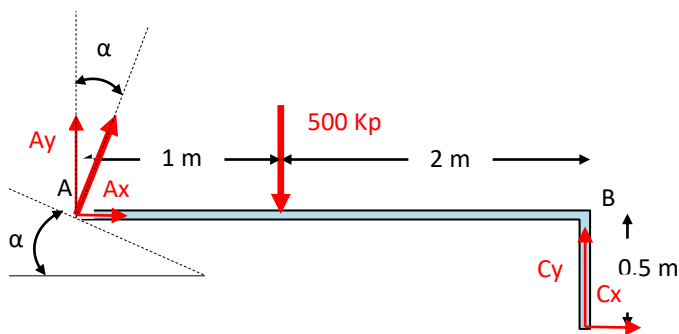


Άσκηση

Το στερεό σώμα ABC αρθρώνεται στο σημείο C και στηρίζεται με κύλιση τη θέση A. Σχεδιάσετε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος και υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις.

ΛΥΣΗ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ



1. Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος.

Την δύναμη A, που είναι κάθετη στο επίπεδο κύλισης, αναλύουμε σε συνιστώσες κατά τον άξονα X και Y. Το ίδιο κάνουμε και για την άγνωστη κατά μέτρο και διεύθυνση δύναμη της άρθρωσης.

2. Προσδιορισμός των αντιδράσεων

Συνθήκη ισορροπίας ροπών :

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow Ay \cdot 3 + Ax \cdot 0.5 - 500 \cdot 2 = 0 \Rightarrow$$

$$Ay \cdot 3 + Ax \cdot 0.5 - 1000 = 0 \quad (1)$$

(έχω θεωρήσει θετικές τις ροπές που τείνουν να περιστρέψουν το σώμα κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού).

Ισχύει όμως επίσης : $\epsilon\phi\alpha = Ax/Ay$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει :

$$Ay \cdot 3 + Ay \cdot \epsilon\phi\alpha \cdot 0.5 - 1000 = 0 \Rightarrow$$

Και από την (2)

$$Ay = 1000 / (3 + 0.5\epsilon\phi\alpha) \quad (\text{Kp})$$

$$Ax = 1000\epsilon\phi\alpha / (3 + 0.5\epsilon\phi\alpha) \quad (\text{Kp})$$

Συνθήκες ισορροπίας δυνάμεων :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow Ax + Cx = 0 \Rightarrow$$

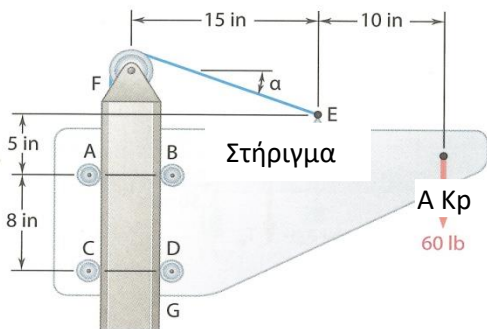
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Ay - 500 + Cy = 0 \Rightarrow$$

$$Cx = -1000\epsilon\phi\alpha / (3 + 0.5\epsilon\phi\alpha) \quad (\text{Kp})$$

$$Cy = -1000 / (3 + 0.5\epsilon\phi\alpha) + 500 \quad (\text{Kp})$$

Άσκηση

Το στήριγμα του σχήματος μπορεί να κυλίεται χωρίς τριβή πάνω στο στύλο, συγκρατείται δε με την βοήθεια του συρματοσχοίνου από το σημείο E.



1. Σχεδιάσετε το διάγραμμα του ελεύθερου σώματος «Στήριγμα». Το ζευγάρι των «τροχών» A και B αντικαταστήσετε με μια μόνο δύναμη. Το ίδιο και για τους τροχούς CD.

2. Υπολογίστε τις δυνάμεις που εξασκούν οι τροχοί και το συρματόσχοινο στο στήριγμα.

