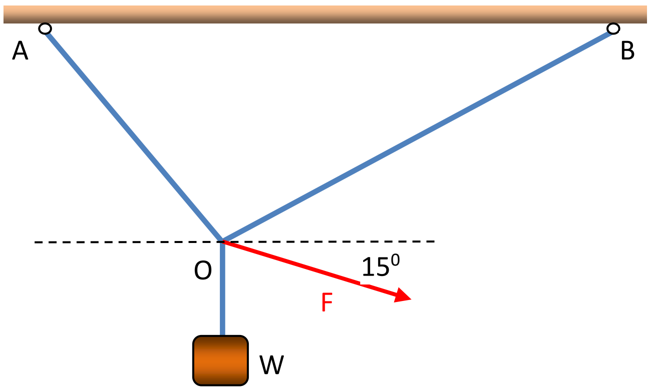
$1^η$ ΕΡΓΑΣΙΑ

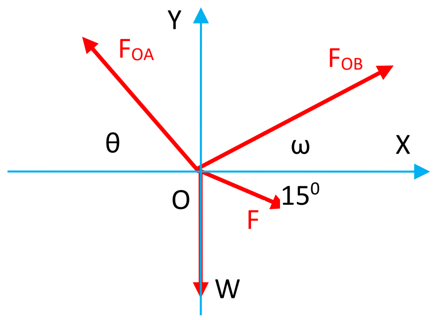


Σώμα βάρους W κρέμεται με την βοήθεια συρματοσχοίνων από τα σημεία Α και Β. Στο σημείο Ο, όπου ενώνονται τα τρία συρματόσχοινα, εξασκείται επίσης η δύναμη F.

1. Έστω W = 350 Kp και F = 50 Kp. Υπολογίσετε την δύναμη με την οποία καταπονείται κάθε ένα από τα τρία (ΟΑ, ΟΒ, OW) συρματόσχοινα.
2. Αν κάθε συρματόσχοινο αντέχει μέχρι 1500 Kp, υπολογίσετε το μέγιστο βάρος που είναι δυνατόν να αναρτηθεί, χωρίς να σπάσει κάποιο από αυτά, όταν F=0.
3. Βρείτε την δύναμη F για την οποία το συρματόσχοινο OB αρχίζει να χαλαρώνει (παύει να είναι τεντωμένο).

Απαντήσεις

Α. Στο τρίγωνο ΑΟΒ, δίδονται τρία στοιχεία. Μπορώ συνεπώς να το επιλύσω και να προσδιορίσω τις γωνίες ω και θ που με ενδιαφέρουν.



Β. Στο σημείο Ο, συντρέχουν όλες οι δυνάμεις που μας ενδιαφέρουν. Τις σχεδιάζω. Στο ίδιο σημείο, τοποθετώ επίσης ένα σύστημα συντεταγμένων με τον συνήθη προσανατολισμό (ο άξονας Χ οριζόντιος). Οι γωνίες ω και θ που υπολόγισα στο προηγούμενο βήμα, φαίνονται επίσης στο σχήμα αυτό – απλή γεωμετρία.

(Οι δυνάμεις δεν σχεδιάζονται πάνω στο σχήμα της κατασκευής!)

1. <u>Υπολογισμός των ζητούμενων δυνάμεων.</u>

1.β <u>Με τον αναλυτικό τρόπο.</u>

Εφ' όσον το σύστημα των συντρεχουσών δυνάμεων ισορροπεί, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις, που αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων, με αγνώστους τις ζητούμενες δυνάμεις.

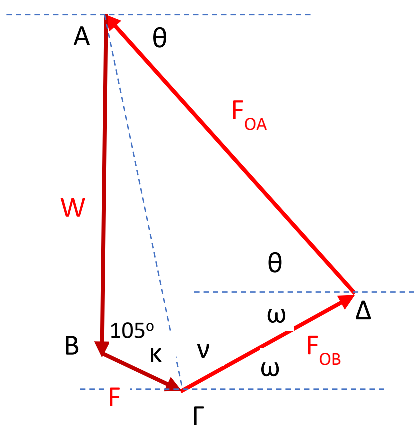
$$\sum F_x = 0 => F_{OB}\cos(\omega) + F_{OA}\cos(180^o - \theta) + W cos(90^o) + F cos(15^o) = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 => F_{OB}\cos(90^o - \omega) + F_{OA}\cos(90^o - \theta) + W cos(180^o) + F cos(90^o + 15^o) = 0 \qquad (2)$$

Λύνω το σύστημα των εξισώσεων και υπολογίζω τις άγνωστες δυνάμεις.

