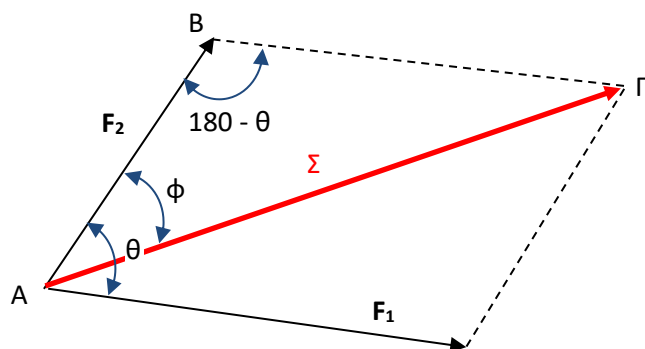


Συνισταμένη συντρεχουσών δυνάμεων

Συνισταμένη συντρεχουσών δυνάμεων, δυνάμεων δηλαδή που έχουν κοινό σημείο εφαρμογής, είναι μια νέα δύναμη που έχει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα με τις επί μέρους δυνάμεις αν εφαρμοσθεί σε ένα σώμα.



Για να βρούμε την συνισταμένη δύο συντρεχουσών δυνάμεων, εφαρμόζουμε τον **κανόνα του παραλληλογράμμου** : Η συνισταμένη είναι η δύναμη που έχει αρχή το σημείο εφαρμογής των δυνάμεων και τέλος την απέναντι κορυφή του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν οι συνιστώσες δυνάμεις.

Σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα, για να υπολογίσουμε το **μέτρο** της συνισταμένης των συντρεχουσών δυνάμεων F_1 και F_2 που σχηματίζουν γωνία θ , αρκεί να επιλύσουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ (Σχήμα). Στο εν λόγω τρίγωνο, γνωρίζουμε τις πλευρές $AB = F_1$, $B\Gamma = F_2$ και την γωνία $AB\Gamma = 180^\circ - \theta$, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των συνημιτόνων. Την **διεύθυνση** της συνισταμένης μπορούμε να προσδιορίσουμε αν υπολογίσουμε την γωνία ϕ που σχηματίζει με την δύναμη F_1 . Την γωνία αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε εφαρμόζοντας ξανά το θεώρημα των συνημιτόνων ή το θεώρημα των ημιτόνων.

Αριθμητική εφαρμογή

$$F_1 = 200 \text{ N}, F_2 = 150 \text{ N}, \theta = 65^\circ$$

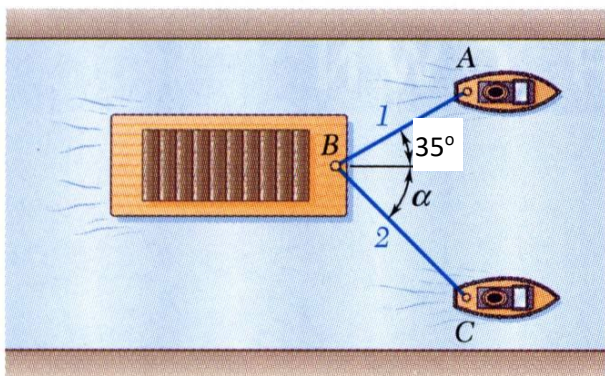
$$\begin{aligned} \Sigma^2 &= F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180 - 65) = 200^2 + 150^2 - 2 * 200 * 150 * (-0.423) \\ &= 87880 \quad \Rightarrow \quad \Sigma = 296 \text{ N} \end{aligned}$$

$$F_1^2 = \Sigma^2 + F_2^2 - 2\Sigma F_2\cos(\phi) \Rightarrow 200^2 = 296^2 + 150^2 - 2 * 296 * 150 * \cos(\phi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\phi) = 0.790 \Rightarrow \phi = 37.9^\circ$$

Παράδειγμα

Η φορτηγίδα B σύρεται από δύο ρυμουλκά A και C με την βοήθεια συρματοσχοίνων, όπως στο σχήμα. Προκειμένου η φορτηγίδα να διασχίσει το κανάλι με ασφάλεια, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σημείο B πρέπει να είναι παράλληλη με τις όχθες του καναλιού. Επίσης το μέγεθός της να είναι μεγαλύτερο από 4200 Kp.



