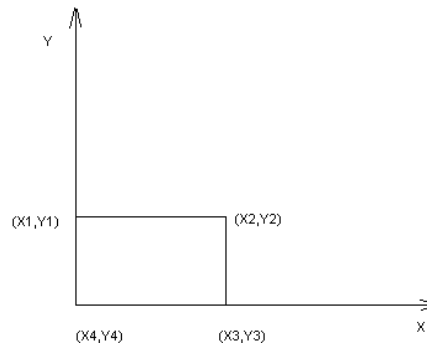


Θεωρία μετασχηματισμών

Μήτρα Μετασχηματισμού

Η γεωμετρία ενός αντικειμένου μπορεί να παρουσιαστεί από ένα σύνολο σημείων κατανεμημένων σε διάφορα επίπεδα. Έτσι λοιπόν ένα πλήθος δεδομένων για κάποιο αντικείμενο μπορεί να αναπαρασταθεί υπό την μορφή ενός πίνακα που ονομάζεται C_{old} :

$$C_{old} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_1 \\ x_1 & y_2 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$



Ορίζεται τώρα ένας τελεστής R που είναι η μήτρα μετασχηματισμού και ονομάζεται το καινούργιο μετασχηματισμένο αντικείμενο C_{new} . Ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός μπορεί τότε να παρασταθεί από τη σχέση :

$$C_{new} = C_{old} \cdot R$$

Η μήτρα μετασχηματισμού R μπορεί να προκαλέσει μετατόπιση σε συγκεκριμένη θέση, περιστροφή γύρω από σημείο ή άξονα, ανάκλαση, δημιουργία ειδώλου ως προς κάποιο επίπεδο κλπ.



Θεωρία μετασχηματισμών

Διδιάστατοι Μετασχηματισμοί Κλίμακας

Στους διδιάστατους μετασχηματισμούς η κλίμακα ελέγχεται από το μέγεθος των δύο στοιχείων της κύριας διαγωνίου της μήτρας μετασχηματισμού.

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}$$

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρείται ότι:

α) Όταν $R_{11} = R_{22}$, δημιουργείται μεγέθυνση γύρω από το σημείο αναφοράς ή ομοιόμορφη κλιμάκωση του αντικειμένου.

β) Όταν $R_{11} \neq R_{22}$, δημιουργείται παραμόρφωση του αντικειμένου ή ανομοιογενής κλιμάκωση.

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι μόνο το σημείο αναφοράς της κλιμάκωσης παραμένει αμετάβλητο από την όλη διαδικασία.

Για παράδειγμα, αν επιλεγεί η μήτρα R ίση με :

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
 και εφαρμοστεί στις κορυφές του αντικειμένου, επιτυγχάνεται η ομοιόμορφη μεγέθυνση κατά δυο φορές του αντικείμενου.

Αλλά, αν εφαρμοστεί η παρακάτω μήτρα :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
 λαμβάνεται παραμορφωμένο το σχήμα του αντικειμένου, αφού υπάρχει μεγέθυνση μόνο στην Y διεύθυνση, που προκαλεί μη ομοιόμορφη κλιμάκωση.



Θεωρία μετασχηματισμών

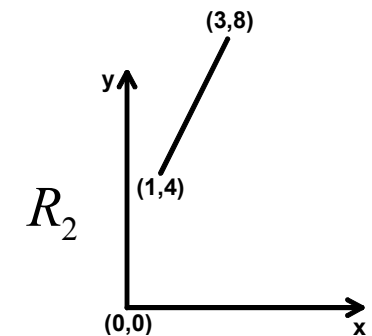
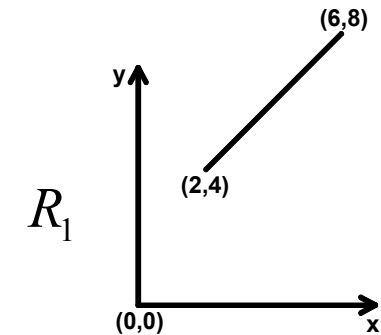
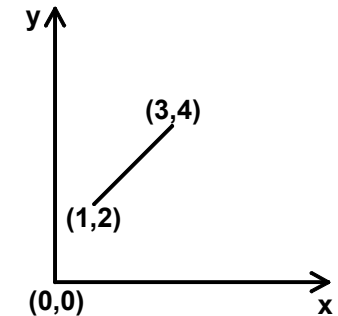
Παράδειγμα

Ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τα σημεία (1,2), (3,4) και εφαρμόζεται η μήτρα μετασχηματισμού κλίμακας στο επίπεδο

$$R_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Αν εφαρμοστεί η μήτρα μετασχηματισμού

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$



Θεωρία μετασχηματισμών

Περιστροφή γύρω από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων

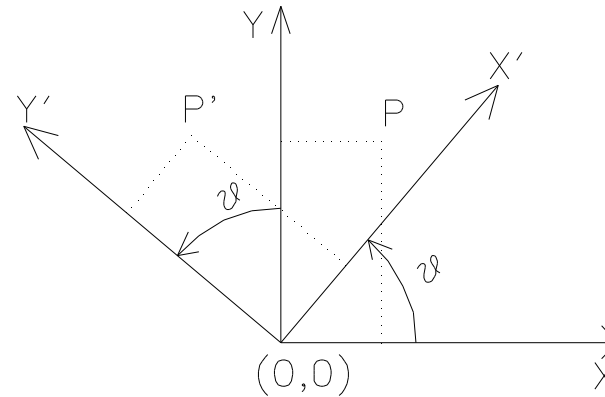
Θεωρείται x-y σύστημα συντεταγμένων. Αν περιστραφούν και οι δύο άξονες ανθρωπολογικά κατά γωνία θ λαμβάνεται ένα νέο σετ αξόνων x' και y' . Για ένα σημείο P1 με συντεταγμένες (x_1, y_1) , η νέα θέση του P1' προσδιορίζεται από ένα νέο ζεύγος συντεταγμένων (x'_1, y'_1) , μετά την περιστροφή.

Η σχέση μεταξύ των παλιών και των νέων συντεταγμένων είναι :

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \\ y'_1 &= x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

και με μορφή πινάκων :

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$



Εκφράζοντας τις παλιές συντεταγμένες ως συνάρτηση των νέων, παράγεται η παρακάτω έκφραση, που είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = [R^{-1}] \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} \quad \text{Για την } R \text{ αποδεικνύεται ότι ισχύει } R^{-1} = R^T$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix}$$



Θεωρία μετασχηματισμών

Περιστροφή γύρω από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων

Η τελική μήτρα μετασχηματισμού, που συνδέει τις παλιές με τις νέες συντεταγμένες, δηλαδή οι πίνακες υπό την μορφή διανύσματος και αντικατασταθεί η μήτρα R με την RT αντίστοιχα στην κάθε περίπτωση, λαμβάνεται :

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Περιστροφή σε Διαφορετικές Γωνίες

Σε περιπτώσεις, όπου η περιστροφή των αξόνων x και y γίνεται σε δυο διαφορετικές γωνίες θ_1 , θ_2 , οι εξισώσεις των συντεταγμένων των σημείων είναι:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

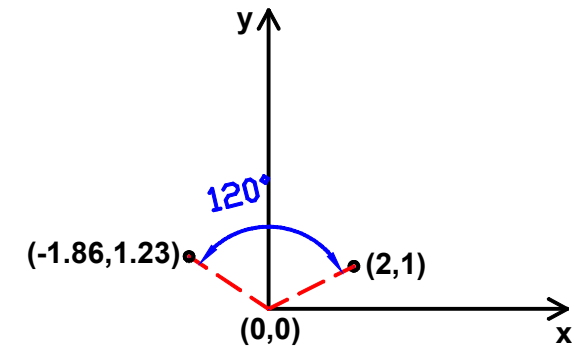


Θεωρία μετασχηματισμών

Παράδειγμα

Σημείο (2,1) περιστρέφεται στο επίπεδο γωνία $\theta = 120$ μοίρες. Οι νέες του συντεταγμένες υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0,866 \\ 0,866 & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.866 \\ 1.2321 \end{bmatrix}$$



