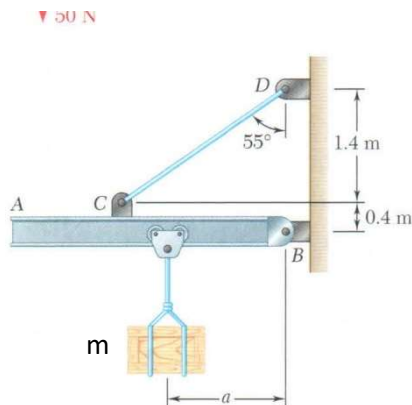


Λύσεις θεμάτων εξέτασης προόδου - Νοέμβριος 2024

ΘΕΜΑ 1ο

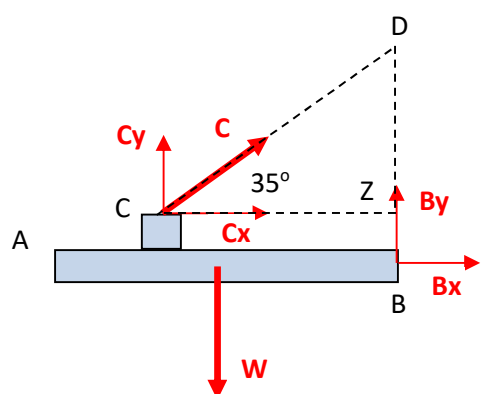


Φορτίο μάζας m μπορεί να ολισθαίνει κατά μήκος της «γλίστρας» AB. Η τελευταία συγκρατείται σε οριζόντια θέση με την βοήθεια της άρθρωσης B και του συρματοσχοίνου CD. Αν το συρματόσχοινο αντέχει 2000 Kp, βρείτε την μέγιστη επιτρεπτή απομάκρυνση a .

Πόση είναι τότε η δύναμη στην άρθρωση;

Πως αλλιώς θα μπορούσε να στηριχθεί η γλίστρα, μόνο στον τοίχο, ισοστατικά; Βρείτε για την περίπτωση αυτή και για την μέγιστη απομάκρυνση τα «εντατικά» μεγέθη της στήριξης.

ΛΥΣΗ



Εξετάζουμε την ισορροπία του σώματος ACB, στην οριακή κατάσταση που το συρματόσχοινο «φορτίζεται» με δύναμη $C = 2000$ Kp. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το διάγραμμα του ελεύθερου αυτού σώματος. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ZΔC έχω :

$$\epsilon\phi(35^\circ) = DZ/CZ = H/CZ \Rightarrow CZ = H/\epsilon\phi(35^\circ) \Rightarrow \mathbf{CZ = 1.428 \text{ H}}$$

Ας πάρουμε και την περίπτωση που $m=1500$ Kg και $H = 100$ cm. Τότε, για το βάρος W ισχύει :

$$W = mg = 1500 \cdot 10 = \mathbf{15000 \text{ N} = 1500 \text{ Kp.}} \quad (g = 10 \text{ m/s}^2)$$

Συνθήκες ισορροπίας του σώματος :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow C_x + B_x = 0 \Rightarrow B_x = -2000 \cos(35^\circ) \Rightarrow$$

$$\mathbf{B_x = -1638 \text{ Kp}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow C_y - W + B_y = 0 \Rightarrow B_y = 1500 - 2000 \sin(35^\circ) \Rightarrow$$

$$\mathbf{B_y = 353 \text{ Kp}}$$

$$\text{Οπότε, το μέτρο της δύναμης στην άρθρωση είναι : } B = \sqrt{(-1638)^2 + (353)^2} \Rightarrow \mathbf{B = 1676 \text{ Kp}}$$

Το διάνυσμα της δύναμης βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο, το δε συνημίτονο κατεύθυνσης με τον άξονα των X είναι :

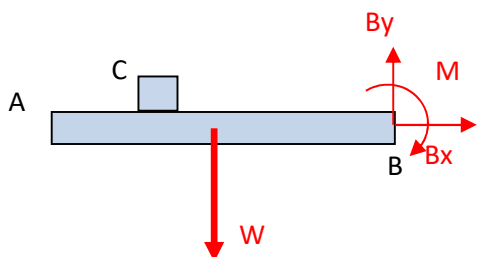
$$\cos(\theta_x) = B_x/B = -0.977$$

οπότε η δύναμη σχηματίζει γωνία 167.8° με τον θετικό ημιάξονα των X .