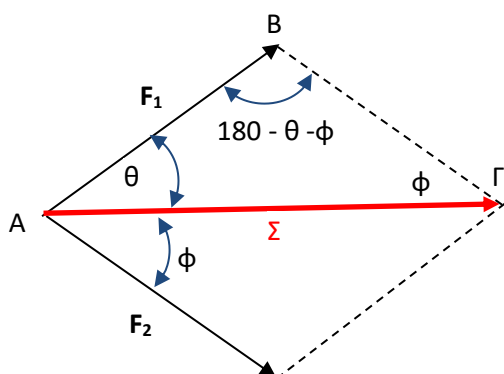
A. Αν το ρυμουλκό A ασκήσει δύναμη 3000 Kp υπό γωνία 35° , βρείτε ένα τρόπο να έλξει το C (δηλαδή υπολογίσετε την δύναμη κατά μέτρο και διεύθυνση) προκειμένου η φορτηγίδα να οδηγηθεί με ασφάλεια;

B. Αν το ρυμουλκό C είναι σε θέση να εξασκήσει μόνο 2500 Kp (λόγω ας πούμε δυσλειτουργίας της μηχανής), η δε γωνία υπό την οποία έλκουν τα ρυμουλκά δεν μπορεί να γίνει μικρότερη των 35° (έστω για λόγους ασφάλειας), μπορεί να ρυμουλκηθεί η φορτηγίδα με ασφάλεια;

Γ. Το συρματόσχοινο του ρυμουλκού C αρχίζει να παρουσιάζει πρόβλημα οπότε το A διατίθεται να αυξήσει την ισχύ των μηχανών προκειμένου να «ελαφρύνει» το C. Ποια είναι η ελάχιστη καταπόνηση (δύναμη) που μπορεί να επιτευχθεί για το προβληματικό συρματόσχοινο και η φορτηγίδα να ρυμουλκείται; Πόση είναι τότε η δύναμη στο συρματόσχοινο του ρυμουλκού A;

Απαντήσεις

A. Ένας προφανής τρόπος να έλξει το ρυμουλκό C είναι να μιμηθεί το A. Αυτό εξασφαλίζει τουλάχιστον ότι, για λόγους συμμετρίας, η φορτηγίδα θα πλεύσει παράλληλα στις όχθες. Σε αυτή την περίπτωση, το μόνο που πρέπει να εξασφαλισθεί είναι ότι το μέτρο της συνισταμένης δύναμης είναι μεγαλύτερο του 4200 Kp.



Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις και οι γωνίες για την περίπτωση αυτή : $\theta = \phi = 35^\circ$. Οπότε :

$$\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180 - 35 - 35) = 3000^2 + 3000^2 - 2 * 3000 * 3000 * (-0.342) = 4915 \Rightarrow \Sigma = 4915 \text{ Kp} > 4200 \text{ Kp}$$

Συνεπώς, αν το ρυμουλκό C απλώς μιμηθεί το A, τότε η φορτηγίδα θα πλεύσει με ασφάλεια.

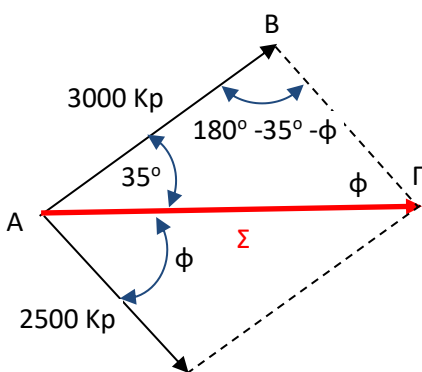
Β. Η πρώτη σκέψη, είναι και πάλι, τα δύο ρυμουλκά να έλξουν κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο, ώστε η φορτηγίδα να πλεύσει παράλληλα στις όχθες. Το ρυμουλκό A δηλαδή να μειώσει ισχύ και να έλξει με 2500 Kp. Η συνισταμένη δύναμη τότε (αν η γωνία παραμείνει 35°) είναι :

$$\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180 - 35 - 35) = 2500^2 + 2500^2 - 2 * 2500 * 2500 * (-0.342) = 4096 \Rightarrow \Sigma = 4096 \text{ Kp} < 4200 \text{ Kp}$$

...που σημαίνει ότι η φορτηγίδα δεν ρυμουλκείται!

Μπορεί κανείς να φαντασθεί ότι αν η γωνία έλξης για τις συγκεκριμένες δυνάμεις γίνει μεγαλύτερη τότε η συνισταμένη θα γίνει ακόμη μικρότερη. *Επιβεβαιώστε το με πράξεις.*

Η επόμενη σκέψη είναι να διατηρηθεί η έλξη των 3000 Kp από το ρυμουλκό A και να αλλάξει η



γωνία έλξης ϕ του ρυμουλκού C έτσι ώστε η συνισταμένη να είναι παράλληλη με τις όχθες. Στο διπλανό σχήμα αποτυπώνεται η σκέψη αυτή. Θα εφαρμόσουμε τον νόμο των ημιτόνων για το τρίγωνο ABΓ προκειμένου να υπολογίσουμε την γωνία ϕ :

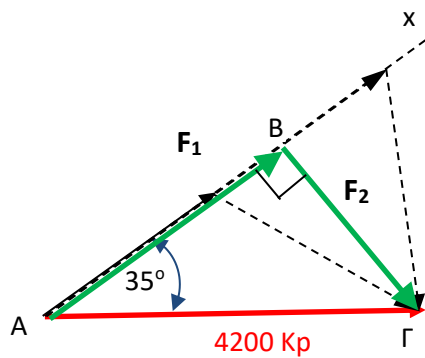
$$\frac{\eta\mu\phi}{3000} = \frac{\eta\mu 35}{2500} \Rightarrow \eta\mu\phi = 0.688 \Rightarrow \phi = 43.5^\circ$$

Το μέγεθος της συνισταμένης είναι τότε (νόμος ημιτόνων και πάλι):

$$\frac{\eta\mu(43.5)}{3000} = \frac{\eta\mu(180 - 35 - 43.5)}{\Sigma} \Rightarrow \Sigma = 4271 \Rightarrow \Sigma = 4271 \text{ Kp} > 4200 \text{ Kp}$$

...που σημαίνει ότι η φορτηγίδα ρυμουλκείται και πάλι με ασφάλεια.