3. Μπορείτε να αφαιρέσετε δύο τροχούς κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μην επηρεάζεται η ισορροπία του σώματος;

Λύση

1. Το διάγραμμα του ελεύθερου σώματος «Στήριγμα», φαίνεται στο διπλανό σχήμα : Η δύναμη του συρματοσχοίνου F_{σ} , έχει διεύθυνση το ίδιο το συρματόσχοινο, τα δε ζεύγη των «τροχών» έχουν αντικατασταθεί από τις δυνάμεις F_{π} και F_K , κάθετες στον στύλο, στα σημεία K και Λ (θεωρούμε ότι η διάμετρος του στύλου είναι «μικρή» σε σχέση με τις υπόλοιπες διαστάσεις της κατασκευής).

2. Ισορροπία του στερεού σώματος «Στήριγμα».

Αναλύουμε την F_{σ} σε δύο συνιστώσες : $F_{\sigma x} = F_{\sigma} \cdot \sin(\alpha)$, $F_{\sigma y} = F_{\sigma} \cdot \cos(\alpha)$ και $F_{\sigma x} = F_{\sigma y} / \tan(\alpha)$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{\sigma y} - A = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\sigma y} = A \quad (1)$$

$$\text{Οπότε και } F_{\sigma x} = F_{\sigma y} / \tan(\alpha) \Rightarrow$$

$$F_{\sigma x} = A / \tan(\alpha) \quad (2)$$

Οπότε, για τη δύναμη του συρματοσχοίνου :

$$(F_{\sigma})^2 = (F_{\sigma x})^2 + (F_{\sigma y})^2 \Rightarrow$$

$$F_{\sigma} = A \sqrt{1 + \frac{1}{(\tan(\alpha))^2}}$$

$$+ \curvearrowright \sum M_K = 0 \Rightarrow -F_K \cdot 8 + A \cdot 25 - F_{\sigma y} \cdot 15 - F_{\sigma x} \cdot 5 = 0 \text{ και λόγω των (1) και (2) } \Rightarrow$$

$$-F_K \cdot 8 + A \cdot 25 - A \cdot 15 - A / \tan(\alpha) \cdot 5 = 0 \Rightarrow$$

$$F_K = A[10/8 - 5/8 \tan(\alpha)]$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_K + F_{\pi} - F_{\sigma x} = 0 \Rightarrow \dots$$

$$F_{\pi} = A[-10/8 + 13/8 \tan(\alpha)]$$

3. Ποιοι τροχοί μπορούν να αφαιρεθούν, εξαρτάται από το πρόσημο των δυνάμεων F_{π} και F_{κ} . Αν το πρόσημο είναι θετικό, τότε μπορεί να αφαιρεθεί ο αριστερά τροχός...

Παράδειγμα : $\alpha=30^\circ$ και $A = 200 \text{ Kp}$.

$$\varepsilon\phi(\alpha) = 0.577$$

$$F_{\kappa} = 200(10/8 - 5/8 \cdot 0.577) = 33,36 \text{ Kp}$$

$$F_{\pi} = 200(-10/8 + 13/8 \cdot 0.577) = 313,25 \text{ Kp}$$

Μπορούν να αφαιρεθούν και οι δύο αριστεροί τροχοί...

ΑΣΚΗΣΗ

Το δοχείο του σχήματος, βάρους 200 Kp είναι αρθρωμένο στο σημείο A και στηρίζεται με κύλιση τη θέση B. Σχεδιάστε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος και υπολογίστε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις.

ΛΥΣΗ

1. Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος.

Την δύναμη B, που είναι κάθετη στο επίπεδο κύλισης, αναλύουμε σε συνιστώσες κατά τον άξονα X και Y. Το ίδιο κάνουμε και για την άγνωστη κατά μέτρο και διεύθυνση δύναμη της άρθρωσης.

2. Προσδιορισμός των αντιδράσεων

Συνθήκη ισορροπίας ροπών :

