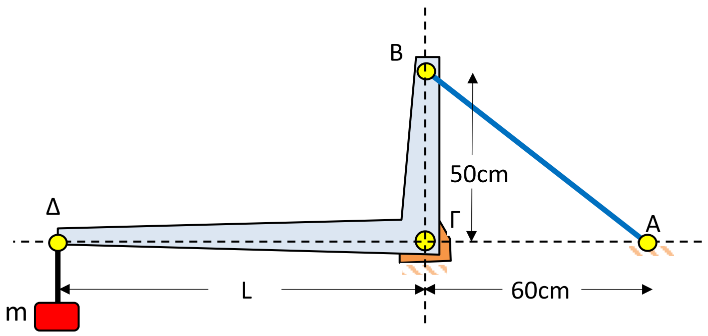
Εξέταση προόδου – Νοέμβριος 2025

ΘΕΜΑ

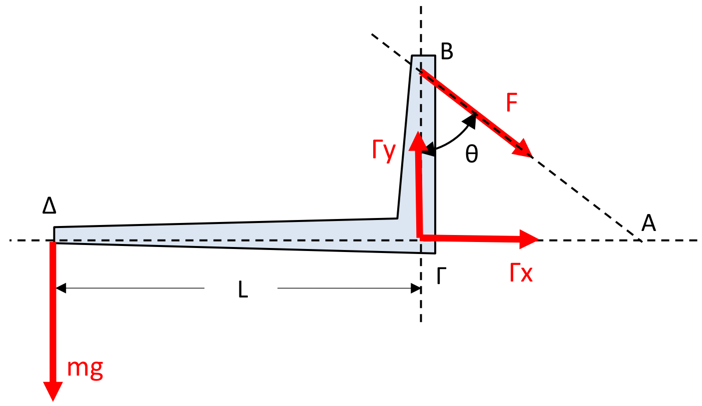


Το στερεό σώμα ΒΓΔ είναι αρθρωμένο στην θέση Γ, συγκρατείται από το συρματόσχοινο ΑΒ και υποβαστάζει σώμα μάζας m.

Η μέγιστη δύναμη που μπορεί να αντέξει το συρματόσχοινο είναι 5000 Kp.

Υπολογίσετε τη μέγιστη μάζα που μπορεί να αναρτηθεί χωρίς να κοπεί το συρματόσχοινο. Πόση είναι τότε η δύναμη που καταπονεί την άρθρωση;

ΛΥΣΗ



Σχεδιάζομε το Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος του στερεού ΒΓΔ. Στο σημείο Β σχεδιάζω την δύναμη του συρματοσχοίνου. Στην άρθρωση τοποθετώ τις συνιστώσεως της άγνωστης δύναμης.

Για την γωνία θ ισχύει :

$\tan(\theta) = ΑΓ/ΒΓ = 60/50$ => $\boldsymbol{\theta = 50.2^o}$

Εξετάζομε την ισορροπία του σώματος στην οριακή εκείνη κατάσταση κατά την οποία επίκειται η θραύση του συρματοσχοίνου. Τότε F = 5000 Kp.

Εξισώσεις ισορροπίας :

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow mg\cos(90^o) + Γ_x + F\cos(90^o - \theta) = 0$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg\cos(180^o) + Γ_y + F\cos(180^o - \theta) = 0$ (2)

(+) $\Sigma M_Γ = 0 \Rightarrow -mg \cdot L + [F\cos(90^o - \theta)] \cdot 50 = 0$ (3)

Από την τελευταία εξίσωση, προκύπτει αμέσως :

$-m \cdot 10 \cdot L + (5000 \cdot 10) \cdot 0.768 \cdot 50 = 0$ => **m = 192070/L Kgr** (L : cm)

που είναι και η μέγιστη μάζα που μπορεί να αναρτηθεί χωρίς να σπάσει το συρματόσχοινο.

Θα χρησιμοποιήσομε τώρα τις δύο πρώτες εξισώσεις για να προσδιορίσομε την δύναμη στην άρθρωση.

