ροής της ορμής, προκύπτει ότι:

$$T = \rho \cdot U^2 \cdot A_{\infty} - \rho \cdot A_{\delta} \cdot V_s \cdot V - Q \cdot U \quad (2.1)$$

ή αλλιώς

$$T = \rho \cdot A_{\delta} \cdot V_s \cdot (U - V) \quad (2.2)$$

( η θετική τιμή της ωστικής δύναμης  $T$ , επειδή ισχύει  $U > V$ , δηλώνει ότι το ρευστό εξασκεί πάνω στο δρομέα δύναμη προς την κατεύθυνση του ανέμου που συμπίπτει με τη θετική φορά του άξονα των  $x$ ). Ας σημειωθεί ότι η συμβολή των δυνάμεων πίεσης στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου είναι μηδενική (παντού επικρατεί πίεση  $p$ ). Αν είχε εφαρμοστεί ο ισολογισμός της ορμής πάνω στο ροϊκό σωλήνα, τότε προκειμένου να προκύψει το ίδιο αποτέλεσμα, θα έπρεπε η συνεισφορά των δυνάμεων πίεσης κατά τον άξονα των  $x$  να είναι μηδέν, γεγονός που βέβαια ισχύει αλλά δεν είναι τόσο προφανές για να αποδειχθεί.

### **I.2.3 Ενεργειακός ισολογισμός**

Το ρεύμα στερείται συστροφής ανάντι από το δρομέα, έγινε δε η υπόθεση ότι στερείται συστροφής και κατόντι. Κατά συνέπεια υπάρχει διατήρηση ενέργειας του ρευστού (εξίσωση Bernoulli) στους δύο ανεξάρτητους υποχώρους πριν και μετά το δίσκο μέσα στο ροϊκό σωλήνα όχι όμως και μεταξύ των δύο υποχώρων, γιατί ο δίσκος αφαιρεί ενέργεια από το ρευστό. Συνεπώς για τον υποχώρο ανάντι από τον δρομέα ισχύει:

$$p + \frac{\rho}{2} \cdot U^2 = p^- + \frac{\rho}{2} \cdot V_s^2$$

ενώ για τον υποχώρο κατόντι από τον δρομέα ισχύει:

$$p + \frac{\rho}{2} \cdot V^2 = p^+ + \frac{\rho}{2} \cdot V_s^2$$

Αφαιρώντας τις δύο αυτές σχέσεις κατά μέλη προκύπτει:

$$p^- - p^+ = \frac{\rho}{2} \cdot (U^2 - V^2)$$

Ο δρομέας ασκεί μια δύναμη, την ώση, στον άνεμο, φρενάροντας τον καθώς η πίεση του πέφτει διαμέσου του δίσκου. Αν υποθεθεί ότι η πίεση δεν είναι συνάρτηση του χρόνου, τότε δεν πρέπει να υπάρχει και περιοδικότητα στην ταχύτητα της ροής στο επίπεδο του δρομέα (οι παραπάνω συνθήκες είναι αληθινές μόνο για άπειρο αριθμό πτερυγίων). Από την εξίσωση (2.2) η ώση είναι ίση με:

$$T = \rho \cdot A_s \cdot V_s \cdot (U - V) \quad (2.3)$$

από όπου προκύπτει και η ειδική ώση:

$$\frac{T}{A_s} = \rho \cdot V_s \cdot (U - V) \quad (2.4)$$

η οποία δεν είναι τίποτε άλλο παρά η σταθερή φόρτιση του δίσκου

$$\frac{T}{A_s} = \Delta p = p^- - p^+ \quad (2.5)$$

οπότε προκύπτει

$$\rho \cdot V_s \cdot (U - V) = \frac{\rho}{2} \cdot (U^2 - V^2)$$

δηλαδή

$$V_s = \frac{1}{2} \cdot (U + V) \quad (2.6)$$

Η σχέση αυτή δηλώνει ότι η ταχύτητα του ανέμου πάνω στο δίσκο είναι το ημίθροισμα των ταχυτήτων του ανέμου πολύ πριν και πολύ μετά από το δίσκο (ανάντι και κατάντι).

Έχει επικρατήσει η εισαγωγή του συντελεστή αξονικής επαγωγής ή αλληλεπίδρασης  $a$  (axial interference factor), της ταχύτητας του ανέμου, ως εξής:

$$a = \frac{(U - V_s)}{U} \quad (2.7)$$

Ο συντελεστής αξονικής επαγωγής (θετική ποσότητα) εκφράζει την ποσοστιαία επιβράδυνση του αέρα πάνω στο δίσκο. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

$$V_s = U \cdot (1 - a) \quad (2.8)$$

$$V = U \cdot (1 - 2a) \quad (2.9)$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι η ποσοστιαία επιβράδυνση μακριά κατάντι του δίσκου είναι διπλάσια της ποσοστιαίας επιβράδυνσης του ρευστού στο επίπεδο του δίσκου.

Ο άνεμος του ροϊκού σωλήνα που πλησιάζει το δίσκο έχει ισχύ:

$$N_- = \left[ \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right] \cdot \dot{m}$$

ενώ κατάντι του δίσκου έχει μικρότερη ισχύ:

$$N_+ = \left[ \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right] \cdot \dot{m}.$$

Έτσι η απώλεια ισχύος από το ρεύμα του ροϊκού σωλήνα είναι:

$$P = \dot{m} \cdot \left[ \frac{U^2 - V^2}{2} \right]$$

και αυτή ισούται με την ισχύ που δέσμευσε ο δίσκος.  
Εκτέλεση των πράξεων στην τελευταία σχέση δίνει ότι:

$$P = T \cdot V_s \quad (2.10)$$

σχέση που δηλώνει ότι η ισχύς που δεσμεύεται από τον ανεμοκινητήρα ισούται με την ώθηση που το ρευστό ασκεί πάνω στο δίσκο, επί την ταχύτητα ολίσθησης του ανέμου πάνω στο δίσκο.

### **I.2.3.1 ΟΡΙΟ ΤΟΥ BETZ**

Οι προηγούμενες σχέσεις για την ισχύ του δρομέα και την ώση μπορούν, μετά την εισαγωγή του συντελεστή αξονικής επαγωγής να γραφούν ως εξής:

$$P = 2 \cdot \rho \cdot A_\delta \cdot U^3 \cdot a \cdot (1-a)^2 \quad (2.11)$$

$$T = 2 \cdot \rho \cdot A_\delta \cdot U^2 \cdot a \cdot (1-a) \quad (2.12)$$

Ορίζονται συντελεστές ισχύος και ώσης του δρομέα:

$$C_p = \frac{P}{\left( \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^3 \cdot A_\delta \right)} \quad (2.13)$$

$$C_T = \frac{T}{\left( \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^3 \cdot A_\delta \right)} \quad (2.14)$$

Η πρώτη σχέση υποδηλώνει το ποσοστό της ενέργειας που έχει ο άνεμος που πλησιάζει το δίσκο (λίγο πριν από το δίσκο) και που μετατρέπεται σε ισχύ πάνω στο δρομέα  $\left( \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot V_0^3 \right)$  είναι η ισχύς που έχει ο άνεμος ταχύτητας  $V_s$  που περνάει από επιφάνεια  $A_\delta$ ) ενώ η δεύτερη σχέση εκφράζει το συντελεστή αντίστασης

που παρουσιάζει ο δρομέας στη ροή (μέγεθος χρήσιμο για τον υπολογισμό της δύναμης ανατροπής του πύργου στήριξης του ανεμοκινητήρα). Με εκτέλεση πράξεων προκύπτει:

$$C_p = 4a \cdot (1 - a)^2 \quad (2.15)$$

$$C_T = 4a \cdot (1 - a) \quad (2.16)$$

Η σχέση (2.15) για το συντελεστή ισχύος δηλώνει ότι αυτή έχει ακρότατο για τιμή συντελεστή αξονικής επαγωγής, ( $a$ ):

$$\alpha = \frac{1}{3} \quad \left( \frac{dC_p}{d\alpha} = 0 \right)$$

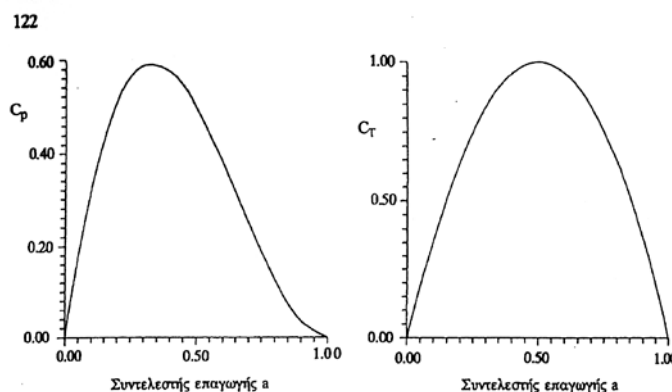
Στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής παίρνει μέγιστη τιμή ίση με:

$$C_{p \max} = \frac{16}{27} \cong 59\% \quad (2.17)$$

Η μέγιστη αυτή τιμή καλείται όριο του Betz. Προκύπτει λοιπόν ότι ο βέλτιστος δρομέας και κάτω από ιδανικές συνθήκες λειτουργίας μπορεί να δεσμεύει μόνο το 59% της ισχύος του ανέμου. Το όριο αυτό είναι κατά κάποιο τρόπο ο μέγιστος βαθμός απόδοσης του συστήματος για ιδανική έλικα, ανάλογος με το βαθμό απόδοσης Carnot των θερμοδυναμικών κύκλων. Στην περίπτωση αυτή της βέλτιστης λειτουργίας, η ταχύτητα  $U$  του ανέμου μειώνεται στα  $2/3$  πάνω στο δίσκο και στο  $1/3$  πολύ μακριά κατόπι του δίσκου. Είναι δηλαδή:

$$V_s = (2/3) \cdot U \quad (2.18)$$

$$V = (1/3) \cdot U \quad (2.19)$$



Σχήμα Ι.2.2. : Καμπύλη  $C_p$  Απόδοσης Δρομέα και Συντελεστή Ώσης Ανεμοκινητήρα συναρτήσει του συντελεστή αξονικής επαγωγής ( $a$ ).