Θεωρία μετασχηματισμών

Σύνθετοι Μετασχηματισμοί

Η μήτρα σύνθετων μετασχηματισμών, ορίζεται ως η μήτρα που προκαλεί περισσότερους από ένα μετασχηματισμούς στον πίνακα αναφοράς C. Για παράδειγμα, αν υπάρχει κλιμάκωση και περιστροφή της κλιμακούμενης γεωμετρίας ανθρωπολογικά με γωνία ίση με θ , γύρω από το σημείο αναφοράς, η νέα μήτρα για το C προσδιορίζεται από τη σχέση :

$$C_{new} = C_{old} \cdot R_s \cdot R_r$$

Όπου R_s και R_r οι μήτρες μετασχηματισμού κλιμάκωσης και περιστροφής αντίστοιχα. Η συνολική μήτρα μετασχηματισμού, που πραγματοποιεί και τις δυο διαδικασίες ταυτόχρονα είναι:

$$R = R_s \cdot R_r$$

Οι σύνθετοι μετασχηματισμοί είναι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό, σε όσα λογισμικά CAD χρησιμοποιείται, γιατί έχει το πλεονέκτημα της εξοικονόμησης χρόνου και χώρου αποθήκευσης.



Θεωρία μετασχηματισμών

Διδιάστατη Μεταφορά

Για να ξεπεραστεί η δυσκολία που προκαλεί η 2x2 μήτρα μετασχηματισμού για μεταφορά, λόγω της ανάγκης πολλαπλασιασμού με ένα διάνυσμα 3x1, αυξάνεται ο βαθμός της μήτρας αυτής σε 3x3, συνεπώς η R γίνεται :

$$R = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{bmatrix}$$

και η αναπαράσταση κάθε σημείου (x, y) παίρνει την ακόλουθη μορφή (x,y,1). Έτσι ικανοποιούνται και οι κανόνες για τον πολλαπλασιασμό δύο πινάκων. Η διαδικασία της μεταφοράς επιτυγχάνεται όταν η R πάρει τη μορφή :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί Κλίμακας

Αντίστοιχα, ο συνολικός μετασχηματισμός κλίμακας επιτυγχάνεται όταν η R πάρει τη μορφή :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

η παράμετρος s δίνεται από τη σχέση: $s=1/n$
όπου n συντελεστής κλιμάκωσης.



Θεωρία μετασχηματισμών

Περιστροφή Γύρω από Τυχαίο Σημείο

Εκτός από την περιστροφή γύρω από την αρχή των συντεταγμένων (0,0) πολλές φορές ζητείται να περιστραφεί κάποιο αντικείμενο γύρω από τυχαίο σημείο στο χώρο. Αν η ανάλυση περιοριστεί σε δυο διαστάσεις, η περιστροφή γύρω από τυχαίο σημείο πραγματοποιείται, εάν πρώτα μετακινηθεί το κέντρο βάρους του αντικειμένου στο επιθυμητό σημείο και στη συνέχεια περιστραφεί γύρω από την αρχή των αξόνων (0,0). Όταν εκτελεστεί η περιστροφή μεταφέρεται το αντικείμενο στην αρχική του θέση.

