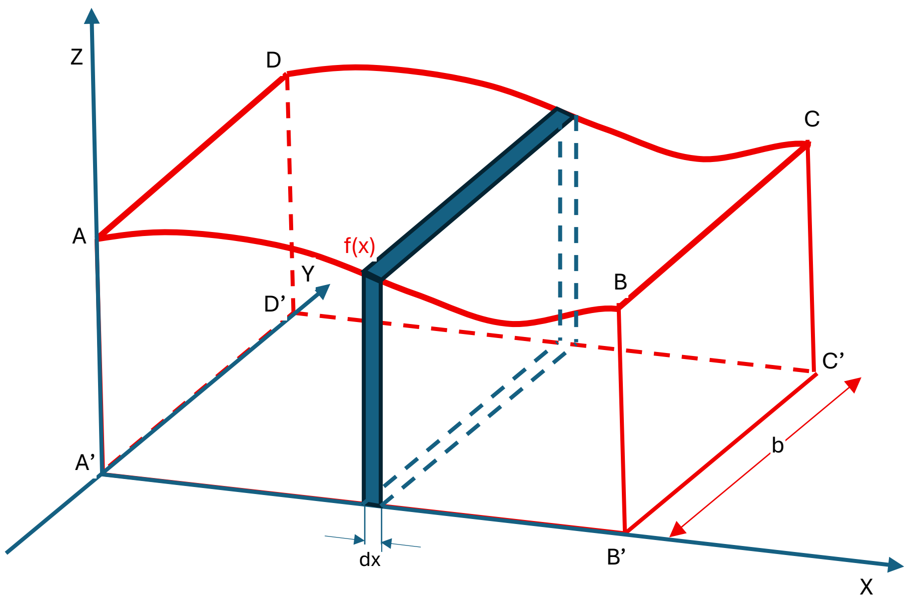
ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Οι δυνάμεις που συναντά κανείς στο μακρόκοσμο είναι πάντα «κατανεμημένες» σε επιφάνειες. Χαρακτηριστικότερα παραδείγματα είναι το ίδιο το βάρος ενός σώματος που στηρίζεται σε μια επιφάνειά του και οι δυνάμεις που δημιουργούν οι πιέσεις υγρών ή αερίων στις επιφάνειες που ασκούνται.

Κατανομή βάρους σώματος στην επιφάνεια στήριξής του



Το στερεό ABCDD'C'B'A' είναι ένα πρισματικό σώμα : Μπορεί να το φαντασθεί κανείς ως την επιφάνεια ABB'A', που βρίσκεται στο επίπεδο XZ, να εξωθείτε (εκτείνεται) κατά τον άξονα Y κατά (σταθερό πάχος) b. Τα στερεά αυτού του τύπου, που είναι πολύ συνηθισμένα στην Μηχανολογία, τα ονομάζομε και στερεά 2 ½ διαστάσεων. Αν η «γεννήτρια» επιφάνεια ABB'A' έχει εμβαδόν E, τότε για τον όγκο V και το βάρος W του στερεού ισχύει :

$V=Eb$ και $W=V\rho g$

Η σχέση για το βάρος ισχύει υπό στην προϋπόθεση ότι η πυκνότητα ρ είναι σταθερή σε όλο τον όγκο.

Αν η επιφάνεια E είναι αυτή που ορίζεται από την καμπύλη f(x) και τον άξονα X, τότε για το εμβαδόν της ισχύει :

$$E = \int_{A'}^{B'} f(x)dx$$

Οπότε το βάρος του στερεού είναι :

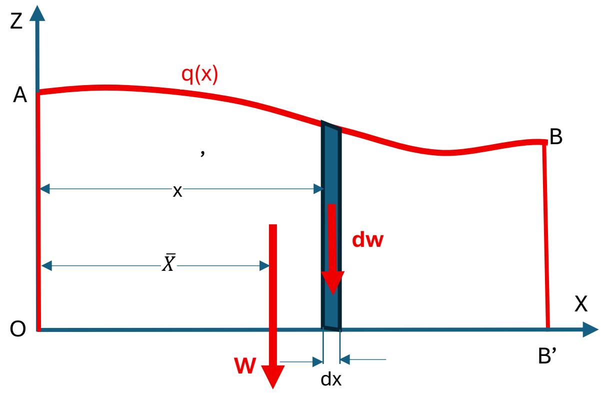
$$\boldsymbol{W} = b\rho g \int_{A'}^{B'} f(x)dx = \int_{\boldsymbol{A'}}^{\boldsymbol{B'}} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$$