Γ. Για να επιτύχομε ελάχιστη καταπόνηση του συρματοσχοίνου του ρυμουλκού C, πρέπει να περιορισθούμε στην ελάχιστη απαιτούμενη δύναμη έλξης της φορτηγίδας, δηλαδή τα 4200 Kp και βεβαίως να παραμείνουμε στην γωνία των 35° για το άλλο ρυμουλκό.



Τότε, αναλόγως της γωνίας του συρματοσχοίνου του ρυμουλκού C, η απαιτούμενη δύναμη έλξης μπορεί να επιτευχθεί με άπειρους συνδυασμούς μεγεθών για τις δυνάμεις F_1 και F_2 , όπως υποδεικνύει το διπλανό σχήμα του **τριγώνου των δυνάμεων**.

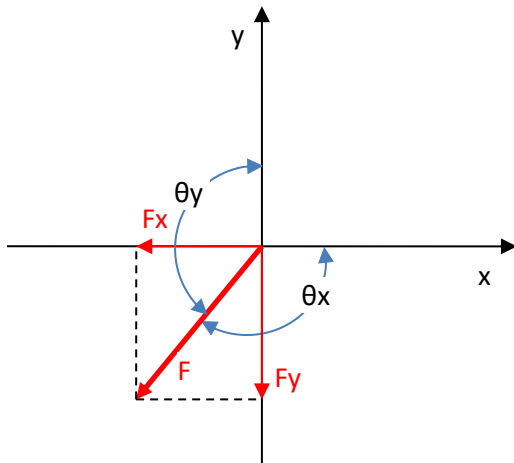
Μπορεί κανείς να διαπιστώσει, ότι η ελάχιστη δύναμη F_2 επιτυγχάνεται όταν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο. Η δύναμη αυτή, υπό γωνία $\phi=55^\circ$, είναι τότε :

$$F_2 = 4200 * \eta\mu (35^\circ) = \mathbf{2409 \text{ Kp}}$$

η δε δύναμη έλξης που απαιτείται να ασκήσει το ρυμουλκό A είναι :

$$F_1 = 4200 * \sigma\upsilon\nu (35^\circ) = \mathbf{3440 \text{ Kp}}$$

Ανάλυση δύναμης σε ορθογώνιες συνιστώσες



Μια οποιαδήποτε δύναμη F μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$, παράλληλες με τους άξονες X και Y αντίστοιχα, ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων.

Για την «μονομετρική συνιστώσα» κάθε μιας από τις δύο αυτές συνιστώσες, ισχύει :

$$F_x = F \sin(\theta_x) \text{ και } F_y = F \sin(\theta_y)$$

όπου F : το μέτρο της δύναμης και θ_x, θ_y : οι γωνίες¹ που σχηματίζει το διάνυσμα της δύναμης F με τους θετικούς

ημιάξονες των X και Y αντίστοιχα (Σχήμα). Η μονομετρική αυτή συνιστώσα μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Το πρόσημό της δείχνει αν η συνιστώσα έχει φορά κατά τα θετικά ή τα αρνητικά του αντίστοιχου άξονα.

Παράδειγμα

Έστω $F = 100 \text{ Kp}$ και $\theta_x = 110^\circ$, $\theta_y = 160^\circ$. Τότε :

$$F_x = 100 \sin(110^\circ) = 100 * (-0.3420) = -34.2 \text{ Kp}$$

$$F_y = 100 \sin(160^\circ) = 100 * (-0.9397) = -94.0 \text{ Kp}$$

Εύρεση της συνισταμένης δυνάμεων με την βοήθεια της ανάλυσης σε ορθογώνιες συνιστώσες

Η συνισταμένη n δυνάμεων, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ που οι μονομετρικές συνιστώσες τους κατά τους άξονες X και Y είναι

$$F_{1x}, F_{2x}, \dots, F_{nx} \quad \text{και} \quad F_{1y}, F_{2y}, \dots, F_{ny} \quad \text{αντίστοιχα,}$$

είναι μια δύναμη $\vec{P}$ που οι μονομετρικές της συνιστώσες της στους δύο άξονες είναι :

$$P_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx}$$

$$P_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny}$$

Το σημαντικό με την παραπάνω σχέση, είναι ότι δεν χρειάζεται κανείς να ανησυχεί για τα πρόσημα : είναι όλα «+», αρκεί να χρησιμοποιήσει τις γωνίες όπως ορίστηκαν παραπάνω.