Αν απαιτείται για παράδειγμα, να περιστραφεί το διάνυσμα θέσης $[x,y,1]$ γύρω από το σημείο (m, n) κατά μια γωνία θ πρέπει :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -m(\cos\theta - 1) + n\sin\theta & -n(\cos\theta - 1) - m\sin\theta & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Θεωρία μετασχηματισμών

Τρισδιάστατοι Μετασχηματισμοί Κλίμακας

Μήτρα μετασχηματισμού

$$R_s = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

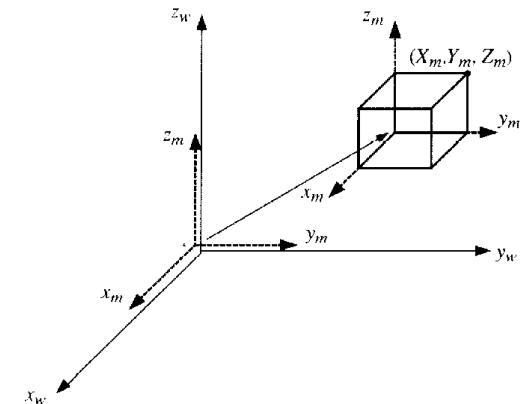
$a = b = c \neq 0$ ομοιόμορφη κλιμάκωση, διαφορετικά η κλιμάκωση του αντικειμένου είναι ανομοιόμορφη ή υπάρχει παραμόρφωση

Τρισδιάστατοι Μετασχηματισμοί Μετατόπισης

Μήτρα μετασχηματισμού

$$R_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a, b, c οι συντεταγμένες του διανύσματος μετατόπισης



Θεωρία μετασχηματισμών

Τρισδιάστατη Περιστροφή

Η τρισδιάστατη περιστροφή ενός αντικειμένου επιτυγχάνεται με τον πίνακα R_r της γενικής μήτρας μετασχηματισμού :

$$R_r = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & 3x3 & & 0 \\ & Matrix & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η περιστροφή γύρω από τον άξονα x επιτυγχάνεται με τον υποπίνακα :

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Η περιστροφή γύρω από τον άξονα y επιτυγχάνεται με τον υποπίνακα :

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Η περιστροφή γύρω από τον άξονα z επιτυγχάνεται με τον υποπίνακα :

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Όταν ο άξονας περιστροφής είναι ένας τυχαίος άξονας στον χώρο, ο τελικός πίνακας περιστροφής προκύπτει από διαδοχικούς μετασχηματισμούς.



Θεωρία μετασχηματισμών

Τρισδιάστατη Περιστροφή Γύρω από Τυχαιο Σήμειο

Οι διαδοχικές περιστροφές γύρω από τους άξονες X, Y, Z, μπορούν να εκφραστούν ως μία περιστροφή, γύρω από ένα αυθαίρετο άξονα. Η περιστροφή κατά γωνία γ γύρω από αυτόν τον άξονα δίνεται από την παρακάτω μήτρα μετασχηματισμού :

$$R_r = R_x^\alpha \cdot R_y^\beta \cdot R_z^\gamma \quad R_x^\alpha, R_y^\beta, R_z^\gamma \text{ οι πίνακες περιστροφής γύρω από τους x,y και z άξονες με γωνίες στρέψης } \alpha, \beta, \gamma \text{ αντίστοιχα}$$

Αυτή η διαδικασία έχει κάποια μειονεκτήματα, που έχουν σχέση με τον προσδιορισμό των σωστών γωνιών α, β, γ , καθώς και της σωστής φοράς τους. Η μήτρα μετασχηματισμού R_r σε αυτήν την περίπτωση προσδιορίζεται από την παρακάτω διαδικασία :

1. Μεταφορά του αντικειμένου, έτσι ώστε η αρχή του συστήματος συντεταγμένων να περνά από τον άξονα περιστροφής.
2. Περιστροφή του αντικειμένου.
3. Μεταφορά του αντικειμένου στην αρχική του θέση.