### **I.2.3.2 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΤΟΥ ΟΜΟΡΡΟΥ**

Ο όρος «ομόρρους» που αναφέρθηκε και στα προηγούμενα, χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει το ρεύμα του αέρα που, περνώντας τον ανεμοκινητήρα, διαστέλλεται μέχρι το άπειρο. Η επιστημονική ονομασία του είναι απόρευμα (wake) ή και ουραίο ρεύμα, αλλά η ονομασία «ομόρρους» έχει επικρατήσει ως τεχνικός όρος.

Η προηγούμενη ανάλυση βασίστηκε στην υπόθεση ότι ο ομόρρους του πεδίου ροής (πεδίο ροής πίσω από το δίσκο) στερείται συστροφής, πράγμα που αληθεύει όταν ο ανεμοκινητήρας έχει δυο αντίθετα συστρεφόμενους δρομέις. Στην πράξη όμως ο ανεμοκινητήρας έχει ένα δρομέα και ο και ο ομόρρους ακόμη και στην ιδανικότερη των περιπτώσεων λειτουργίας του ανεμοκινητήρα, έχει συστροφή που δημιουργείται από την αλληλεπίδραση του ρεύματος του αέρα και του δρομέα.

Για τις έλικες των αεροσκαφών, ο ομόρρους στρέφεται κατά τη φορά περιστροφής της έλικας, ενώ για ανεμοκινητήρα, ο ομόρρους έχει αντίθετη από το δρομέα φορά περιστροφής (φυσικά για ακίνητο παρατηρητή).

Στην περίπτωση του ανεμοκινητήρα (σε αντίθεση με την έλικα του αεροσκάφους), ο δρομέας έχει μικρή φόρτιση και αυτό έχει ως αποτέλεσμα, ο ομόρρους να έχει πολύ μικρή συστροφή. Η κινητική ενέργεια που έχει το ρευστό μετά το δρομέα, αποτελείται από την κινητική ενέργεια που οφείλεται στην αξονική (μεταφορική) ταχύτητα του ανέμου και από την περιφερειακή κινητική ενέργεια. (που οφείλεται στην συστροφή του ρευστού). Η περιφερειακή κινητική ενέργεια γενικά δεν μπορεί να ανακτηθεί στο άπειρο μακριά από το δρομέα και να γίνει στατική (ωφέλιμη) πίεση και ως εκ τούτου αποτελεί ενεργειακή απώλεια του συστήματος. Η ενεργειακή αυτή απώλεια μειώνει το συνολικό βαθμό απόδοσης του ανεμοκινητήρα. Να σημειωθεί ότι το ρευστό ανάντι του δίσκου στερείται συστροφής (αστρόβιλο), οπότε η κινητική του ενέργεια οφείλεται στην αξονική μεταφορική κίνησή του.

Το θεώρημα διατήρησης της ροπής της ορμής, εφαρμοζόμενο σε όγκο ισολογισμού που δεν περιβάλλει το δίσκο ενέργειας (διακοπτόμενη γραμμή στο Σχήμα I.2.1), οδηγεί στο συμπέρασμα διατήρησης της συστροφής.

$$V_g \cdot r = \text{σταθερό} \quad (2.20)$$

(για το πεδίο ροής κατάντι του δίσκου)

Συνεπώς η περιφερειακή ταχύτητα του ρευστού στην ανάντι επιφάνεια του δίσκου είναι μηδέν, είναι δε  $V_g$  πάνω στην κατάντι επιφάνεια του και παραμένει η ίδια  $V_g$  μακριά κατάντι στο άπειρο και φυσικά στην ίδια ακτινική απόσταση από τον άξονα. Άρα η περιφερειακή ταχύτητα του ρευστού πάνω στο δίσκο ισούται με το μισό του αθροίσματος της περιφερειακής ταχύτητας του στις δυο πλευρές του δίσκου (στην ανάντι και στην κατάντι επιφάνεια του), δηλαδή το μισό της περιφερειακής ταχύτητας του ρευστού κατάντι στο άπειρο (στην ίδια ακτινική απόσταση).

$$V_{\theta_s} = \frac{1}{2} \cdot V_{\theta_\infty}$$

Ορίζεται συντελεστής περιφερειακής επαγωγής ή αλληλεπίδρασης, η ποσότητα  $a'$  και ισχύει:

$$\alpha' = \frac{V_{\theta_s}}{\Omega \cdot r} \quad (2.21)$$

όπου  $\Omega$  η γωνιακή ταχύτητα του δρομέα.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό προκύπτουν οι σχέσεις:

$$V_{\theta_s} = a' \cdot \Omega \cdot r \quad (2.22)$$

$$V_{\theta_\infty} = 2a' \cdot \Omega \cdot r \quad (2.23)$$

## 1.2.4 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΡΟΠΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ (MOMENTUM VORTEX THEORY)

Το θεώρημα της ορμής της ροπής της ορμής, εκφράζει ότι η μεταβολή της εν θέσει ροπής της ορμής του ρευστού που διέρχεται δια μέσου του όγκου ισολογισμού, ισούται με την ροπή των εξωτερικών δυνάμεων:

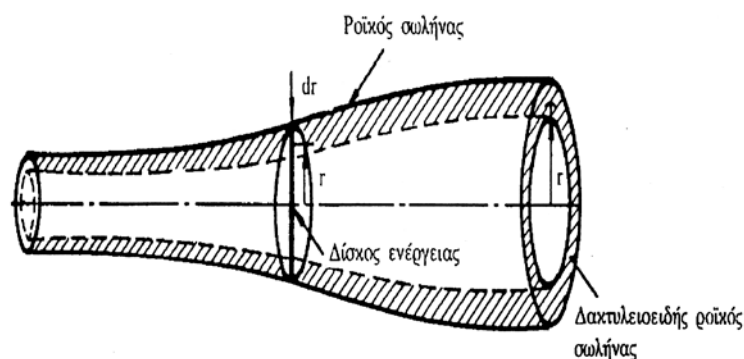
$$dM = \rho \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot V_s \cdot [(V_\theta \cdot r)_\infty - (V_\theta \cdot r)_{-\infty}]$$

Όπου  $dM$ , η ροπή που εξασκείται από το ρευστό πάνω στο δακτυλιοειδή επιφάνεια του δίσκου ενέργειας. Επειδή  $(V_\theta \cdot r)$  ανάντι του δίσκου είναι μηδέν, προκύπτει μετά από ολοκλήρωση πάνω στη διατομή του δίσκου ότι ισχύει:

$$M = \dot{m} \cdot V_s \cdot 2a' \cdot \Omega \cdot R^2 \quad (2.24)$$

Οι σχέσεις (2.12) & (2.24) εκφράζουν τη δύναμη και ροπή που το ρευστό εξασκεί πάνω στο δίσκο ενέργειας.

Η προηγούμενη μονοδιάστατη ανάλυση των ισολογισμών μάζας, ορμής, ενέργειας και ροπής στο ροϊκό σωλήνα, εφαρμόζεται και σε δακτυλιοειδείς ροϊκούς σωλήνες πάχους  $\Delta r$ , όπως τέτοιος φαίνεται στο Σχήμα 1.2.3.



Σχήμα 1.2.3. : Δακτυλιοειδής ροϊκός σωλήνας πάχους  $dr$  και ακτίνας  $r$ .

Η εφαρμογή των νόμων διατήρησης οδηγεί σε συμπεράσματα ίδια με αυτά που προέκυψαν, με τη διαφορά ότι αυτά ισχύουν πλέον σε συγκεκριμένη ακτινική θέση. Επιτρέπεται έτσι η μεταβολή των λειτουργικών παραμέτρων πάνω στο δίσκο ενέργειας.