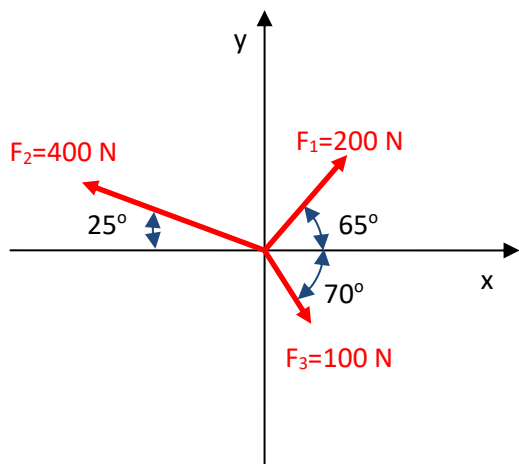
¹ Χρησιμοποιούμε συνήθως την κυρτή γωνία, αυτή δηλαδή που είναι μικρότερη των 180° . Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε και την μη κυρτή. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο. Γιατί;

Παράδειγμα

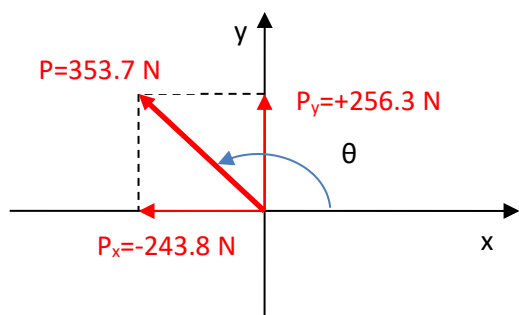
Ας βρούμε την συνισταμένη των τριών δυνάμεων του σχήματος.

Λύση

Σύμφωνα με τα προηγούμενα φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα



F (μέτρο)	Γωνία θ_x (με τον άξονα +X)	Γωνία θ_y (με τον άξονα +Y)	F_x $=F \cdot \sin(\theta_x)$	F_y $=F \cdot \sin(\theta_y)$
200	65°	$90^\circ - 65^\circ$	+84.5	+181.3
400	$180^\circ - 25^\circ$	$90^\circ - 25^\circ$	-362.5	+169.0
100	70°	$90^\circ + 70^\circ$	+34.2	-94.0
Συνισταμένη P :			-243.8	+256.3



Όπου, έχουμε πάρει :

$$P_x = (+84.5) + (-362.5) + (34.2) = -243.8\text{ N}$$

$$P_y = (+181.3) + (169.0) + (-94.0) = +256.3\text{ N}$$

$$\text{και επειδή : } P^2 = P_x^2 + P_y^2 \Rightarrow P = 353.7\text{ N}$$

Για την γωνία θ ισχύει :

$$\eta\mu(\theta) = 256.3/353.7 \text{ και } \sigma\upsilon\upsilon(\theta) = -243.8/353.7 \Rightarrow \theta = 133.6^\circ$$

(Μια εφαρμογή σε Excel που αυτοματοποιεί την παραπάνω διαδικασία, μπορείτε να βρείτε στο eClass : Έγγραφα -> "Συνισταμένη δυνάμεων.xls". Εκεί θα δείτε και μια συνάρτηση του Excel που σας δίνει την γωνία θ)

Εφαρμογή για τον προσδιορισμό άγνωστων συντρεχουσών δυνάμεων, όταν γνωρίζουμε ότι αυτές ισορροπούν.

Αν υποθέσουμε ότι στο παραπάνω παράδειγμα, οι δυνάμεις F_1 και F_2 είναι άγνωστες κατά μέτρο, και ότι η συνισταμένη και των τριών είναι μηδέν. Ενδεχομένως δηλαδή να πρόκειται για δυνάμεις σε κόμβο δικτύματος που ισορροπεί. Τότε θα ισχύει :

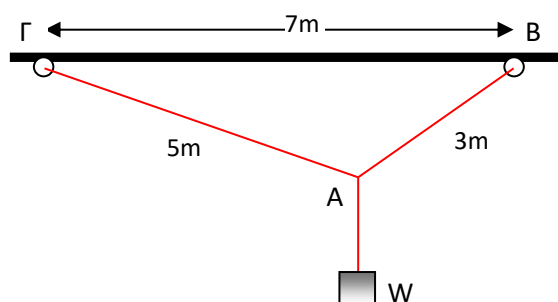
$$P_x = F_1 \sin(65^\circ) + F_2 \sin(155^\circ) + F_3 \sin(290^\circ) = 0$$

$$P_y = F_1 \sin(25^\circ) + F_2 \sin(65^\circ) + F_3 \sin(200^\circ) = 0$$

Δεν χρειάζεται να προβληματιζόμαστε για τα πρόσημα : είναι όλα «+», αρκεί να πάρουμε την γωνία με τον σωστό τρόπο.

Στην συνέχεια λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων με αγνώστους F_1 και F_2 .