Αντικαθιστώντας τις τρεις μήτρες μεταφοράς λαμβάνεται :

$$C^* = C \cdot R_{T1} \cdot R_r \cdot R_{T2}$$

$$[R_{T1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x & -\Delta y & -\Delta z & 1 \end{bmatrix} \quad [R_{T2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z & 1 \end{bmatrix} \quad [R_r] = \begin{bmatrix} C_2 C_3 & C_1 S_3 + S_1 S_2 C_3 & S_1 S_3 - C_1 S_2 C_3 & 0 \\ -C_2 C_3 & C_1 S_3 - S_1 S_2 C_3 & S_1 S_3 + C_1 S_2 C_3 & 0 \\ S_2 & -S_1 C_2 & C_1 C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = (\cos \alpha) \quad C_2 = (\cos \beta) \quad C_3 = (\cos \gamma)$$

$$S_1 = (\sin \alpha) \quad S_2 = (\sin \beta) \quad S_3 = (\sin \gamma)$$

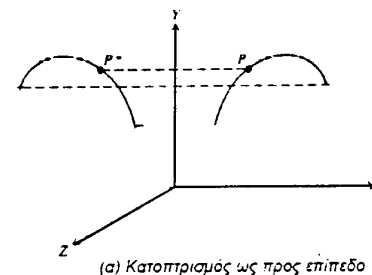


Θεωρία μετασχηματισμών

Τρισδιάστατος Κατοπτρισμός

Με τον όρο εννοείται η δημιουργία κατοπτρικού ειδώλου ενός αντικειμένου ως προς ένα ή και περισσότερα επίπεδα. Η πιο απλή ανάκλαση δημιουργείται ως προς ένα επίπεδο. Η ανάκλαση στο επίπεδο x-y δίνεται από την μήτρα :

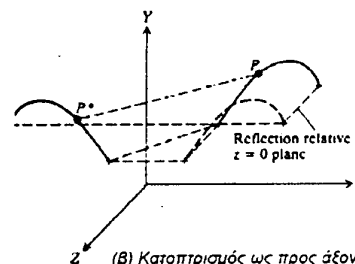
$$R_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



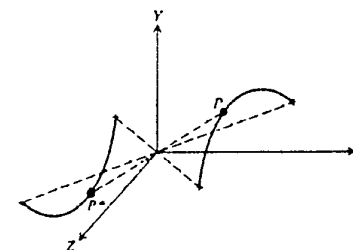
(α) Κατοπτρισμός ως προς επίπεδο

Όμοια για ανάκλαση ως προς το επίπεδο y-z η μήτρα δίνεται :

$$R_r = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(β) Κατοπτρισμός ως προς άξονα



(γ) Κατοπτρισμός ως προς αρχή ΣΣ.

Επίσης και για το επίπεδο x-z :

$$R_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Θεωρία μετασχηματισμών

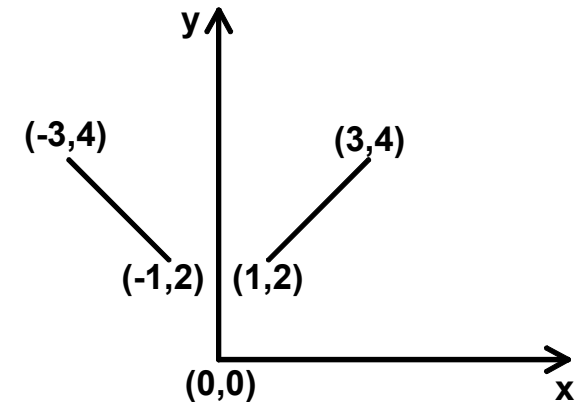
Παράδειγμα

Σε ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τα σημεία (1,2), (3,4), να βρεθεί το κατοπτρικό του ευθύγραμμο τμήμα, ως προς τον άξονα των y.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, έχουμε κατοπτρικό σχήμα ως προς το επίπεδο y-z, οπότε εφαρμόζεται η αντίστοιχη μήτρα μετασχηματισμού

$$R_r = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Θεωρία μετασχηματισμών

Τρισδιάστατη Απεικόνιση – Ορθή προβολή

Στο λογισμικό CAD γίνεται προσαρμογή της τρισδιάστατης απεικόνισης σε διδιάστατη απεικόνιση, για την προβολή της γεωμετρίας στην οθόνη, η οποία είναι δύο διαστάσεων.