Από την εξίσωση (1) :

mg cos(90°) + Γx + F cos(90° - θ) = 0 => 0 + Γx + 5000*0.768 => **Γx = - 3841 Kp**

Από την εξίσωση (2) :

mg cos(180°) + Γy + F cos(180° - θ) = 0 => -mg + Γy + 5000*(-0.640) =>

Γy = 3200 + 192070/L Kp

Για το μέτρο της δύναμης αυτής, ισχύει :

$$\Gamma = \sqrt{{\Gamma_\chi}^2 + {\Gamma_y}^2}$$

Για να προσδιορίσομε την διεύθυνσή της, θα βρούμε με την βοήθεια των συνημιτόνων κατεύθυνσης, τις γωνίες που σχηματίζει με τους άξονες X και Y :

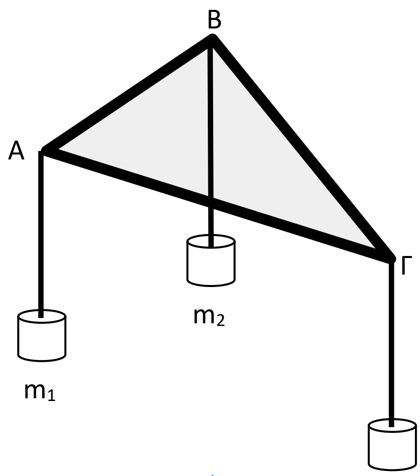
$$\cos(\theta_x) = \frac{\Gamma_x}{\Gamma}\ , \qquad \cos(\theta_x) = \frac{\Gamma_y}{\Gamma}$$

<u>Αριθμητική εφαρμογή</u> : L = 100 cm, τότε Γy = + 5121 Kp και Γ = 6401 Kp

$$\cos(\theta_x) = -0.600 => \boldsymbol{\theta_x = 126.9^0}\ , \quad \cos(\theta_y) = +0.800 => \boldsymbol{\theta_y = 36.9^0}$$

Η δύναμη βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο και σχηματίζει γωνία 36.9° με τον άξονα των Υ.

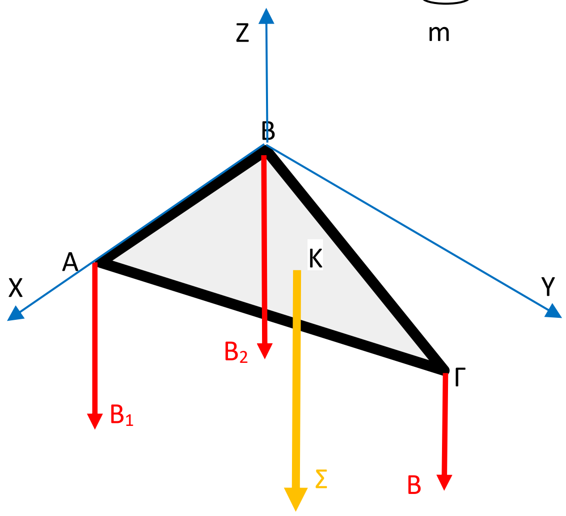
ΘΕΜΑ



Τρεις μάζες είναι αναρτημένες στην τριγωνική μεταλλική πλάκα ΑΒΓ που βρίσκεται σε οριζόντια θέση. Από ποιο σημείο της πλάκας διέρχεται η συνισταμένη των βαρών των μαζών αυτών;

m_1 = 1500 Kgr, m_2= 1200 Kgr,
ΑΓ = 2 m , AB = 1m , ΒΓ = 1.5 m

ΛΥΣΗ



Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που επενεργούν στην πλάκα καθώς και η συνισταμένη τους Σ, προφανώς παράλληλη με τις δυνάμεις αυτές, που διέρχεται από το σημείο Κ με συντεταγμένες (Χο, Υο, 0).

Ας θεωρήσομε την περίπτωση : m=1000 Kgr.