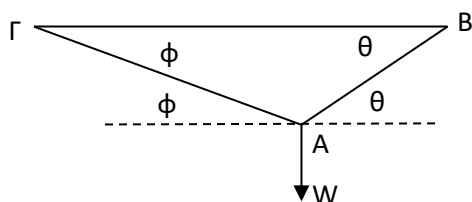
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



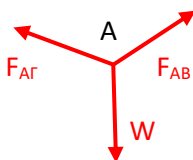
Σώμα βάρους $W=600$ Κρ κρέμεται με την βοήθεια «γάντζων» και συρματοσχοίνων, από τα σημεία Β και Γ, όπως στο σχήμα. Η ΒΓ έχει οριζόντια διεύθυνση. Να προσδιορισθεί η δύναμη σε κάθε ένα από τα τρία συρματοσχοίνα .

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

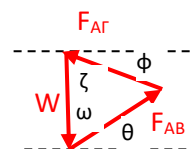
Κάθε ένα από τα τρία συρματοσχοίνα εξασκεί δύναμη στα σημεία που είναι δεμένο. Το συρματοσχοίνο ΑW δέχεται το βάρος στο ένα του άκρο, οπότε η δύναμη που το καταπονεί είναι το βάρος αυτό. Θα εξετάσουμε την ισορροπία του σημείου Α στο οποίο συντρέχουν και τα τρία συρματοσχοίνα.



(α)



(β)



(γ)

Οι δυνάμεις που εξασκούνται στο σημείο Α φαίνονται στο σχήμα (β) : Οι διευθύνσεις τους είναι παράλληλες προς αυτές των αντίστοιχων συρματοσχοίνων και η φορά τους είναι τέτοια που να απεικονίζει το γεγονός ότι «τραβάνε» το σημείο Α. Εφ' όσον οι δυνάμεις ισορροπούν, το δυναμοπολύγωνό τους είναι ένα τρίγωνο (γιατί;) – σχήμα γ.

Γραφική λύση

Σχεδιάζουμε υπό κλίμακα το γεωμετρικό σχήμα που περιγράφει το πρόβλημα (Σχήμα α). Στη συνέχεια σχεδιάζουμε σε άλλο σχήμα υπό κλίμακα (π.χ $1 \text{ cm} \Leftrightarrow 100 \text{ Κρ}$), το τρίγωνο των δυνάμεων : Σχεδιάζουμε πρώτα το βάρος W που είναι γνωστό κατά μέτρο και διεύθυνση. Από την αρχή και το τέλος της δύναμης W φέρουμε παράλληλες στην ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Σχηματίζεται έτσι το τρίγωνο των δυνάμεων, από το οποίο βρίσκω το μέτρο των δυνάμεων των σχοινιών.

Αναλυτική λύση με επίλυση τριγώνου.

Από την γεωμετρία της κατασκευής υπολογίζω τις γωνίες θ και ϕ : «Επιλύουμε» το τρίγωνο ABΓ ως εξής :

A. Θεώρημα συνημιτόνων : $AB^2 = AG^2 + BG^2 - 2 \cdot AG \cdot BG \cdot \cos(\phi) \Rightarrow 3^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(\phi) \Rightarrow \cos(\phi) = 0.929 \Rightarrow \underline{\phi = 21.8^\circ}$.

B. Νόμος ημιτόνων : $AB/\sin(\phi) = AG/\sin(\theta) \Rightarrow \sin(\theta) = 0.619 \Rightarrow \underline{\theta = 38.2^\circ}$

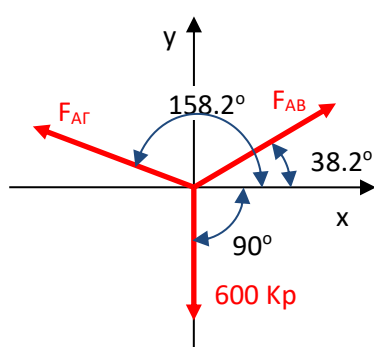
Στο **τρίγωνο** τώρα **των δυνάμεων** (σχήμα γ), είναι γνωστή η πλευρά W καθώς και οι προσκείμενες αυτήν γωνίες : $\omega = (90^\circ - \theta)$ και $\zeta = (90^\circ - \phi)$. Με διαδοχική εφαρμογή του νόμου των ημιτόνων, υπολογίζω τις ζητούμενες δυνάμεις :

$$W / \sin(180^\circ - \omega - \zeta) = F_{AB}/\sin(\zeta) \Rightarrow W / \sin(60^\circ) = F_{AB}/\sin(68.2^\circ) \Rightarrow 600 / 0.866 = F_{AB}/0.928$$

$$\Rightarrow \underline{F_{AB} = 643.3 \text{ Kp}}$$

$$W / \sin(60^\circ) = F_{AG}/\sin(51.8^\circ) \Rightarrow 600 / 0.8660 = F_{AG}/0.7857 \Rightarrow \underline{F_{AG} = 544.3 \text{ Kp}}$$