Για την πραγματοποίηση της παραπάνω διαδικασίας ακολουθούνται μαθηματικές μέθοδοι, για τη δημιουργία του πίνακα μετασχηματισμού, που επιτυγχάνει την μετατροπή της τρισδιάστατης απεικόνισης ενός αντικειμένου, σε διδιάστατη. Η προβολή από 3D σε 2D γίνεται δυνατή, προβάλλοντας πάνω στο επίπεδο x-y, οπότε $z = 0$

$$R = \begin{bmatrix} 3x3 & 0 \\ \text{Rotation} & 0 \\ \text{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Όμοια η προβολή πάνω στο επίπεδο $z = t$ επιτυγχάνεται με τον ακόλουθο τρόπο :

$$R = \begin{bmatrix} 3x3 & 0 \\ \text{Rotation} & 0 \\ \text{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{bmatrix}$$

Η συνολική μήτρα μετασχηματισμού R' είναι το γινόμενο των δυο πινάκων. Ο πρώτος περιστρέφει το αντικείμενο, αν αυτό απαιτείται, και ο δεύτερος προβάλλει το αποτέλεσμα πάνω σε ένα διδιάστατο επίπεδο (για την συγκεκριμένη περίπτωση το επίπεδο $z = t$).



Θεωρία μετασχηματισμών

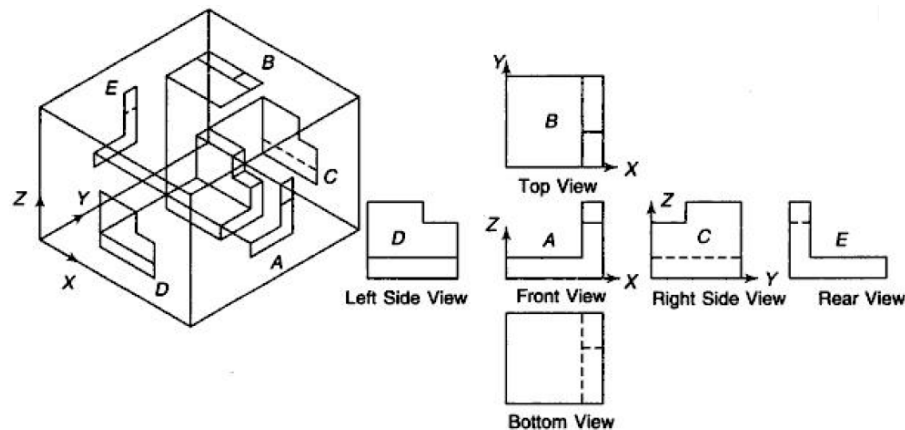
Τρισδιάστατη Απεικόνιση – Ορθή προβολή

Για προβολή στο επίπεδο y-z

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Για } x = 0 \text{ και για } x = r \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για προβολή στο επίπεδο x-z

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Για } y = 0 \text{ και για } y = s \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