Συγκεκριμένα η στοιχειώδης παροχή μάζας δια του δακτυλιοειδούς ροϊκού σωλήνα είναι:

$$d\dot{m} = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot U(1 - a) \quad (2.25)$$

η στοιχειώδης αξονική δύναμη που ενεργεί στο δίσκο είναι:

$$dT = \rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot (1 - a) \cdot a \cdot U^2 = \rho \cdot C_T \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot U^2 \quad (2.26)$$

και η στοιχειώδης ροπή που αναπτύσσεται πάνω στο δίσκο είναι:

$$dM = \rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot a'(1 - a) \cdot \Omega \cdot r^2 \cdot U \quad (2.27)$$

ο τοπικός συντελεστής ισχύος είναι:

$$C_p = 4a \cdot (1 - a)^2 \quad (2.28)$$

ο τοπικός συντελεστής ώσης  $C_T$  είναι:

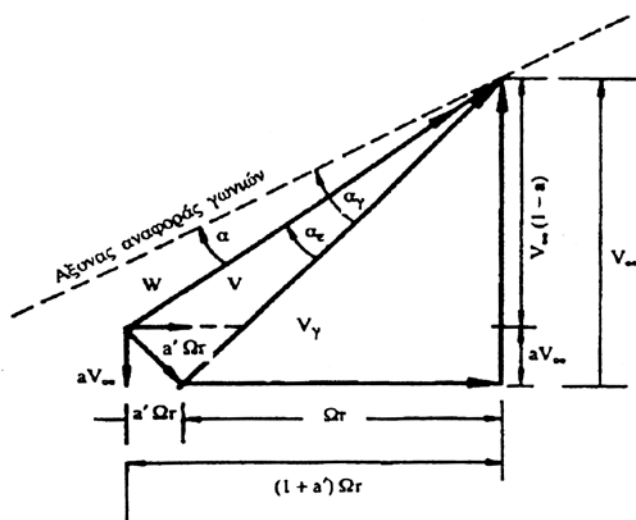
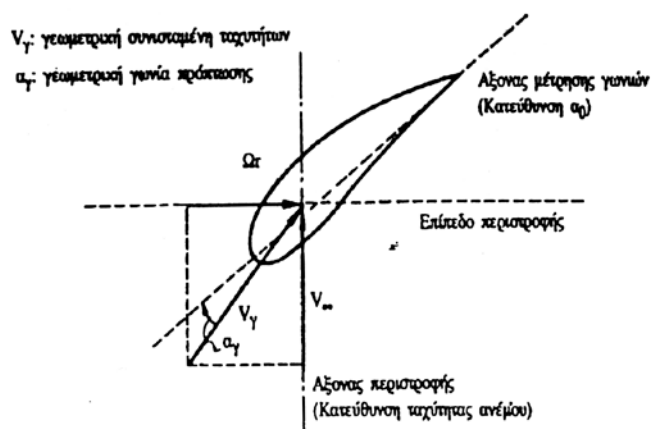
$$C_T = 4a \cdot (1 - a) \quad (2.29)$$

και τέλος, ο τοπικός συντελεστής ροπής  $C_M$  είναι:

$$C_M = 4 \cdot a' \cdot (1 - a) \cdot \frac{\Omega \cdot r}{U} \quad (2.30)$$

### 1.3. ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΠΤΕΡΥΓΩΣΗΣ

Η θεωρία των στοιχείων περύγωσης χωρίζει το περύγιο του δρομέα σε στοιχειώδεις λωρίδες πλάτους  $\Delta r$  και συνδέει τις δυνάμεις και ροπές που το ρευστό εξασκεί κατά την διέλευσή του διαμέσου του δακτυλιοειδούς τμήματος του δίσκου πάχους  $\Delta r$  πάνω στο δίσκο (μεγέθη που υπολογίστηκαν προηγούμενα) με τις αεροδυνάμεις που αναπτύσσονται πάνω στις λωρίδες περύγιου του δρομέα. Κάθε δακτυλιοειδής ροϊκός σωλήνας τέμνει τα περύγια του δρομέα, με  $B$  το πλήθος αυτών, και τα οποία πάνω στην κυλινδρική επιφάνεια του ροϊκού σωλήνα αφήνουν ίχνος που έχει την μορφή της αεροτομής. Το Σχήμα 1.2.4α αποτελεί (σε κάτοψη) το ανάπτυγμα της κυλινδρικής επιφάνειας του ροϊκού σωλήνα με το ίχνος της τομής της με ένα περύγιο του δρομέα.

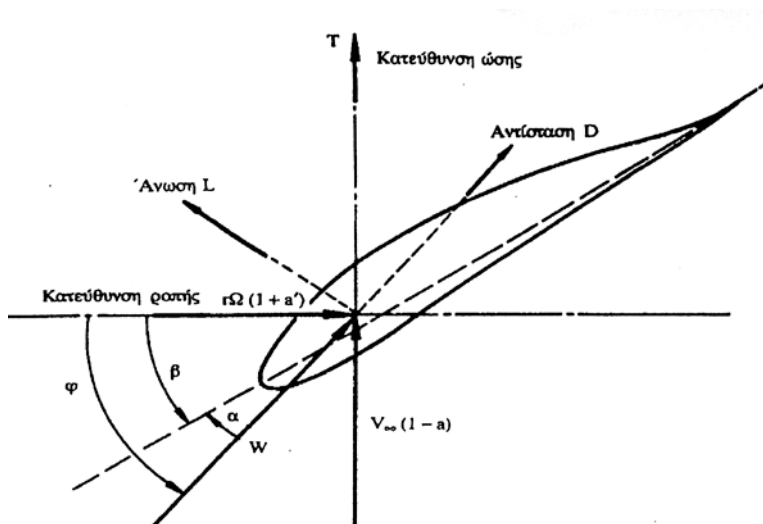


Σχήμα 1.2.4.: α. Γεωμετρικό Τρίγωνο Ταχυτήτων - β. Πραγματικό Τρίγωνο Ταχυτήτων

Για παρατηρητή που κινείται με το περύγιο η αεροτομή βρίσκεται σε ένα πεδίο ταχυτήτων που έχει οξονική συνιστώσα  $U \cdot (1 - a)$  και περιφερειακή συνιστώσα  $\Omega \cdot r \cdot (1 + a')$  (το θετικό πρόσημο δηλώνει ότι η συνιστώσα αυτή έχει φορά αντίθετη προς την κατεύθυνση περιστροφής του δρομέα). Η συνισταμένη δύναμη  $W$  είναι τότε:

$$W = \sqrt{U^2 \cdot (1 - a)^2 + \Omega^2 \cdot r^2 \cdot (1 + a')^2}$$

η δε αεροτομή βρίσκεται σε γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$ , ο ως προς την ταχύτητα  $W$ , Σχήμα I.2.4.β. Η αλληλεπίδραση της ροής και της στοιχειώδους λωρίδας πτέρυγας (πτέρυγα με πλάτος  $dr$ ) οδηγεί στην εμφάνιση των δυνάμεων άνωσης και αντίστασης όπως φαίνονται στο Σχήμα I.2.4.γ.



Σχήμα I.2.4.γ. Δυνάμεις που αναπτύσσονται στην αεροτομή του Ανεμοκινητήρα.

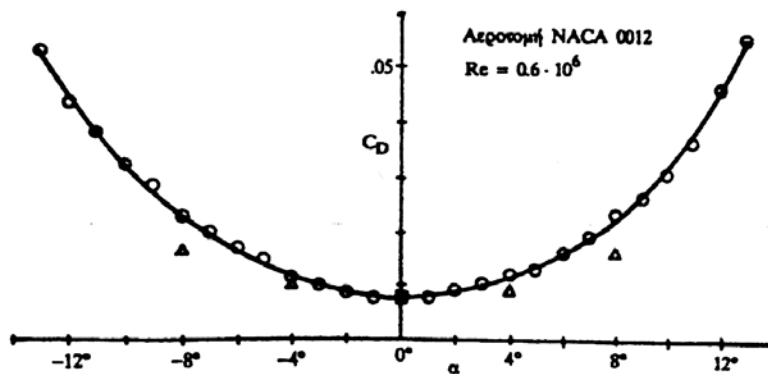
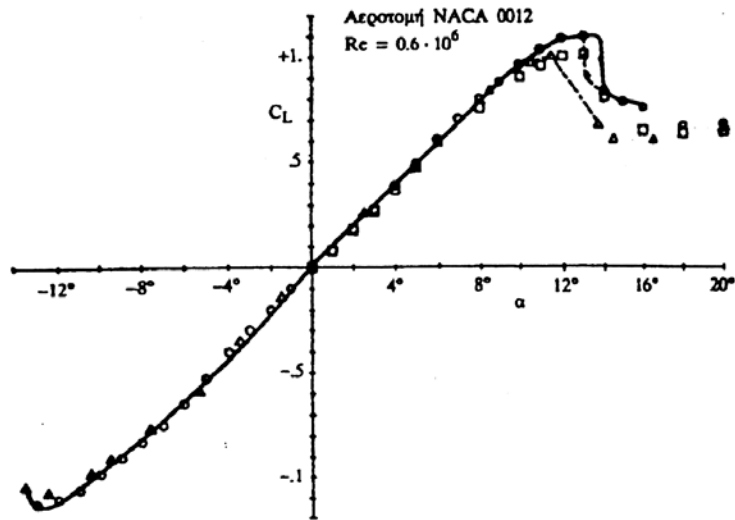
Οι εκφράσεις των δυνάμεων αυτών, σύμφωνα με τους αντίστοιχους συντελεστές αυτών είναι :

$$\Delta L = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_l \cdot W^2 \cdot C \cdot \Delta r \quad (2.31)$$

$$\Delta D = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_d \cdot W^2 \cdot C \cdot \Delta r \quad (2.32)$$

όπου  $C_l$  και  $C_d$  οι συντελεστές άνωσης και αντίστασης της αεροτομής και  $C$  η χορδή της αεροτομής. Τυπικές μεταβολές των συντελεστών άνωσης και αντίστασης αεροτομής φαίνονται στα σχήματα 2.5.α και 2.5.β για την αεροτομή NACA 4412 όπου διαπιστώνεται η γραμμικότητα της σχέσης συντελεστή άνωσης - γωνίας

πρόσπτωσης και οι χαμηλές τιμές συντελεστή αντίστασης γύρω από μια ευρεία περιοχή τιμών γωνιών πρόσπτωσης γύρω από την γωνία πρόσπτωσης χωρίς κρούση.