(Δεν χρειάζεται να γράφετε «κατεβατά» με τη λύση του συστήματος. Αυτό είναι γυμνασιακή γνώση.)

1.α Με την βοήθεια του δυναμοπολυγώνου των δυνάμεων.



Οι δυνάμεις ισορροπούν, άρα το δυναμοπολύγωνό τους είναι κλειστό. Για να το σχεδιάσω, ξεκινώ από τις γνωστές κατά μέτρο και κατεύθυνση δυνάμεις, δηλαδή το βάρος και την F. Για τις δυνάμεις των συρματοσχοίνων, χρησιμοποιώ την πληροφορία της διεύθυνσης (παράλληλη στα αντίστοιχα συρματόσχοινα).

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι επιλύσιμο, αφού γνωρίζω δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία :

Γενικευμένο πυθαγώρειο για να υπολογίσω την ΑΓ :

$$A\Gamma^2 = W^2 + F^2 - 2WFcos(105^o) => \boldsymbol{A\Gamma = \cdots}$$

Στην συνέχεια, νόμο ημιτόνων για να υπολογίσω την γωνία κ :

$$\frac{\sin(\kappa)}{W} = \frac{\sin(105^0)}{A\Gamma} => \sin(\kappa) = \cdots => \boldsymbol{\kappa = \cdots}$$

`Στο τρίγωνο ΑΓΔ, γνωρίζω ήδη την ΑΓ. Ισχύει επίσης :

ν=180° – κ – 15°   και   γων(ΓΔΑ) = ω+θ

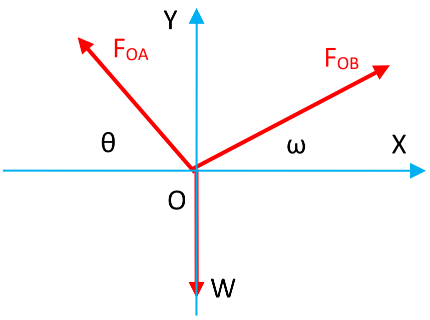
από τις οποίες υπολογίζω δύο ακόμη γωνίες του, άρα και την τρίτη. Το τρίγωνο συνεπώς είναι επιλύσιμο. Χρησιμοποιώ τον νόμο των ημιτόνων στην συνέχεια, για να υπολογίσω τις άγνωστες δυνάμεις :

$$\frac{F_{OA}}{\sin(\nu)} = \frac{A\Gamma}{\sin(\omega+\theta)} => \boldsymbol{F_{OA} = \cdots}$$

$$\frac{F_{OB}}{\sin(\widehat{\Gamma A \Delta})} = \frac{A\Gamma}{\sin(\omega+\theta)} => \boldsymbol{F_{OB} = \cdots}$$

2. Υπολογισμός μέγιστου βάρους

2.β Αναλυτικά



Ποιο συρματόσχοινο θα σπάσει πρώτο, δεν είναι προφανές. Δείτε π.χ., ότι αν τα ΟΑ και ΟΒ είναι σχεδόν κατακόρυφα, «μοιράζονται» περίπου το βάρος, οπότε θα σπάσει το συρματόσχοινο OW. Αν αντιθέτως, το ΑΟ και ΟΒ είναι σχεδόν οριζόντια, τότε οι δυνάμεις που δέχονται είναι πολύ μεγαλύτερες από το βάρος, άρα θα σπάσει ένα από αυτά.

Όταν «επίκειται» κατάρρευση, πολύ λίγο δηλαδή πριν το σπάσιμο κάποιου συρματοσχοίνου, η κατασκευή εξακολουθεί να ισορροπεί. Εξισώσεις ισορροπίας :

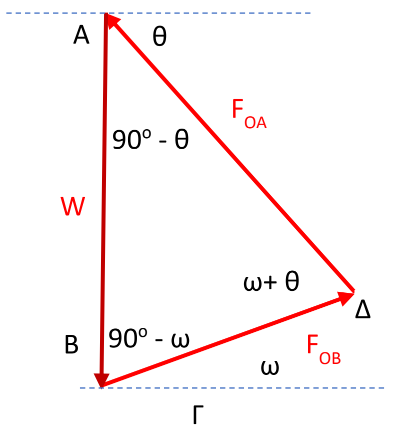
$$\sum F_x = 0 => F_{OB}\cos(\omega) + F_{OA}\cos(180^o - \theta) + Wcos(90^o) = 0$$

$$\sum F_y = 0 => F_{OB}\cos(90^o - \omega) + F_{OA}\cos(90^o - \theta) + Wcos(180^o) = 0$$