Αναλυτική λύση με ανάλυση των δυνάμεων σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



Έστω $\vec{P}$ η συνισταμένη των τριών δυνάμεων. Αφού αυτές ισορροπούν, ισχύει :

$$P_x = \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} \cos(38.2^\circ) + F_{AG} \cos(158.2^\circ) + 600 \cos(90^\circ) = 0$$

$$P_y = \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AB} \cos(90^\circ - 38.2^\circ) + F_{AG} \cos(158.2^\circ - 90^\circ) + 600 \cos(180^\circ) = 0$$

$\Rightarrow$

$$F_{AB} \cdot 0.786 + F_{AG} \cdot (-0.929) + 60 \cdot 0 = 0$$

$$F_{AB} \cdot 0.619 + F_{AG} \cdot (0.371) + 60 \cdot (-1) = 0$$

Επιλύοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων, παίρναμε :

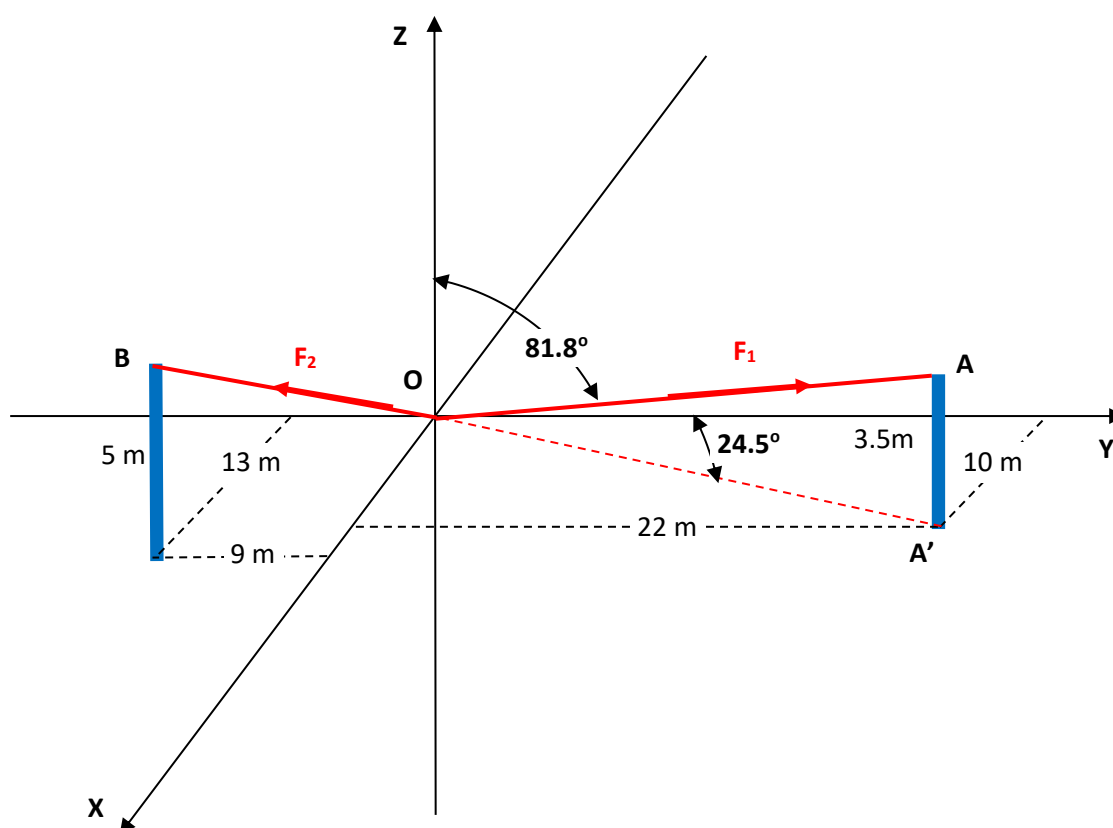
$$\underline{F_{AB} = 643.3 \text{ Kp}}$$

$$\underline{F_{AG} = 544.3 \text{ Kp}}$$

Παράδειγμα

Τα συρματόσχοινα OA και OB, στηρίζονται στους στύλους A και B αντίστοιχα και στο σημείο O, στο οποίο ασκούν δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Τα μέτρα των δυνάμεων είναι 5000 Kp και 4000 Kp αντίστοιχα.

1. Υπολογίστε τα συνημίτονα κατεύθυνσης της δύναμης $\vec{F}_1$ στο σύστημα αξόνων XYZ.
2. Υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω δύναμη με τον άξονα +Z καθώς και τη γωνία που σχηματίζει η προβολή της στο επίπεδο XY με τον άξονα +Y.
3. Υπολογίστε τα συνημίτονα κατεύθυνσης της δύναμης $\vec{F}_2$ στο σύστημα αξόνων XYZ.
4. Υπολογίστε την συνισταμένη $\vec{R}$ των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.