Σχήμα Ι.2.5.: α. Τυπική Μεταβολή  $C_l$  με τη γωνία πρόσπτωσης - β. Τυπική Μεταβολή  $C_d$  με την γωνία πρόσπτωσης

Οι δύο στοιχειώδεις δυνάμεις άνωσης και αντίστασης αναλύονται κατά την αξονική και την περιφερειακή κατεύθυνση (x και t) και δίνουν τις εκφράσεις:

$$\Delta F_x = \Delta L \cdot \cos \varphi + \Delta D \cdot \sin \varphi \quad (2.33)$$

$$\Delta F_t = \Delta L \cdot \sin \varphi - \Delta D \cdot \cos \varphi \quad (2.34)$$

όπου  $\varphi = \alpha + \beta$  και  $\beta$  η γωνία θέσης του πτερυγίου ως προς το επίπεδο περιστροφής του δρομέα.

Ορίζονται συντελεστές αξονικής και περιφερειακής δύναμης οι :

$$C_x = C_l \cdot \cos \varphi + C_d \cdot \sin \varphi \quad (2.35)$$

$$C_t = C_l \cdot \sin \varphi + C_d \cdot \cos \varphi \quad (2.36)$$

οπότε οι σχέσεις (2.33) και (2.34) για την αξονική και την περιφερειακή ταχύτητα γράφονται :

$$\Delta F_x = \frac{1}{2} \cdot C_x \cdot \rho \cdot W^2 \cdot C \cdot \Delta r \quad (2.37)$$

$$\Delta F_t = \frac{1}{2} \cdot C_t \cdot \rho \cdot W^2 \cdot C \cdot \Delta r \quad (2.38)$$

Από το τρίγωνο ταχυτήτων του σχήματος 2.4.β προκύπτει ότι:

$$W = U \cdot (1 - a) \cdot \sin \varphi$$

$$\Delta F_x = \frac{1}{2} \cdot C_x \cdot \rho \cdot U^2 \cdot (1 - a)^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot C \cdot \Delta r \quad (2.39)$$

$$\Delta F_t = \frac{1}{2} \cdot C_t \cdot \rho \cdot U^2 \cdot (1 - a)^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot C \cdot \Delta r \quad (2.40)$$

Αν  $B$  είναι το πλήθος των πτερυγίων του δρομέα, τότε στον στοιχειώδη ροϊκό σωλήνα ακτίνας  $r$  και πάχους  $\Delta r$  λόγω αλληλεπίδρασης με το δρομέα αναπτύσσονται η αξονική δύναμη  $B\Delta F_x$  και η περιφερειακή δύναμη  $B\Delta F_t$ .

Η περιφερειακή δύναμη  $B\Delta F_t$  παράγει το έργο του ανεμοκινητήρα δημιουργώντας τη στοιχειώδη ροπή :

$$dM = B \cdot \Delta F_t \cdot r \quad (2.41)$$

και την στοιχειώδη ισχύ :

$$N = B \cdot \Delta F_t \cdot \Omega \cdot r \quad (2.42)$$

Η αξονική δύναμη καθώς και η ροπή συσχετίζονται μέσω των νόμων διατήρησης της ορμής και της ροπής της ορμής με τις αλλαγές των κινηματικών μεγεθών του ρευστού μέσα στον στοιχειώδη ροϊκό σωλήνα.

Η εξίσωση των εκφράσεων για τη στοιχειώδη δύναμη (2.26) και 2.37) και την ροπή (2.27) και (2.41) οδηγεί αντίστοιχα στις σχέσεις για τους συντελεστές αξονικής και περιφερειακής επαγωγής :

$$\frac{a}{1-a} = \frac{B \cdot C \cdot C_l}{8 \cdot \pi \cdot r \cdot \tan \varphi \cdot \sin \varphi} (1 + \varepsilon \cdot \tan \varphi) \quad (2.43)$$

$$\frac{a'}{1-a'} = \frac{B \cdot C \cdot C_l}{8 \cdot \pi \cdot r \cdot \cos \varphi} (1 - \varepsilon \cdot \operatorname{ctg} \varphi) \quad (2.44)$$

$$\varepsilon = \frac{C_d}{C_l}$$

Στις σχέσεις αυτές χρησιμοποιήθηκε και η σχέση :

$$\tan \varphi = \frac{U \cdot (1-a)}{\Omega \cdot r \cdot (1+a')} \quad (2.45)$$

η οποία προκύπτει από το τρίγωνο των ταχυτήτων.

Οι προηγούμενες τρεις σχέσεις μπορούν να αδιαστατοποιηθούν με την

εισαγωγή της στερεότητας  $\sigma$  του δρομέα, που ορίζεται ως  $\sigma = \frac{B \cdot \bar{C}}{R}$ , ( $\bar{C}$  είναι η μέση χορδή του πτερυγίου) της αδιάστατης ακτινικής θέσης  $x$ , που ορίζεται

ως:  $x = \frac{r}{R}$  και της αδιάστατης ταχύτητας ακροπτερυγίου,  $\lambda$ , (Tip Speed Ratio, TSR), που ορίζεται ως :

$$\lambda = \frac{\Omega \cdot R}{U}$$

οπότε παίρνουν την μορφή :

$$\frac{a}{1-a} = \frac{\sigma \cdot \frac{C}{\rho} \cdot C_l}{8 \cdot x \cdot \tan \varphi \cdot \sin \varphi} (1 + \varepsilon \cdot \tan \varphi) \quad (2.46)$$

$$\frac{a'}{1-a'} = \frac{\sigma \cdot \frac{C}{\rho} \cdot C_l}{8 \cdot x \cdot \cos \varphi} (1 - \varepsilon \cdot \operatorname{ctg} \varphi) \quad (2.47)$$

$$\tan \varphi = \frac{\lambda \cdot (1-a)}{x \cdot (1+a')} \quad (2.48)$$

Οι σχέσεις αυτές επαρκούν για να υπολογιστεί η αεροδυναμική απόδοση-συμπεριφορά δρομέα (γνωστών γεωμετρικών στοιχείων) σε διάφορες καταστάσεις λειτουργίας  $\lambda$ . Πράγματι οι τρεις εξισώσεις έχουν σε κάθε ακτινική θέση  $x$  άγνωστους τους συντελεστές αξονικής επαγωγής  $a$ , περιφερειακής επαγωγής  $a'$ , και τον συντελεστή άνωσης  $C_l$  (ή γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$ ). Συνεπώς με μια αριθμητική διαδικασία αριθμητικών δοκιμών είναι δυνατόν σε κάθε ακτινική θέση να επιλυθεί το σύστημα των εξισώσεων και να προκύψει η αεροδυναμική κατάσταση του δρομέα. Μια τέτοια επαναληπτική διαδικασία υπολογισμού των λειτουργικών παραμέτρων του δρομέα σε κάθε αδιάστατη ακτινική θέση θα μπορούσε να ακολουθήσει τα εξής στάδια:

- Υποθέτουμε τιμές των  $a$  και  $a'$  (π.χ.  $a=0$ ,  $a'=0$ )
- Υπολογίζουμε το  $\varphi$  από την εξίσωση (2.48)
- Υπολογίζουμε τη γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$  από την εξίσωση  $\alpha = \varphi - \beta$  και κατόπιν τους συντελεστές  $C_l$  και  $C_d$ .
- Ενημερώνουμε τις τιμές των συντελεστών  $a$  και  $a'$  από τις εξισώσεις (2.46) και (2.47) και επαναλαμβάνεται η επαναληπτική-διαδικασία μέχρι σύγκλισης.
- Μετά τη σύγκλιση υπολογίζονται στη συγκεκριμένη ακτινική θέση οι στοιχειώδεις δυνάμεις και ο τοπικός συντελεστής ισχύος και
- Τα προηγούμενα βήματα επαναλαμβάνονται για όλες τις ακτινικές θέσεις από  $x=0$  έως  $x=1$ .