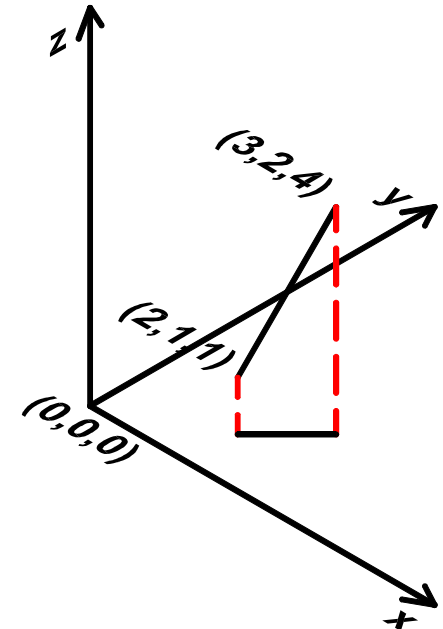
Θεωρία μετασχηματισμών

Παράδειγμα

Έστω ευθεία, η οποία ορίζεται από τα σημεία (2,1,1) και (3,2,4). Η προβολή της στο επίπεδο x-y υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αν θεωρηθεί ότι το επίπεδο x-y είναι η οθόνη του υπολογιστή και δεν υπάρχει η δυνατότητα τρισδιάστατης απεικόνισης, ο χρήστης κοιτώντας τη γραμμή αυτή, η οποία ορίζεται στον τρισδιάστατο χώρο, θα βλέπει μια γραμμή, η οποία ορίζεται από τα σημεία (2,1,0) και (3,2,0).



Η προβολή στο επίπεδο y-z υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Η προβολή στο επίπεδο x-z υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Θεωρία μετασχηματισμών

Τρισδιάστατη Απεικόνιση – Ισομετρική προβολή

Η ισομετρική προβολή παράγεται με ίση προοπτική απεικόνιση και των τριών αξόνων X, Y, Z κατά την μεταφορά από 3D σε 2D. Το λογισμικό CAD επιτυγχάνει τα παραπάνω με τη βοήθεια μιας μήτρας μετασχηματισμού, που παράγει μια τέτοια προβολή, ακολουθώντας τις εξής διαδικασίες :

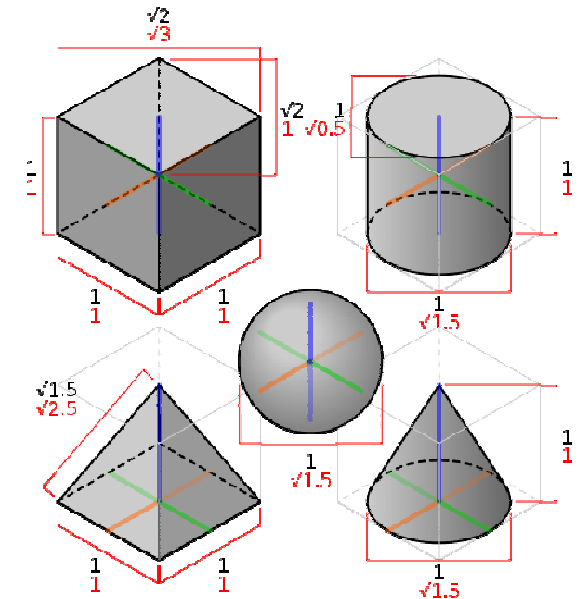
1. Περιστροφή γύρω από τον άξονα Y.
2. Περιστροφή γύρω από τον άξονα X.
3. Προβολή στο επίπεδο $Z = 0$.
4. Μετασχηματισμός με ίση προοπτική απεικόνιση όλων των αξόνων.
5. Τελικός μετασχηματισμός για την παρουσίαση της ισομετρικής προβολής.

Θεωρώντας ένα σημείο στον χώρο P με συντεταγμένες $(x \ y \ z \ 1)$, με τη χρήση της παραπάνω μεθόδου θα βρεθεί η ισομετρική προβολή του σημείου P. Γίνεται περιστροφή του σημείου γύρω από τους άξονες X και Y με γωνίες θ και ϕ αντίστοιχα. Οι συντεταγμένες του νέου σημείου δίδονται από:

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η σύνθετη μήτρα μετασχηματισμού των περιστροφών είναι:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi\sin\theta & -\sin\phi\cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\phi & -\cos\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Θεωρία μετασχηματισμών

Τρισδιάστατη Απεικόνιση – Ισομετρική προβολή

Επειδή γίνεται προβολή πάνω στο επίπεδο $Z = 0$, θα πρέπει να εξαιρεθούν όλες οι προβολές του Z , εξισώνοντας τις με μηδέν. Για να δημιουργηθεί η ισομετρική προβολή, θα πρέπει να είναι ομοιόμορφη η προβολή ως προς τους άξονες. Ένας τρόπος για επιτευχθεί αυτό, είναι να εξισωθούν τα μέτρα των μοναδιαίων διανυσμάτων των X και Y αξόνων, και στη συνέχεια να εξισωθεί ένα από αυτά με τους άξονες Y και Z .