Το διάνυσμα θέσης των κορυφών Α και Β είναι :

$$(2m)\vec{\imath} + (0)\vec{\jmath} + (0)\vec{k}$$

$$(0)\vec{\imath} + (0)\vec{\jmath} + (0)\vec{k}$$

αντίστοιχα. Για να βρούμε αυτό της κορυφής Γ, προσδιορίζομε την γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ με την βοήθεια του νόμου των συνημιτόνων :

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2AB * B\Gamma * \cos(\widehat{AB\Gamma}) => \widehat{AB\Gamma} = 106.8^o$$

Οπότε το διάνυσμα θέσης της κορυφής Γ είναι :

$$(1.5\cos(106.8^o))\vec{\imath} + (1.5\cos(16.8^o))\vec{\jmath} + (0)\vec{k} = \mathbf{-0.434\vec{\imath} + 1.436\vec{\jmath} + 0\vec{k}}$$

(Το τρίγωνο προέκυψε από την επίλυσή του, αμβλυγώνιο. Η κορυφή δηλαδή Γ δεν είναι σχεδιασμένη σωστά στο σχήμα. Αυτό δεν έχει καμιά σημασία. Οι υπολογισμοί είναι σωστοί.)

Το μέτρο της συνισταμένης Σ :

Σ = (m_1+ m_2 + 1000)g = 3700 Kp

Για τις ροπές των τριών δυνάμεων/βαρών ως προς την αρχή των αξόνων ισχύει :

$$\overrightarrow{M_{B_1}} = (0 * B_1)\vec{\imath} - (AB * B_1)\vec{\jmath} = 0\vec{\boldsymbol{\imath}} - (-1500Kpm)\vec{\boldsymbol{\jmath}} = 0\vec{\boldsymbol{\imath}} \quad + (+1500Kpm)\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\overrightarrow{M_{B_2}} = (0)\vec{\imath} \quad - (0)\vec{\jmath} \qquad = 0\vec{\boldsymbol{\imath}} \quad + \quad 0\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\overrightarrow{M_B} = (1.436 * B)\vec{\imath} - (-0.434 * B)\vec{\jmath} = \quad (-1436\ \ Kpm)\vec{\boldsymbol{\imath}} + (-434\ \ Kpm)\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

Η δε ροπή της συνισταμένης ως προς την αρχή των αξόνων είναι :

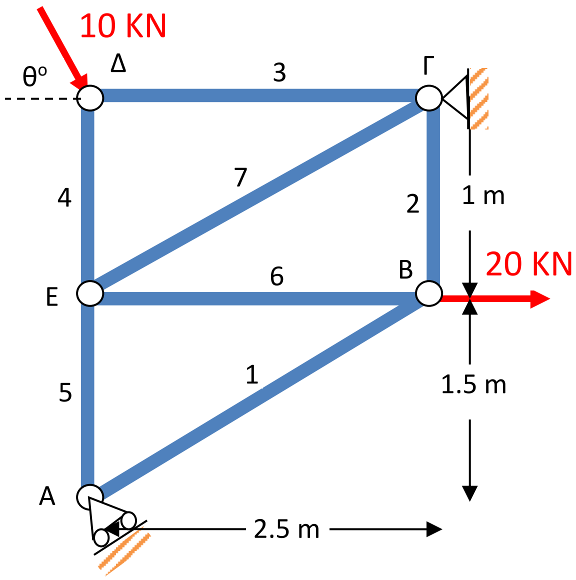
$$\overrightarrow{M_\Sigma} = (Y_0\Sigma)\vec{\imath} - (X_0\Sigma)\vec{\jmath} = \qquad (Y_0(-3700Kp))\vec{\boldsymbol{\imath}} + (-X_0(-3700Kp))\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

Εξ ορισμού, η συνισταμένη έχει το ίδιο αποτέλεσμα όσον αφορά τις ροπές, με τις επί μέρους δυνάμεις, οπότε :

0 + 0 + (-1436 Kpm) = Y_0(-3700 Kp) = 0 => **Yo = 0.388 m**

+1500Kpm + 0 + (-434 Kpm) = *Xo* (3700 Kp) = 0 => **Xo = 0.288 m**

ΘΕΜΑ



Για το «απλό» δικτύωμα του σχήματος :