Η δύναμη, η ροπή, ο βαθμός απόδοσης (συντελεστής ισχύος) και άλλα μεγέθη προκύπτουν τότε από την εφαρμογή των αντίστοιχων σχέσεων (2.26) μέχρι (2.28). Η συνολική δύναμη που ενεργεί στο δρομέα θα είναι:

$$T = \int_{r=0}^R \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot U^2 \cdot (1-a) \cdot 2 \cdot a \cdot dr \quad (2.49)$$

Η συνολική ροπή που ενεργεί στο δρομέα θα είναι :

$$M = \int_{r=0}^R \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot U \cdot (1-a) \cdot 2 \cdot a' \cdot \Omega \cdot r \cdot dr \quad (2.50)$$

Η συνολική ισχύς του δρομέα είναι :

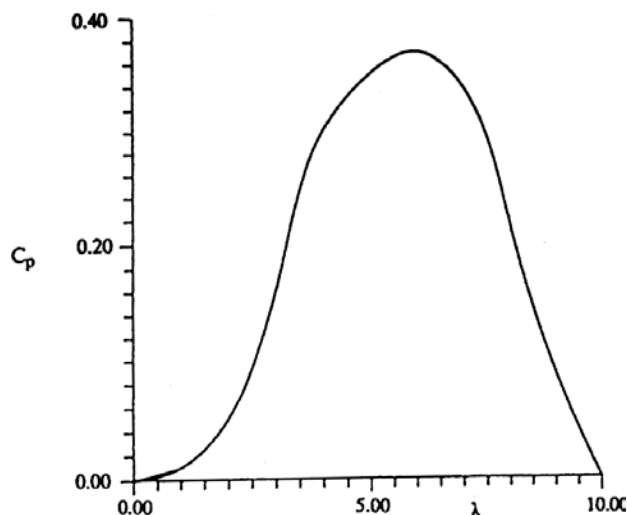
$$P = \int \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{U^3}{2} \cdot C_p \cdot dr \quad (2.51)$$

ενώ ο συντελεστής ισχύος του δρομέα προκύπτει από τη σχέση :

$$\bar{C}_p = \frac{P}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot U^3} \quad (2.52)$$

Τα προηγούμενα ολοκληρώματα υπολογίζονται αριθμητικά χωρίζοντας την ακτίνα του δρομέα σε ένα πλήθος λωρίδων πλάτους  $\Delta r$  (π.χ.  $\Delta r = R/10$ ),

Είναι φανερό ότι τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης εξαρτώνται μόνο από μια παράμετρο, την ταχύτητα ακροπερυγίου  $\lambda$ , οπότε η επανάληψη της προηγούμενης διαδικασίας για άλλες τιμές ταχύτητας ακροπερυγίου θα οδηγήσει στις καμπύλες λειτουργίας του δρομέα αντιπρόσωπος των οποίων είναι η σχέση συντελεστή ισχύος και ταχύτητας  $\lambda$ , με τυπική μορφή αυτή του σχήματος 2.6.



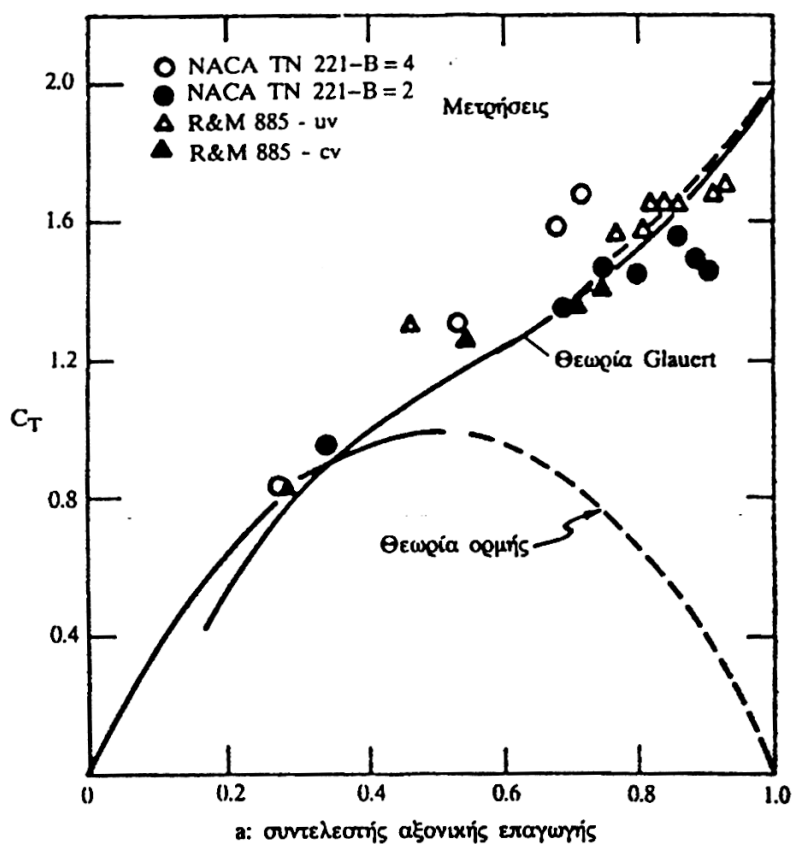
Σχήμα Ι.2.6.: Τυπικό διάγραμμα  $C_p - \lambda$ .

## 1.4. ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΔΙΣΚΟΥ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

### 1.4.1 Κατάσταση πέδησης (φρένου)

Από την θεωρία του δίσκου ενέργειας προκύπτει ότι για μεγάλους συντελεστές αξονικής επαγωγής, η ταχύτητα του ρευστού πολύ μακριά κατάντι του δίσκου μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές (για συντελεστές αξονικής επαγωγής μεγαλύτερους του 0.5). Σε τέτοιες συνθήκες λειτουργίας η θεωρία του δίσκου ενέργειας αποτυγχάνει, συνεπώς υπάρχει άνω όριο της ισχύος αυτής. Ο Glauert διεύρυνε την περιοχή ισχύος της θεωρίας διορθώνοντας την σχέση για τον συντελεστή ώθησης  $C_T$  για  $a > 0.5$  σύμφωνα με το Σχήμα 1.3.1. Η προτεινόμενη από τον Glauert σχέση βασίστηκε σε πειράματα ελίκων σε αεροδυναμική σήραγγα (wind aerodynamic tunnel) και μπορεί να προσεγγιστεί αναλυτικά από την σχέση δευτέρου βαθμού :

$$C_T = \begin{cases} 4a \cdot (1-a) & \text{για } a < 0,4 \\ 1 - 8a^2 - 0.65a + 0.84 & \text{για } 0,4 < a < 1 \end{cases} \quad (3.1)$$



Σχήμα 1.3.1.: Διόρθωση συντελεστή ώθησης κατά Glauert.

#### **I.4.2 Διορθώσεις ακροπτερυγίων - Διόρθωση Prandtl**

Η θεωρία του δίσκου ενέργειας, που τα συμπεράσματά της υπό μορφή σχέσεων παρουσιάστηκαν προηγουμένως, δεν λαμβάνει υπόψη τις αεροδυναμικής φύσης απώλειες λόγω των εκρεόντων στροβίλων από τα ακροπτερύγια (tips) της ανεμογεννήτριας, που σημειωτέον είναι πεπερασμένου πλήθους και όχι απείρου, όπως υποθέτει η θεωρία του Betz. Η θεωρία του Betz προϋποθέτει ομοιόμορφη ροή διαμέσου κάθε δακτυλίου του δικτύου της ανεμογεννήτριας. Οι δίνες όμως που εκρέουν από τα ακροπτερύγια, δημιουργούν ένα επαγόμενο πεδίο ταχύτητας το οποίο δεν είναι ομοιόμορφο και μεταβάλλεται παροδικά, γύρω από κάθε δακτύλιο, με περίοδο που σχετίζεται προφανώς με τον αριθμό των πτερυγίων της ανεμογεννήτριας. Συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι η μείωση της γωνίας πρόσπτωσης, με συνέπεια τη μείωση της περιφερειακής συνιστώσας της άνωσης, άρα και μείωση της ροπής. Οι επιδράσεις είναι πολύ έντονες στην περιοχή κοντά στο ακροπτερύγιο και μειώνεται στα εσωτερικά στοιχεία του πτερυγίου.

Μια καλή προσέγγιση των ανωτέρω απωλειών, έδωσε ο Prandtl. Ορίζεται έτσι ο συντελεστής απωλειών ακροπτερυγίου του Prandtl,  $F_T$  ως :

$$F_T = \frac{2}{\pi} \cdot \arccos(e^{-f_T})$$

όπου

$$f_T = \frac{B}{2} \cdot \frac{r_T - r}{r_T \cdot \sin \varphi_T}$$

Αν το πτερύγιο τελειώνει πριν φτάσει στην πλήμνη, τότε ορίζεται και ένας συντελεστής απωλειών που δίνεται από έκφραση ανάλογη, με τον συντελεστή  $f_H$  στην θέση του  $f_T$  :

$$f_H = \frac{B}{2} \cdot \frac{r - r_H}{r_H \cdot \sin \varphi_H}$$

Ο συνολικός συντελεστής απωλειών προκύπτει ως :

$$F = F_T \cdot F_H$$

Οι συντελεστές διόρθωσης Prandtl, εισάγονται στις σχέσεις (2.43).-(2.45) πολλαπλασιάζοντας τους συντελεστές  $a$  και  $a'$  με  $F$ .

Η πράξη απέδειξε ότι η επιτυχέστερη διόρθωση προκύπτει με την μείωση κατά 3% της διαμέτρου του δρομέα (δηλαδή αγνοείται η ενεργειακή συμβολή του ακραίου 3% της ακτίνας) και την εφαρμογή της θεωρίας του δίσκου ενέργειας ως έχει χωρίς περαιτέρω διορθώσεις απωλειών ακροπτερυγίων.