Το μέτρο των μοναδιαίων διανυσμάτων, των αξόνων X , Y και Z μετά την προβολή τους, υπολογίζεται με τις παρακάτω σχέσεις :

$$n_x = \sqrt{(x^*)^2 + (y^*)^2 + (z^*)^2} = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \cdot \sin^2 \theta}$$

$$n_y = \sqrt{(x^*)^2 + (y^*)^2 + (z^*)^2} = \sqrt{\cos^2 \phi}$$

$$n_z = \sqrt{(x^*)^2 + (y^*)^2 + (z^*)^2} = \sqrt{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cdot \sin^2 \theta}$$

Οπότε

$$n_x = n_y \Rightarrow \sin^2 \phi = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$n_y = n_z \Rightarrow \sin^2 \phi = \frac{1 - 2 \cdot \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

Οι παραπάνω δυο εξισώσεις αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με δυο αγνώστους. Με τη χρήση τριγωνομετρικών εξισώσεων και τη μέθοδο της αντικατάστασης γίνεται επίλυση ως προς θ και ϕ και βρίσκεται ότι, για μια δεδομένη 3D γεωμετρία, είναι δυνατός ο υπολογισμός της ισομετρικής της προβολής, πολλαπλασιάζοντας αρχικά με την μήτρα μετασχηματισμού R και θέτοντας στην συνέχεια τις γωνίες θ και ϕ ίσες με 35.26 και 45 αντίστοιχα.



Θεωρία μετασχηματισμών

Άσκηση

Η άσκηση θα επιλυθεί με όποιο μαθηματικό τρόπο είναι επιθυμητό, π.χ. πράξεις με το χέρι, matlab, excel, κλπ. και θα παραδοθεί σε ηλεκτρονική μορφή μέχρι το επόμενο μάθημα. Μπορεί να αποσταλεί και ηλεκτρονικά μέχρι την ημέρα του επόμενου μαθήματος, πριν από αυτό.

- 1) Δίδεται σημείο στο επίπεδο, του οποίου οι συντεταγμένες προσδιορίζονται από τα 2 πρώτα γράμματα του επωνύμου σας (A ->1, B->2, Γ->3, κλπ.) και ζητείται να βρεθούν οι συντεταγμένες του, αν αυτό περιστραφεί ως προς σημείο, του οποίου οι συντεταγμένες προσδιορίζονται από τα 2 επόμενα γράμματα του επωνύμου σας. Η γωνία περιστροφής προσδιορίζεται από το πρώτο γράμμα του ονόματος σας.
- 2) Αν τα 2 παραπάνω σημεία ορίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα στο επίπεδο, να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες του κατοπτρικού σχήματος, ως προς τους άξονες X και Y.
- 3) Η υπολογιστεί η ορθή προβολή στα επίπεδα XY, XZ, YZ, ευθύγραμμου τμήματος, το οποίο ορίζεται από τα 2 παραπάνω σημεία, αν θεωρηθεί ότι η Z συντεταγμένη του πρώτου σημείου είναι 4 και του δεύτερου 7.
- 4) Δίδεται κύβος πλευράς 5. Το κάτω αριστερό σημείο από την εμπρός πλευρά είναι το πρώτο σημείο της άσκησης 4. Να υπολογιστούν τα σημεία των κορυφών του, για τη δημιουργία ισομετρικής προβολής.