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow C_y \cdot CZ + C_x \cdot 0.4 - W \cdot a = 0 \Rightarrow 2000 \sin(35^\circ) \cdot (1.428 \cdot 1.0) + 2000 \cos(35^\circ) \cdot 0.4 - 1500 a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{a = 1.529 \text{ m}}$$

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να στηριχθεί η γλίστρα ισοστατικά, όμως αν θέλουμε να στηρίζεται μόνο στον τοίχο, πρέπει να πακτωθεί στην θέση B.



$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M - W \cdot a = 0 \Rightarrow$$

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ισορροπίας, υπολογίζουμε την δύναμη και την ροπή της πάκτωσης – τα εντατικά μεγέθη της στήριξης δηλαδή :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$$

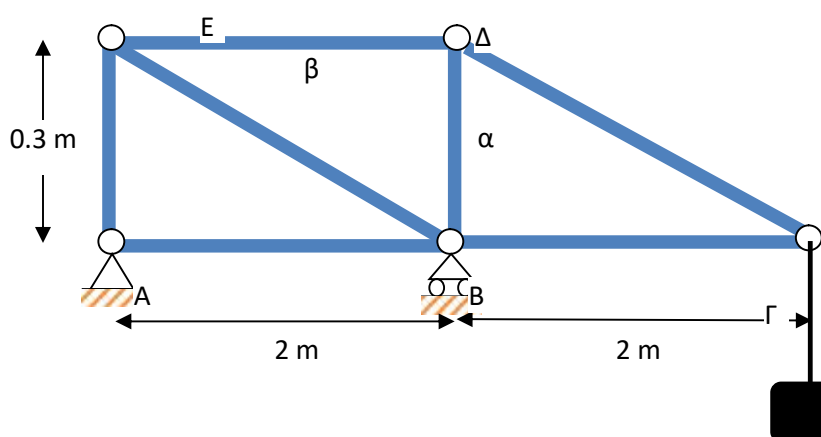
$$B_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -W + B_y = 0 \Rightarrow$$

$$B_y = 1500 \text{ Kp}$$

$$M = 2294 \text{ Kp}\cdot\text{m}$$

ΘΕΜΑ 2^ο



Είναι το δικτύωμα του σχήματος, στο οποίο έχει αναρτηθεί η μάζα m , με την συγκεκριμένη στήριξη, ισοστατικό; Δικαιολογήστε.

Υπολογίστε τις δυνάμεις (σε N) στις ράβδους α και β .

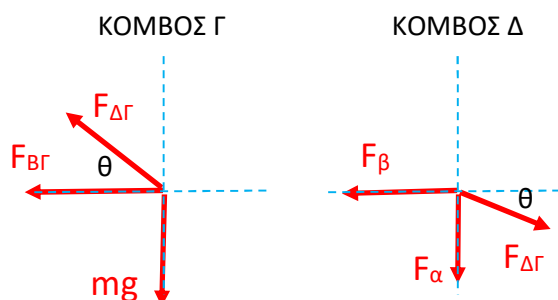
Τι θα συμβεί αν αφαιρεθεί η ράβδος EB;

Τι θα συμβεί αν προστεθεί μια ράβδος στο αρχικό δικτύωμα – η ΑΔ.

ΛΥΣΗ

1. Το δικτύωμα είναι ισοστατικό, διότι είναι «απλό» : Δηλαδή μπορεί κανείς να το φαντασθεί ότι δημιουργείται από το τρίγωνο ABE, στο οποίο έχουν προστεθεί οι ράβδοι β και α και στην συνέχεια οι ράβδοι ΔΓ και ΒΓ. Στηρίζεται επίσης ισοστατικά – μια άρθρωση και μια κύλιση.
2. Αν αφαιρεθεί μια οποιαδήποτε ράβδος, το δικτύωμα παύει να είναι «στερεά» κατασκευή. Είναι πλέον μηχανισμός.
3. Αν προστεθεί μια ράβδος, το δικτύωμα γίνεται υπερστατικό.

Υπολογισμός δυνάμεων



Μπορεί κανείς ασφαλώς να γράψει τις $2 \times 5 = 10$ εξισώσεις ισορροπίας των 5 κόμβων και να υπολογίσει τις 7 δυνάμεις των ράβδων + τις τρεις δυνάμεις των στηρίξεων.