## 1.5. ΚΑΜΠΥΛΗ ΙΣΧΥΟΣ ΔΡΟΜΕΑ

Από την καμπύλη συντελεστή ισχύος του δρομέα ως συνάρτηση της ταχύτητας ακροπτερυγίου,  $\lambda$ , μπορεί να προκύψουν οι καμπύλες ισχύος του ανεμοκινητήρα για καθορισμένες στροφές του δρομέα ως συνάρτηση της ταχύτητας του πνέοντος ανέμου. Συγκεκριμένα από την καμπύλη συντελεστή ισχύος και για καθορισμένες στροφές δρομέα προκύπτει η καμπύλη συντελεστή ισχύος - ταχύτητας ανέμου η οποία στην συνέχεια με τις σχέσεις:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_p \cdot \pi \cdot R^2 \cdot V^3$$

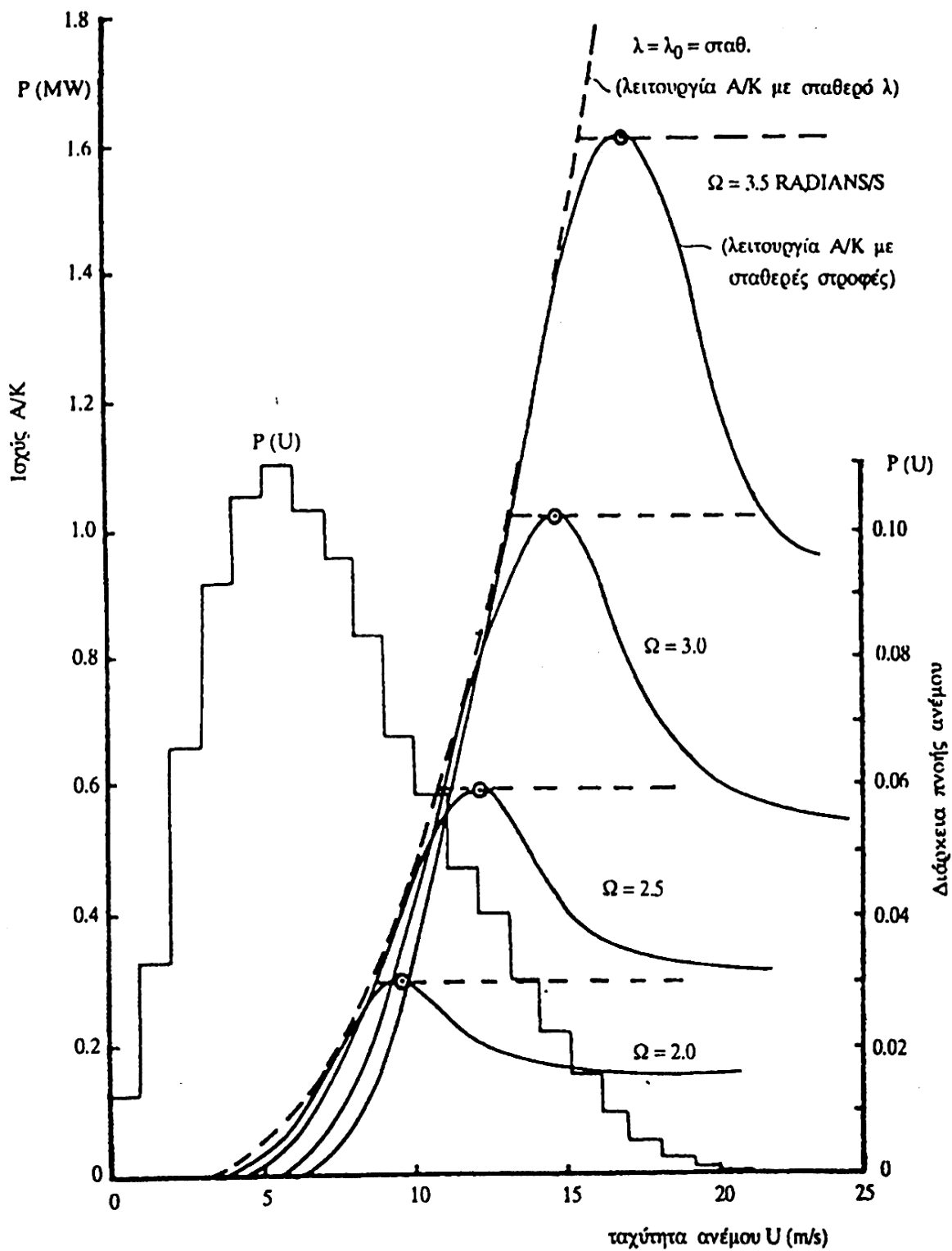
και

$$M = \frac{P}{\Omega}$$

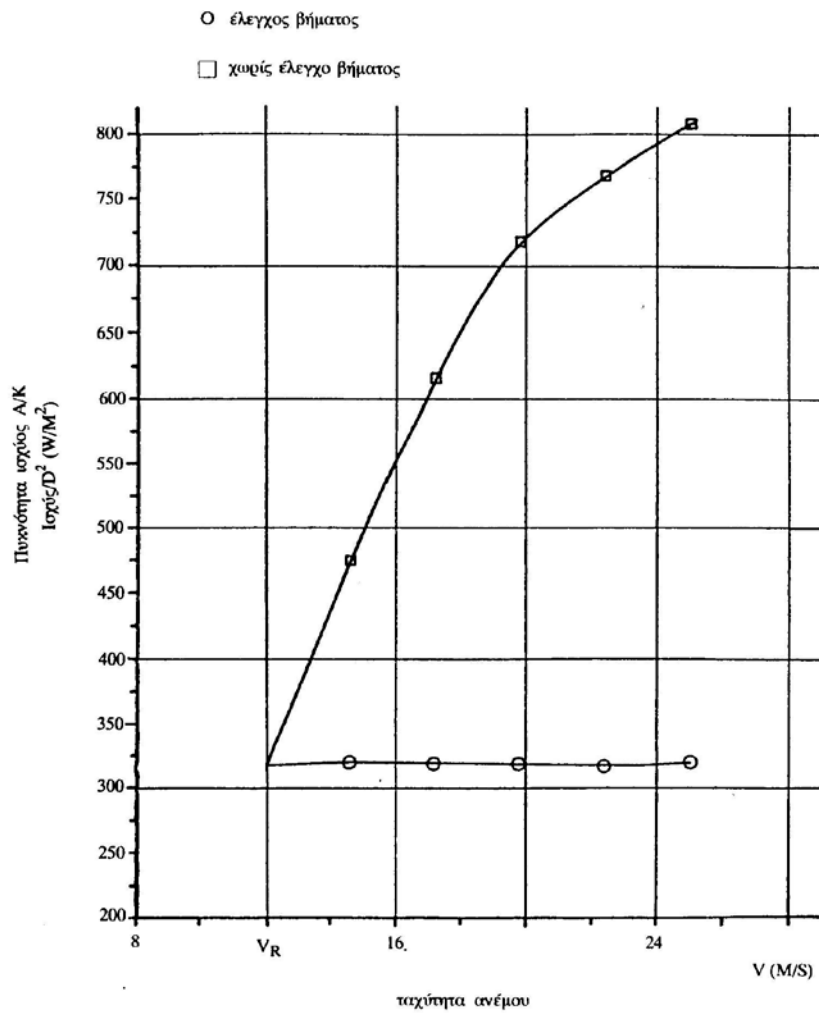
μετατρέπεται σε καμπύλη ισχύος ή ροπής του δρομέα ως συνάρτηση της ταχύτητας του πνέοντος ανέμου.

Τυπικές μορφές καμπυλών ισχύος και ροπής για δρομέα διαμέτρου 50 m παρουσιάζονται στο Σχήμα I.4.1.

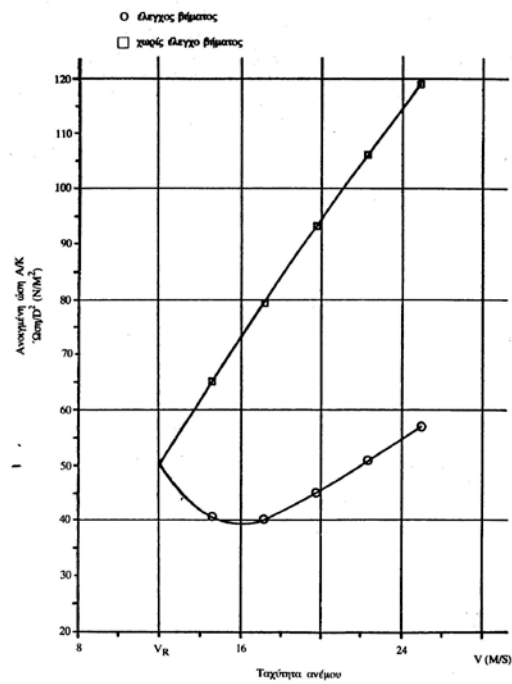
Η στρατηγική λειτουργίας μεταβλητού βήματος αλλά σταθερών στροφών διατηρεί σταθερή την ισχύ για ταχύτητα ανέμου μεγαλύτερη της ονομαστικής και μειώνει δραστικά τις καταπονήσεις των πτερυγίων, (Σχήμα I.4.2.α και 4.2.β.).