1. Για τα συνημίτονα της δύναμης $\vec{F}_1$ στο σύστημα αξόνων XYZ είναι ίδια με αυτά του διανύσματος $\vec{OA}$. Ισχύει :

$$OA^2 = X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2 = 10^2 + 22^2 + 3.5^2 \Rightarrow OA = 24.42 \text{ m}$$

$$\cos(\vartheta_{A_x}) = \frac{X_A}{OA} = \frac{10}{24.42} = 0.409$$

$$\cos(\vartheta_{A_y}) = \frac{Y_A}{OA} = \frac{22}{24.42} = 0.9$$

$$\cos(\vartheta_{A_z}) = \frac{Z_A}{OA} = \frac{3.5}{24.42} = 0.143$$

2. Για την γωνία του $\overrightarrow{OA}$ με τον θετικό ημιάξονα των Z ισχύει :

$$\cos(\vartheta_{A_z}) = 0.143 \Rightarrow \vartheta_{A_z} = 81.8^\circ$$

Για την γωνία φ_A του επιπέδου OAA' με το επίπεδο YZ ισχύει :

$$\cos(\varphi_A) = \frac{Y_A}{OA'} = \frac{22}{\sqrt{22^2 + 10^2}} = 0.91 \Rightarrow \varphi_A = 24.5^\circ$$

Η γωνία αυτή είναι και η γωνία που σχηματίζει η προβολή της $\overrightarrow{F_1}$ στο επίπεδο XY με τον άξονα +Y.

3. Για τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\overrightarrow{OB}$ και συνεπώς της $\overrightarrow{F_2}$, ισχύει :

$$OB^2 = X_B^2 + Y_B^2 + Z_B^2 = 13^2 + (-9)^2 + 5^2 \Rightarrow OB = 16.58 \text{ m}$$

$$\cos(\vartheta_{B_x}) = \frac{X_B}{OB} = \frac{13}{16.58} = 0.784$$

$$\cos(\vartheta_{B_y}) = \frac{Y_B}{OB} = \frac{-9}{16.58} = -0.543$$

$$\cos(\vartheta_{B_z}) = \frac{Z_B}{OB} = \frac{5}{16.58} = 0.302$$

4. Οι συνιστώσες των δυνάμεων $\overrightarrow{F_1}$ και $\overrightarrow{F_2}$ κατά μήκος των αξόνων του συστήματος XYZ, υπολογίζονται ως εξής :

$$F_{1_x} = F_1 \cos(\theta_{A_x}) = 5000 * 0.409 = 2047 \text{ Kp}$$

$$F_{1_y} = F_1 \cos(\theta_{A_y}) = 5000 * 0.9 = 4505 \text{ Kp}$$

$$F_{1_z} = F_1 \cos(\theta_{A_z}) = 5000 * 0.143 = 717 \text{ Kp}$$

$$F_{2_x} = F_2 \cos(\theta_{B_x}) = 4000 * 0.784 = 3136 \text{ Kp}$$

$$F_{2_y} = F_2 \cos(\theta_{B_y}) = 4000 * (-0.543) = -2171 \text{ Kp}$$

$$F_{2_z} = F_2 \cos(\theta_{B_z}) = 4000 * 0.302 = 1206 \text{ Kp}$$

Για την συνισταμένη $\vec{R}$ των δυνάμεων ισχύει :

$$R_x = \sum F_x = 2047 + 3136 = 5183 \text{ Kp}$$

$$R_y = \sum F_y = 4505 + (-2171) = 2334 \text{ Kp}$$

$$R_z = \sum F_z = 717 + 1026 = 1923 \text{ Kp}$$

Το μέτρο της, R, είναι :

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 \Rightarrow R = 6001 \text{ Kp}$$

τα δε συνημίτονα κατεύθυνσής της είναι :