Όπου :

$q(x) = (b\rho g)f(x)$, μια ποσότητα με διαστάσεις : Δύναμη(βάρος εν προκειμένω)/μονάδα μήκους

<u>Κέντρο βάρους- κεντροειδές επιφάνειας</u>

Αν το βάρος W του στερεού ως δύναμη θα το θεωρήσομε παράλληλο στον άξονα Ζ, τότε, για λόγους συμμετρίας, θα βρίσκεται σε ένα επίπεδο παράλληλο στο ΧΖ και μετατοπισμένο ως προς αυτό κατά b/2 στον άξονα Υ. Ενδιαφέρει να βρούμε από που περνά το βάρος ως προς τον άξονα Χ, ενδιαφέρει δηλαδή η απόσταση $\bar{X}$. Θα θεωρήσομε μόνο την επιφάνεια ABB'A', σύμφωνα με το διπλανό σχήμα, καθώς και την συνάρτηση q(x) που την περιγράφει πλήρως.



Το βάρος W μπορεί να θεωρηθεί ως η συνισταμένη των βαρών των στοιχειωδών όγκων που περιγράφονται από την στοιχειώδη επιφάνεια πάχους dx. Το εν λόγω στοιχειώδες βάρος dw είναι :

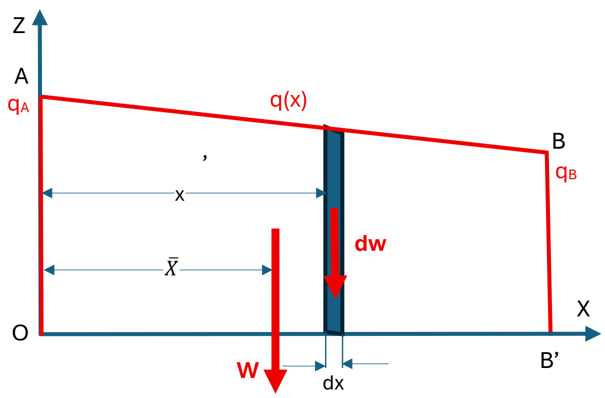
dw=q(x)dx

Το βάρος, ως συνισταμένη δυνάμεων, εξ ορισμού, πρέπει να έχει την ίδια επίδραση στην ισορροπία ενός σώματος με τις επί μέρους συνιστώσες. Αν θεωρήσομε συνεπώς ότι το σώμα ισορροπεί, τότε το άθροισμα των ροπών των στοιχειωδών βαρών dw ως προς το Ο θα πρέπει να ισούται με την ροπή του βάρους W ως προς το σημείο αυτό :

$$\sum(dwx) = W\bar{X} => \boldsymbol{\bar{X}} = \frac{\int_{O}^{B'} \boldsymbol{xq(x)dx}}{\boldsymbol{W}}$$

Αν επαναλάβομε την ίδια διαδικασία θεωρώντας ότι η βαρύτητα είναι κατά τον άξονα Χ, θα υπολογίσομε μια απόσταση $\boldsymbol{\bar{Z}}$ **.** Το σημείο $(\boldsymbol{\bar{X}}, \boldsymbol{\bar{Z}})$ ονομάζεται <u>«κεντροειδές» (centroid)</u> της επιφάνειας ΑΒΒ'Ο.