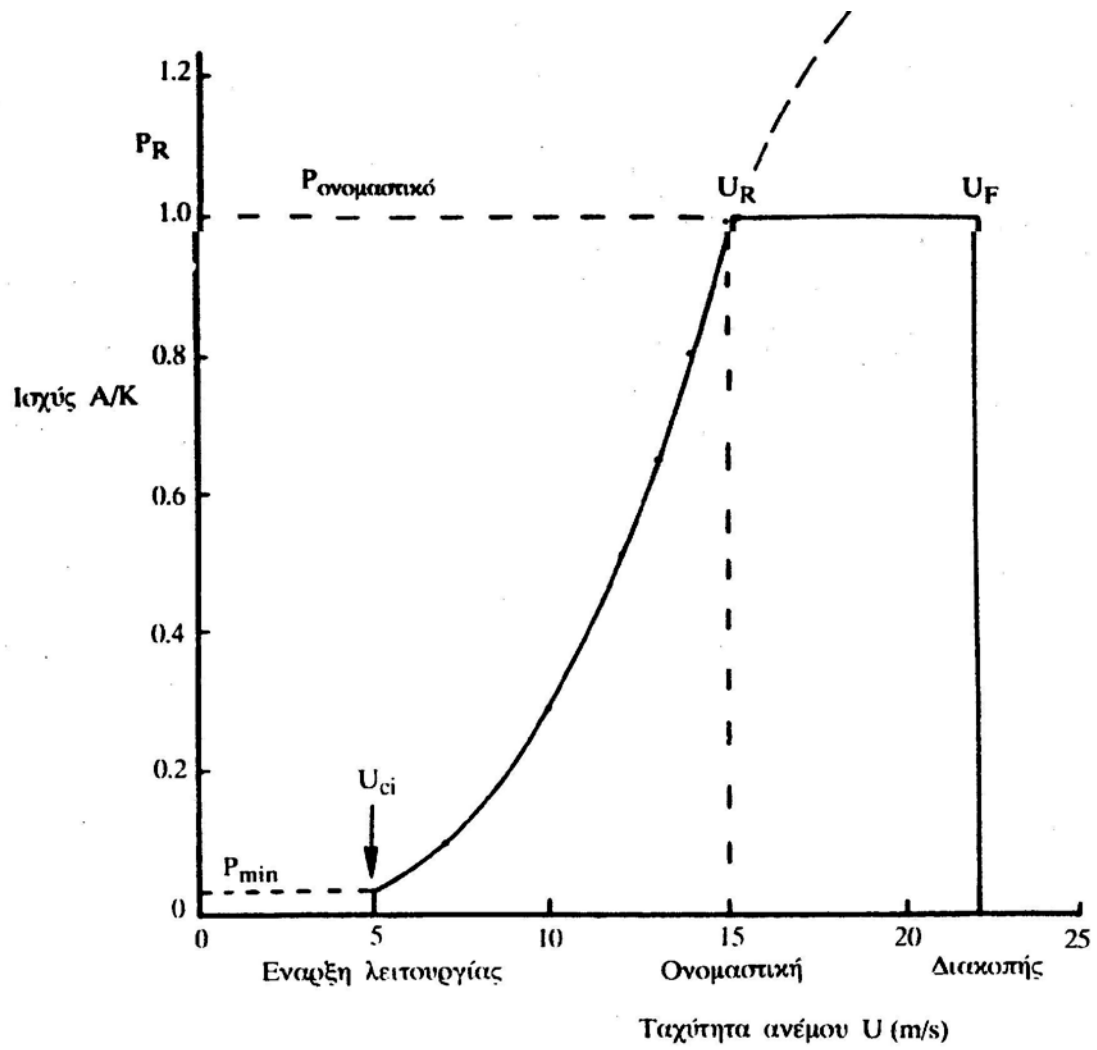
Σχήμα Ι.4.1.: Καμπύλες ισχύος δρομέα διαμέτρου 50m. Διακρίνονται οι δύο στρατηγικές λειτουργίες του δρομέα: (α) σταθερού  $\lambda$ , (β) σταθερού βήματος-σταθερών στροφών.



Σχήμα 1.4.2.α.: Απόδοση δρομέα με και χωρίς ρύθμιση ακροπτερυγίου.



Σχήμα 1.4.2.β.: Ωστική δύναμη στο δρομέα.



Σχήμα Ι.4.3.: Καμπύλη ισχύος Α/Γ διαμέτρου δρομέα 50m.

## 1.6. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΔΡΟΜΕΑ

Ως βέλτιστος δρομέας μπορεί να ορισθεί ο δρομέας δοσμένης διαμέτρου που έχει ελάχιστο κόστος παραγόμενης αιολικής kWh. Στην διαμόρφωση του κόστους σημαντική επίδραση έχει η ετήσια παραγόμενη αιολική ενέργεια και το κόστος του δρομέα.

Το κόστος του δρομέα εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, μπορούμε όμως να δεχθούμε ότι είναι ανάλογο των διαστάσεων των πτερυγίων, δηλαδή της στερεότητας του δρομέα. Οι εξισώσεις που εκφράζουν τις συνθήκες λειτουργίας του δρομέα, έχουν εκτός των τριών γνωστών  $a$ ,  $a'$ ,  $C_L$ , επιπλέον άγνωστους την στερεότητα  $\sigma$ , τον τρόπο μεταβολής της χορδής του πτερυγίου (π.χ. σταθερή χορδή δηλαδή ορθογωνικής μορφής κάτοψη ή τραπεζοειδούς μορφής κάτοψη πτέρυγας), την γωνία  $\beta$  θέσης της αεροτομής και την ταχύτητα του ακροπτερυγίου. Είναι φανερός συνεπώς ο πολυπαραμετρικός χαρακτήρας της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης του δρομέα, βελτιστοποίηση που μπορεί να γίνει σήμερα ακόμα και χωρίς αλγοριθμική καθοδήγηση από τον ηλεκτρονικό υπολογιστή (συνδυασμός των δυνατών παραμέτρων  $\sigma$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ , μορφής κάτοψης). Είναι όμως δυνατόν να μειωθούν οι δυνατοί συνδυασμοί των ανεξαρτήτων παραμέτρων εισάγοντας κριτήρια βελτιστοποίησης που να οδηγήσουν στην αριθμητική διαδικασία.

Ο συντελεστής ισχύος του δρομέα δίνεται από την σχέση :

$$\bar{C}_p = \int_0^1 C_p \cdot dx$$

Είναι φανερό ότι η ενεργειακή απόδοση του δρομέα εξαρτάται από τις παραμέτρους  $a$  και  $a'$ . Ο συντελεστής ισχύος για συγκεκριμένη ταχύτητα ακροπτερυγίου μπορεί να μεγιστοποιηθεί αν υπάρξει κάποια σχέση εξάρτησης μεταξύ των συντελεστών επαγωγής.

Ο Glauert εξετάζοντας τον ιδανικό δρομέα με άπειρο αριθμό πτερυγίων κατέληξε στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει η επαγόμενη ταχύτητα να είναι κάθετη στην συνισταμένη ταχύτητα  $W$  του ρευστού, βλέπε τρίγωνο ταχυτήτων. Με την παρατήρηση αυτή και για άπειρο αριθμό πτερυγίων ισχύουν οι σχέσεις (από το τρίγωνο ταχυτήτων) :

$$\tan \varphi = \frac{U \cdot (1 - a)}{\Omega \cdot r \cdot (1 + a')} = \frac{a' \cdot \Omega r}{a \cdot U}$$

Άρα για τον ιδανικό δρομέα ισχύει η επιπλέον σχέση:

$$(1 + a'^2) \cdot \lambda^2 \cdot x^2 = a \cdot (1 - a) \quad (5.1)$$

Με τη δεσμευτική αυτή σχέση μετά από μαθηματική ανάλυση μεγιστοποίησης του ολοκληρώματος για τον συντελεστή ισχύος του δρομέα προκύπτει ότι για τον βέλτιστο δίσκο ενέργειας ισχύει η σχέση :

$$a' = \frac{1 - 3a}{4a - 1} \quad (5.2)$$

οπότε προκύπτει και η σχέση :

$$a' \cdot \lambda^2 \cdot x^2 = (1 - a) \cdot (4a - 1) \quad (5.3)$$

Συνοψίζοντας τη διαδικασία βελτιστοποίησης του δίσκου κατά Glauert οι τρεις λειτουργικές σχέσεις καθώς και οι σχέσεις (5.2) - (5.3) με αγνώστους τα  $a$ ,  $a'$ ,  $C_L$ ,  $\beta$  και  $C$  μπορούν να επιλυθούν με επαναληπτική διαδικασία και να οδηγήσουν στο βέλτιστο δρομέα. Στον βέλτιστο αυτόν δρομέα για «άπειρο πλήθος πτερυγίων» ο μέγιστος συντελεστής ισχύος προκύπτει για  $a = 1/3$  οπότε η περιφερειακή ταχύτητα μεταβάλλεται σύμφωνα με την σχέση :

$$V_{\theta_s} = \frac{4}{9} \cdot \frac{U^2}{\Omega \cdot r}$$

Τα προηγούμενα ισχύουν για ένα μεγάλο πλήθος πτερυγίων δρομέα (π.χ. δρομέας καναδικού τύπου). Για μικρό πλήθος πτερυγίων επιδιώκεται η μεγιστοποίηση του τοπικού συντελεστή ισχύος  $C_p(r)$  σε κάθε ακτινική θέση. Πράγματι η σχέση:

$$\frac{dC_p}{da} = 0$$

οδηγεί μετά από εκτέλεση πράξεων στην συνθήκη βέλτιστου:

$$a = \frac{1}{2 + \frac{1}{\cos \varphi}} \quad \left( \text{για } \varepsilon = 0 \right) \quad (5.4)$$

Η συνθήκη αυτή αν συνδυασθεί με τις λειτουργικές σχέσεις (2.46) και (2.47) και (2.48) επιτρέπει τον υπολογισμό των μεγεθών  $a$ ,  $a'$ ,  $C_L$  και  $\beta$  με ανεξάρτητες παραμέτρους την στερεότητα, την μορφή κάτοψης της πτέρυγας και την ταχύτητα ακροπτερυγίου.