Παρατηρείστε ότι οι εξισώσεις αυτές με αγνώστους τις δυνάμεις F_{OA} και F_{OB}, είναι «γραμμικές», οι άγνωστοι δηλαδή εμφανίζονται υψωμένοι στην 1η δύναμη (δεν είναι όλα τα συστήματα εξισώσεων τέτοια). Αυτό σημαίνει, ότι όταν οι γνωστοί όροι (Wcos(90°), Wcos(180°)) πολλαπλασιασθούν επί κ, τότε και οι λύσεις του συστήματος πολλαπλασιάζονται επί κ. (Αν δεν σας είναι προφανές αυτό, συζητήστε το με τους μαθηματικούς μας). Μια σκέψη λοιπόν είναι, να λύσομε το παραπάνω σύστημα για τυχόν βάρος W (έστω 1 Kp), να δούμε ποια από την τριάδα των δυνάμεων (F_{OA}, F_{OB} , 1Kp) προκύπτει μεγαλύτερη, οπότε το συρματόσχοινο της φορτίζεται περισσότερο. Στην συνέχεια, δεν χρειάζεται καν να ξαναλύσομε το σύστημα. Έστω Fmax η προηγούμενη δύναμη. Για το μέγιστο βάρος που μπορεί να αναρτηθεί ισχύει :

$$\frac{W_{max}}{1\ Kp} = \frac{1500\ Kp}{F_{max}}$$

2.α. <u>Με την βοήθεια του τριγώνου των δυνάμεων</u>



Γνωρίζομε, ότι σε κάθε τρίγωνο, απέναντι από την μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά.

Στο τρίγωνο των ισορροπουσών δυνάμεων (λίγο πριν την κατάρρευση), διπλανό σχήμα, γνωρίζομε όλες τις γωνίες, οπότε αμέσως ξέρομε ποια είναι η μεγαλύτερη πλευρά – δύναμη! Της δίδομε την τιμή 1500 kp και επιλύουμε το τρίγωνο. Το W που θα βρούμε είναι το Wmax. (Προφανώς αν η θ+ω είναι η μεγαλύτερη, δεν χρειάζεται καν επίλυση. Το μέγιστο βάρος είναι 1500 Kp).

Η κομψότητα και η ομορφιά της απλής ευκλείδειας γεωμετρίας των (αρχαίων) Ελλήνων!

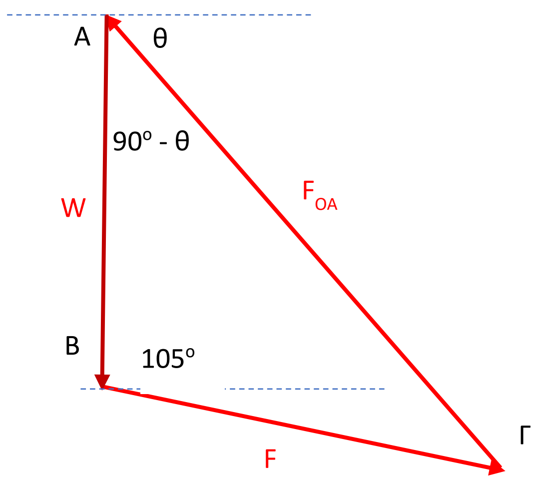
3. <u>Υπολογισμός δύναμης F για την οποία το συρματόσχοινο OB αρχίζει να χαλαρώνει</u>

Όταν το συρματόσχοινο είναι «χαλαρό», δεν εξασκεί δύναμη. Εξετάζομε την ισορροπία των δυνάμεων όπως και στην 1η περίπτωση για F_{OB} = 0. Μόνος άγνωστος πλέον είναι το μέτρο της δύναμης F.

<u>3.α Αναλυτικά</u>

Επιλύουμε το σύστημα εξισώσεων όπως και στην 1η περίπτωση με F_{OB} = 0. Άγνωστοι πλέον είναι τα μεγέθη F_{OA} και F.

<u>3.β. Με την βοήθεια του τριγώνου των δυνάμεων.</u>



...το οποίο κατασκευάζεται πολύ εύκολα αφού γνωρίζομε την W ως διάνυσμα και τις διευθύνσεις των δύο άλλων δυνάμεων.

Η επίλυσή του είναι εξ ίσου εύκολη και ο υπολογισμός της F ακόμη ευκολότερος :

$$\frac{F}{\sin(90^o - \theta)} = \frac{W}{\sin(\widehat{B\Gamma A})}$$