<u>Παράδειγμα : Τραπεζοειδής φόρτιση</u>



Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση q(x) είναι :

$$q(x) = q_A + \frac{(q_B - q_A)}{OB'}x$$

Οπότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα :

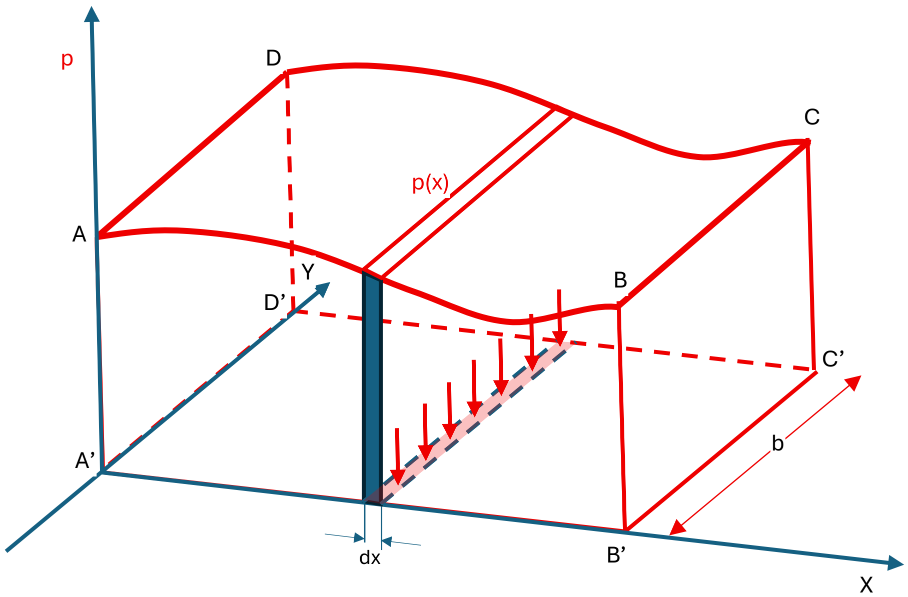
$$\boldsymbol{W} = \int_{A'}^{B'} \boldsymbol{q(x)dx} = \int_{O}^{B'} \left(q_A + \frac{(q_B - q_A)}{OB'}x\right)\boldsymbol{dx} =$$

$$= \left[q_A x + \frac{(q_B - q_A)}{OB'}\frac{x^2}{2}\right]_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{OB'}} = \frac{\boldsymbol{(q_A + q_B)}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{OB'}$$

$$\boldsymbol{\bar{X}} = \frac{\int_{O}^{B'}\left(q_A x + \frac{(q_B - q_A)}{OB'}x^2\right)dx}{\frac{(q_A + q_B)}{2}OB'} = \frac{\left[q_A\frac{x^2}{2} + \frac{(q_B - q_A)}{OB'}\frac{x^3}{3}\right]_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{OB'}}}{\frac{(q_A + q_B)}{2}OB'} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}\left(\frac{\boldsymbol{2q_B + q_A}}{\boldsymbol{q_A + q_B}}\right)\boldsymbol{OB'}$$

Δυνάμεις που ασκούν πιέσεις σε επιφάνεια

Ας υποθέσομε ότι στην επιφάνεια A'D'C'B' ασκείται μη σταθερή πίεση, το μέγεθος της οποίας εμφανίζεται στο σχήμα που ακολουθεί σε άξονα κάθετο στο επίπεδο XY.



Ας υποθέσομε ακόμη, ότι η πίεση αυτή είναι συνάρτηση μόνο του x (όλα τα σημεία δηλαδή της επιφάνειας A'D'C'B' με ίδιο x, έχουν την ίδια πίεση).Η στοιχειώδης λωρίδα της επιφάνειας αυτής πάχους dx δέχεται τότε δύναμη εξ αιτίας της πίεσης :

dF=p(x)(bdx)

συνεπώς η συνολική δύναμη που δέχεται η επιφάνεια, είναι :

$$\boldsymbol{F} = b\int_{A'}^{B'} bp(x)dx = \int_{\boldsymbol{A'}}^{\boldsymbol{B'}} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$$

Όπου :

$q(x) = bp(x)$, μια ποσότητα με διαστάσεις και πάλι : Δύναμη/μονάδα μήκους

Το πρόβλημα είναι εντελώς ισοδύναμο με αυτό της προηγούμενης περίπτωσης και άρα με τους ίδιους συλλογισμούς μπορούμε να προσδιορίσομε το κέντρο πίεσης.