Συνήθως η κάτοψη είναι ορθογωνική ή τραπεζοειδής με λόγο χορδής ακροπτερυγίου προς χορδή πλήμνης ίσο με 0.5 .

Με βάση τα προηγούμενα δεν είναι πλέον δύσκολη η σύγχρονη αριθμητική επίλυση των εξισώσεων βελτιστοποίησης του δρομέα με τη βοήθεια αλγορίθμου βασισμένου σε επαναληπτική διαδικασία δοκιμών. Παράμετροι της βελτιστοποίησης είναι η σταθερότητα  $\sigma$  και η ταχύτητα ακροπτερυγίου. Είναι φανερό ότι ο βέλτιστος δρομέας είναι εκείνος με τη μέγιστη ετήσια ενεργειακή απόδοση αφού βέβαια σταθμιστεί η συμβολή της στερεότητας στην διαμόρφωση του κόστους κατασκευής του δρομέα.

## 1.7. ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΔΡΟΜΕΑ ΑΝΕΜΟΚΙΝΗΤΗΡΑ

Η ενεργειακή απόδοση του δρομέα ανεμοκινητήρα εκφράζεται από την καμπύλη συντελεστή ισχύος  $C_P$  και ταχύτητας ακροπτερυγίου  $\lambda (\lambda = \omega R/V)$ , όπου  $\omega$  η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δρομέα,  $R$  η ακτίνα του και  $V$  η ταχύτητα του ανέμου στο ύψος του άξονα του δρομέα.

Τυπική καμπύλη  $C_P$  -λ παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.6.1.

Η ροπή περιστροφής  $M$  που αναπτύσσει ο δρομέας και η οποία έχει πρωταρχική σημασία για την κίνηση της μηχανής εκτέλεσης έργου (π.χ. γεννήτρια, αντλία, συμπιεστής).

Προκύπτει από την σχέση :

$$M = \frac{P}{\Omega}$$

όπου  $P$  είναι η ισχύς του δρομέα.

Αλλά επειδή ισχύει :

$$P = \frac{1}{2} \cdot C_P \cdot \rho \cdot V^3 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

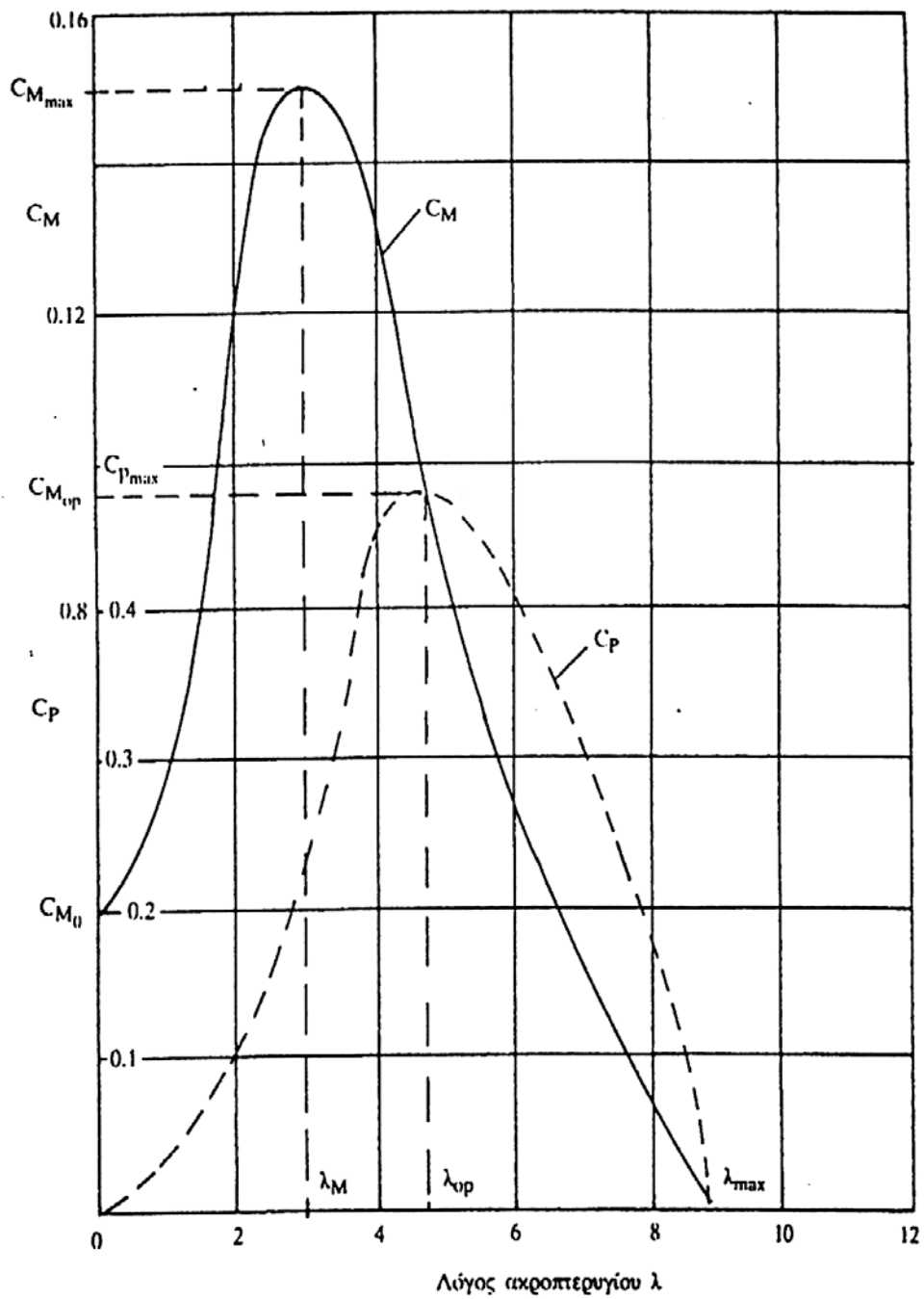
ορίζεται συντελεστής ροπής  $C_M$  :

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot R}$$

όποτε από την σχέση ορισμού της ροπής προκύπτει :

$$C_M = \frac{C_P}{\lambda}$$

Τυπική μεταβολή της σχέσης συντελεστή ροπής  $C_M$  και ταχύτητας ακροπτερυγίου παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.6.1 .



Σχήμα Ι.6.1.: Τυπικές καμπύλες  $C_m$  και  $C_p$  ενός ανεμοκινητήρα τριών περυγίων οριζοντίου άξονα

Ένας δρομέας ανεμοκινητήρα εργάζεται σε διάφορες ταχύτητες ανέμου, η δε γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του επιβάλλεται από τον κινούμενο μηχανισμό παραπέρα μετατροπής έργου. Για παράδειγμα αν ο δρομέας κινεί ασύγχρονη ηλεκτρική γεννήτρια τότε η συχνότητα του δικτύου επιβάλλει τις στροφές στη γεννήτρια (με κάποια μικρή ολίσθηση), οι οποίες με τη σειρά τους ανάλογα με το κιβώτιο ταχυτήτων μεταξύ δρομέα και ηλεκτρικής γεννήτριας επιβάλλονται στο δρομέα.

Στην περίπτωση που ο δρομέας κινεί αντλία, τότε η χαρακτηριστική της αντλίας σε συνδυασμό με τη χαρακτηριστική αντίσταση του δικτύου επιβάλλουν τις στροφές στο δρομέα του ανεμοκινητήρα.

Συνεπώς για τον υπολογισμό του σημείου λειτουργίας του ανεμοκινητήρα απαιτείται η γνώση των καμπυλών λειτουργίας του ανεμοκινητήρα όπως αυτές εκφράζονται από σχέσεις της μορφής:

$$P = P(V, n)$$

$$M = M(V, n)$$

όπου  $n$  οι στροφές του ανεμοκινητήρα.

Οι καμπύλες αυτές είναι εύκολο να προκύψουν από την καμπύλη του συντελεστή ισχύος  $C_p(\lambda)$  του ανεμοκινητήρα. Για παράδειγμα από τις σχέσεις ισχύος ή ροπής και ταχύτητας :

$$P = \frac{1}{2} \cdot C_p \cdot \rho \cdot V^3 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$M = \frac{1}{2} \cdot C_M \cdot V^2 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot R$$

μπορεί να προκύψει η καμπύλη λειτουργίας της μηχανής για διάφορα  $V$  με παράμετρο τις στροφές,, διότι για δοσμένη περιστροφή  $n$  (RPM), υπολογίζεται η ταχύτητα ακροπτερυγίου  $\lambda = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot R / 60 \cdot V$ , από την σχέση  $C_p(\lambda)$ , η τιμή του συντελεστή ισχύος,  $C_p$ , και στην συνέχεια η ισχύς ή η ροπή του ανεμοκινητήρα.