1. Γράψετε μια μεθοδολογία (Βήμα 1^o, Βήμα 2^o, ….) για την εύρεση των δυνάμεων όλων των ράβδων.
2. Υπολογίσετε τη δύναμη της ράβδου 3.
3. Θεωρώντας το δικτύωμα ως ένα στερεό σώμα, σχεδιάσετε το Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος του στερεού αυτού και υπολογίσετε τις δυνάμεις στις στηρίξεις.
4. Τι θα συμβεί αν αφαιρεθεί η ράβδος 7;

Σημ. Το επίπεδο κύλισης του κόμβου Α είναι παράλληλο με την ράβδο ΑΒ.

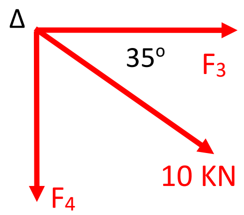
Ας πάρομε την περίπτωση που ϑ = 35^o .

1. <u>Μεθοδολογία</u>
   <u>1.α. :</u> Γράψω τις δύο εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων για κάθε ένα από τους 5 κόμβους και να λύσω το σύστημα των 10 εξισώσεων με τους δέκα αγνώστους (δυνάμεις των 7 ράβδων + 3 άγνωστες δυνάμεις στις στηρίξεις)…

1.β : Εναλλακτικά :

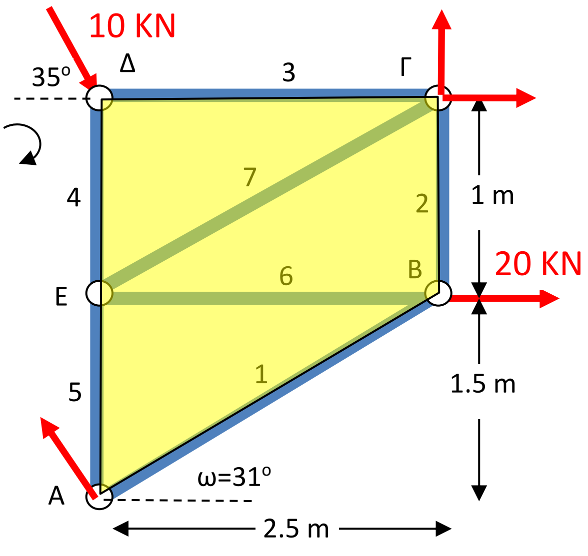
- Παρατηρώ ότι μπορώ να ξεκινήσω από τον κόμβο Δ και να υπολογίσω τις δυνάμεις των 2 ράβδων του.
- Εξετάζοντας ένα - ένα τους υπόλοιπους κόμβους, παρατηρώ ότι δεν υπάρχει κανείς άλλος με δύο μόνο άγνωστες δυνάμεις.
- Άρα πρέπει να εξετάσω την ισορροπία όλου του δικτυώματος ώστε να υπολογίσω τις δυνάμεις στις στηρίξεις.
- Στην συνέχεια μπορώ να εξετάσω την ισορροπία του κόμβου Α ή του Γ και στην συνέχεια των υπολοίπων κόμβων.

Κόμβος Δ



ΣFx = 0 => 10 cos(35°) + F_3 = 0 => **F_3 = -8.19 KN (θλιπτική)**

3 Υπολογισμός δυνάμεων στις στηρίξεις του δικτυώματος



Για την γωνία ω : εφ(ω) = 1.5/2.5 => ω = 31°

Ισορροπία όλου του δικτυώματος :

+ ΣMΓ = 0 => [A*cos(59°)]*(1.5+1) + [A*cos(31°)]*(2.5) - [10*cos(55°)]*(2.5) - -(20)*(+1) = 0 => **A = 10.01 KN**

ΣFx = 0 =>**Γx** + A cos(31°+90°) + 10cos(35°) + 20cos(0°) = 0 => **$Γ_x$ = -23.00 KN**

ΣFυ = 0 =>**Γy** + A cos(31°) + 10cos(90°+35°) + 20cos(90°) = 0 => **$Γ_y$ = + 2.85 KN**