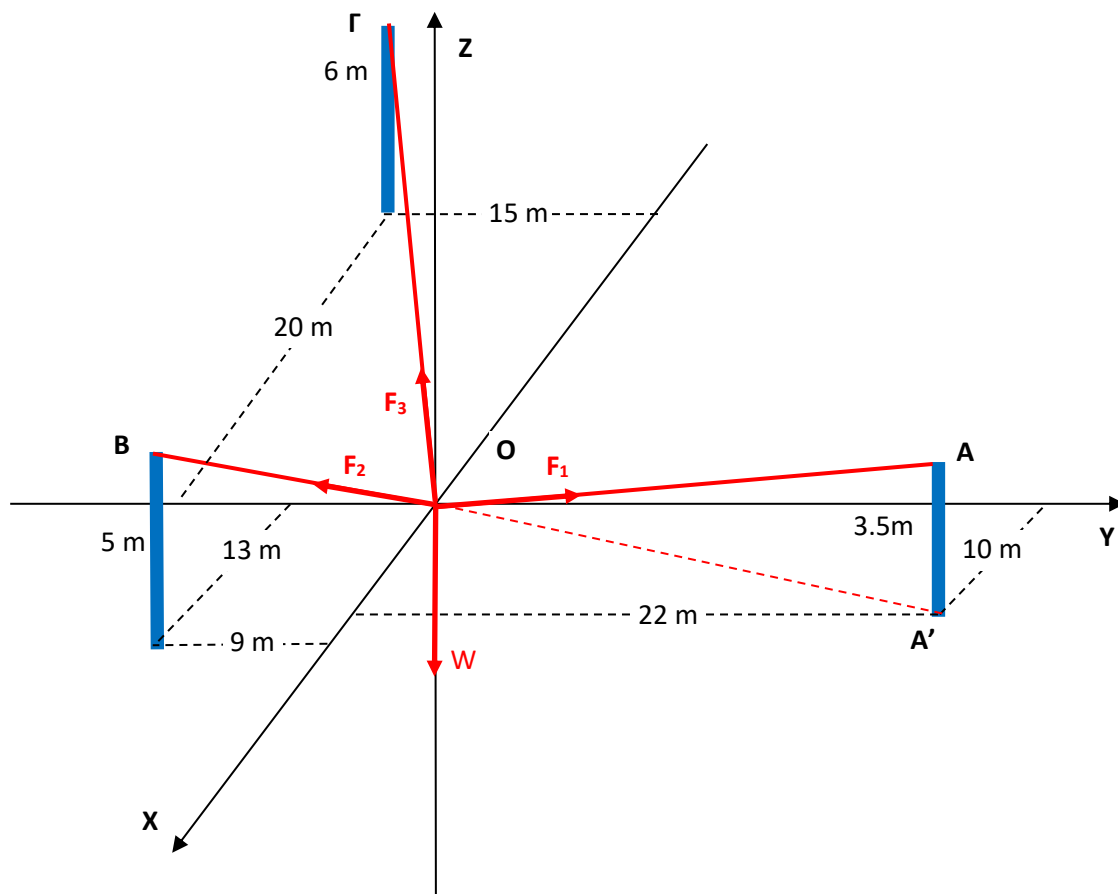
$$\cos(\vartheta_{R_x}) = \frac{R_x}{R} = \frac{5183}{6001} = 0.864$$

$$\cos(\vartheta_{R_y}) = \frac{R_y}{R} = \frac{2334}{6001} = 0.389$$

$$\cos(\vartheta_{R_z}) = \frac{R_z}{R} = \frac{1923}{6001} = 0.320$$

Παράδειγμα

Τρεις στύλοι, Α, Β και Γ, στηρίζουν με την βοήθεια συρματοσχοίνων βάρος W όπως σχήμα. Υπολογίσετε τις δυνάμεις των συρματοσχοίνων. W = 5000 Kp.



Στο προηγούμενο παράδειγμα προσδιορίσθηκαν τα συνημίτονα κατεύθυνσης των δύο δυνάμεων. Με την ίδια λογική θα προσδιορισθούν και αυτά της τρίτης δύναμης. Στη συνέχεια θα αναλυθούν οι δυνάμεις σε συνιστώσες και θα γραφούν οι εξισώσεις ισορροπίας από τις οποίες θα υπολογισθούν οι ζητούμενες δυνάμεις.

Ο τρίτος στύλος ορίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{OG}$ του οποίου τα συνημίτονα κατεύθυνσης μπορούν και πάλι να υπολογισθούν :

$$OG^2 = X_G^2 + Y_G^2 + Z_G^2 = (-20)^2 + (-15)^2 + 6^2 \Rightarrow OG = 25.71 \text{ m}$$

$$\cos(\vartheta_{G_x}) = \frac{X_G}{OG} = \frac{-20}{25.71} = -0.778$$

$$\cos(\vartheta_{G_y}) = \frac{Y_G}{OG} = \frac{-15}{25.71} = -0.583$$

$$\cos(\vartheta_{G_z}) = \frac{Z_G}{OG} = \frac{6}{25.71} = 0.233$$

Οι τέσσερις δυνάμεις που συντρέχουν στο σημείο Ο ισορροπούν, οπότε ισχύει :

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0 \Rightarrow$$

$$F_1 \cos(\theta_{A_x}) + F_2 \cos(\theta_{B_x}) + F_3 \cos(\theta_{G_x}) = 0$$

$$F_1 \cos(\theta_{A_y}) + F_2 \cos(\theta_{B_y}) + F_3 \cos(\theta_{G_y}) = 0$$

$$F_1 \cos(\theta_{A_z}) + F_2 \cos(\theta_{B_z}) + F_3 \cos(\theta_{G_z}) = W$$

=>

$$F_1 * 0.409 + F_2 * 0.784 + F_3 * (-0.778) = 0$$

$$F_1 * 0.900 + F_2 * (-0.543) + F_3 * (-0.583) = 0$$

$$F_1 * 0.143 + F_2 * 0.302 + F_3 * 0.233 = 5000$$

Η επίλυση του συστήματος δίδει :

$$F_1 = 9123 \text{ Kp}, \quad F_2 = 4791 \text{ Kp}, \quad F_3 = 9631 \text{ Kp}$$