Αν ζητά ειδικά της δυνάμεις των ράβδων α και β , μπορεί να κάνει κάτι απλούστερο : Να επιλύσει τον κόμβο Γ και στην συνέχεια να προχωρήσει στον κόμβο Δ.

$$\theta = \arctan(\Delta B / B\Gamma) \Rightarrow \dots$$

$$\theta = 8.53^\circ$$

Ισορροπία κόμβου Γ.

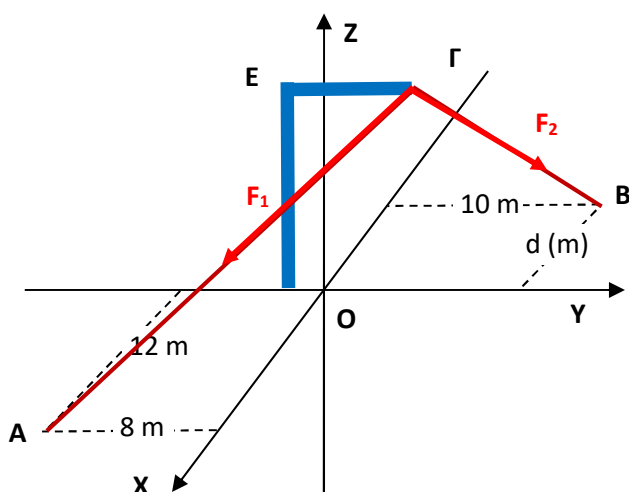
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\Delta\Gamma} \cos(90^\circ - \theta) + mg \cos(180^\circ) = 0 \Rightarrow F_{\Delta\Gamma} = (mg / \sin\theta) \text{ N}$$

Ισορροπία κόμβου Δ :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_\beta \cos(180^\circ) + F_{\Delta\Gamma} \cos\theta = 0 \Rightarrow F_\beta = +(mg / \tan\theta) \text{ N (εφελκυστική)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_a \cos(180^\circ) + F_{\Delta\Gamma} \cos(90^\circ + \theta) = 0 \Rightarrow F_a = -(mg) \text{ N (θλιπτική)}$$

ΘΕΜΑ 3^ο



Τα συρματόσχοινα ΒΓ και ΑΓ, στηρίζονται στα σημεία Β και Α του επιπέδου ΧΥ αντίστοιχα και στο σημείο Γ του στύλου ΟΕΓ, στο οποίο ασκούν δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Τα μέτρα των δυνάμεων είναι 1000 Κρ και 500 Κρ αντίστοιχα.

- Υπολογίστε την συνισταμένη $\vec{R}$ των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Περνά ό φορέας της εν λόγω συνισταμένης από το σημείο Ο;
- Υπολογίστε την ροπή $\vec{M}_\Delta$ της δύναμης $\vec{F}_1$ ως προς το σημείο Δ με συντεταγμένες (x,5,0).

Δεδομένα :

- Ο στύλος είναι «μπαγμένος» στο σημείο (0,-1m,0), έχει ύψος ΟΕ=5 m, η οριζόντια προβολή του ΕΓ βρίσκεται στο επίπεδο ΥΖ και έχει μήκος 3m.

x : το τελευταίο και d : το προτελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας, σε m.

ΛΥΣΗ

(1)

Ας εξετάσουμε την περίπτωση d=5, οπότε το σημείο Β είναι το (-5, 10, 0).

Σύμφωνα με την εκφώνηση, οι συντεταγμένες των σημείων Α και Γ είναι αντίστοιχα :

(12, -8, 0) και (0, 2, 5) αντίστοιχα.

Τα συνημίτονα κατεύθυνσης των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι ίδια με αυτά των διανυσμάτων $\vec{\Gamma A}$ και $\vec{\Gamma B}$ αντίστοιχα.

Για το μήκος και τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\vec{\Gamma A}$ ισχύει :

$$\Gamma A^2 = (X_A - X_\Gamma)^2 + (Y_A - Y_\Gamma)^2 + (Z_A - Z_\Gamma)^2 = (12 - 0)^2 + (-8 - 2)^2 + (0 - 5)^2 \Rightarrow \Gamma A = \mathbf{16.04\ m}$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma Ax}) = \frac{X_A - X_\Gamma}{\Gamma A} = \frac{12}{16.04} = 0.732$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma Ay}) = \frac{Y_A - Y_\Gamma}{\Gamma A} = \frac{-10}{16.04} = -0.610$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma Az}) = \frac{Z_A - Z_\Gamma}{\Gamma A} = \frac{-5}{16.04} = -0.305$$

Για το μήκος και τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\vec{\Gamma B}$ ισχύει :

$$\Gamma B^2 = (X_B - X_\Gamma)^2 + (Y_B - Y_\Gamma)^2 + (Z_B - Z_\Gamma)^2 = (-5 - 0)^2 + (10 - 2)^2 + (0 - 5)^2 \Rightarrow \Gamma B = \mathbf{10.68\ m}$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma Bx}) = \frac{X_B - X_\Gamma}{\Gamma B} = \frac{-5}{10.68} = -0.468$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma By}) = \frac{Y_B - Y_\Gamma}{\Gamma B} = \frac{8}{10.68} = +0.749$$

$$\cos(\vartheta_{\Gamma Bz}) = \frac{Z_B - Z_\Gamma}{\Gamma B} = \frac{-5}{10.68} = -0.468$$

Οι δυνάμεις συνεπώς των συρματοσχοίνων, ως διανύσματα είναι :

$$\vec{F}_1 = 1000Kp \left(\cos(\vartheta_{\Gamma Ax})\vec{i} + \cos(\vartheta_{\Gamma Ay})\vec{j} + \cos(\vartheta_{\Gamma Az})\vec{k} \right) = 732Kp\vec{i} - 610Kp\vec{j} - 305Kp\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = 500Kp \left(\cos(\vartheta_{\Gamma Bx})\vec{i} + \cos(\vartheta_{\Gamma By})\vec{j} + \cos(\vartheta_{\Gamma Bz})\vec{k} \right) = -234Kp\vec{i} + 375Kp\vec{j} - 234Kp\vec{k}$$

Η δε συνισταμένη τους :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (731Kp\vec{i} - 610Kp\vec{j} - 305Kp\vec{k}) + (-234Kp\vec{i} + 375Kp\vec{j} - 234Kp\vec{k}) \Rightarrow$$

$$\vec{R} = \mathbf{498Kp\vec{i} - 235Kp\vec{j} - 539Kp\vec{k} = 770\ Kp(0.646\vec{i} - 0.305\vec{j} - 0.700\vec{k})}$$

Το μέτρο της συνισταμένης είναι $\mathbf{R=770\ Kp}$.

Για να διέρχεται ο φορέας της συνισταμένη από το O, θα πρέπει τα συνημίτονα κατεύθυνσής της, δηλαδή η τριάδα $(\mathbf{0.646, -0.305, -0.700})$, να είναι ίδια με τα συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\Gamma O}$. Αναλυτική γεωμετρία.

Ένας άλλος τρόπος να το δει κανείς είναι ο «γεωμετρικός» : Η συνισταμένη βρίσκεται στο επίπεδο (ΑΓΒ). Αναγκαία (όχι ικανή!) συνθήκη για να περνά ο φορέας της από το O, είναι η τομή του εν

λόγω επιπέδου με το επίπεδο XY, δηλαδή η ευθεία AB, να περνά από το O. Διαπιστώστε με απλή επίπεδη γεωμετρία, ότι κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει!

(2)

Η ροπή $\vec{M}_\Delta$ της δύναμης $\vec{F}_1$ ως προς το Δ, δίνεται από την ορίζουσα :

$$\vec{M}_\Delta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Delta\Gamma_x & \Delta\Gamma_y & \Delta\Gamma_z \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix}$$

Όπου : $\Delta\Gamma_x, \Delta\Gamma_y, \Delta\Gamma_z$ είναι οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{\Delta\Gamma}$. Ας πάρουμε την περίπτωση $\Delta=(7,5,0)$ τότε $\vec{\Delta\Gamma} = (-7, -3, +5)$.

$$\vec{M}_\Delta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & -3 & +5 \\ 732 & -610 & -305 \end{vmatrix} = \mathbf{3965Kpm \vec{i} + 1525Kpm \vec{j} + 6466Kpm \vec{k}}$$