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 200 \cdot 80 + B_x \cdot h - B_y \cdot 160 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ισχύει όμως επίσης } B_x = B \sin(30^\circ) \quad (2)$$

$$\text{και } B_y = B \eta\mu(30^\circ) \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει : $[B \sin(30^\circ)] h - [B \eta\mu(30^\circ)] 160 = -16000 \Rightarrow$

$$B = 16000 / (80 - 0.866h) \quad (\text{Kp})$$

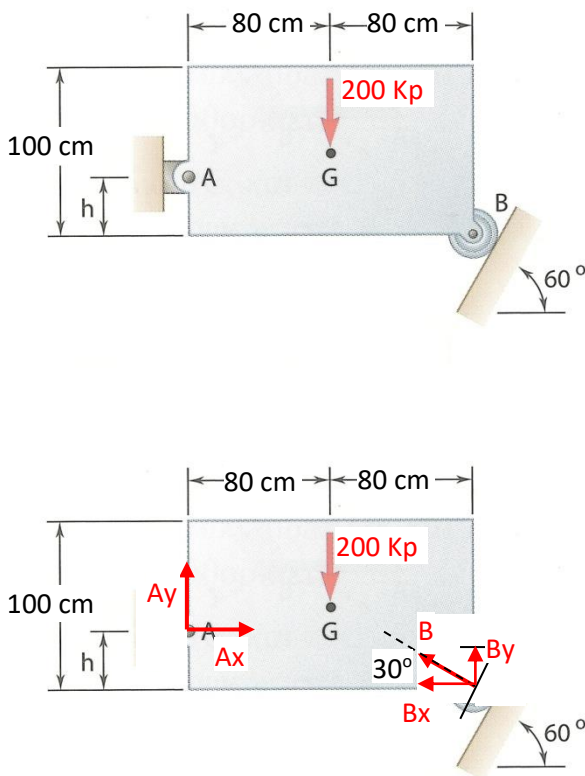
Συνθήκες ισορροπίας δυνάμεων :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - B_x = 0 \Rightarrow$$

$$A_x = 13856 / (80 - 0.866h) \quad (\text{Kp})$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 200 + B_y = 0 \Rightarrow$$

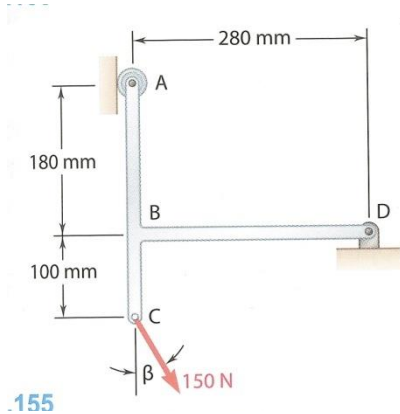
$$A_y = 200 - 8000 / (80 - 0.866h) \quad (\text{Kp})$$



ΑΣΚΗΣΗ

Η μεταλλική κατασκευή του σχήματος, είναι αρθρωμένη στο σημείο D και στηρίζεται με κύλιση τη θέση A.

1. Σχεδιάσετε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος και υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις.
2. Πόση πρέπει να γίνει η γωνία β προκειμένου η κατασκευή να ισορροπεί χωρίς την στήριξη στο A;
3. Πόση πρέπει να γίνει η γωνία β προκειμένου η κατασκευή να ισορροπεί με στήριξη κύλισης στην θέση D;



Λύση

1. Το διάγραμμα του ελευθέρου σώματος της κατασκευής, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Εξετάζουμε την ισορροπία του στερεού σώματος.

Αναλύουμε την δύναμη στο C σε δύο συνιστώσες :

$$C_x = 150 \cdot \sin(270^\circ + \beta) \text{ N}$$

$$C_y = 150 \cdot \eta\mu(270^\circ + \beta) \text{ N}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0 \Rightarrow A \cdot 180 - C_x \cdot 100 + C_y \cdot 280 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = [15000 \cdot \sin(270^\circ + \beta) - 42000 \cdot \eta\mu(270^\circ + \beta)] / 180 \text{ Nt} \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A + C_x + D_x = 0 \Rightarrow D_x = 233.3 [\eta\mu(270^\circ + \beta) - \sin(270^\circ + \beta)] \text{ Nt} \quad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow C_y + D_y = 0 \Rightarrow D_y = -150 \cdot \eta\mu(270^\circ + \beta) \text{ Nt} \quad (3)$$

2. Για να ισορροπεί η κατασκευή χωρίς την στήριξη στο A, πρέπει η γωνία β να είναι τέτοια που η δύναμη στο A να είναι μηδέν. Από την σχέση (1) που ισχύει για κάθε γωνία, έχω τότε:

$$A = [15000 \cdot \sin(270^\circ + \beta) - 42000 \cdot \eta\mu(270^\circ + \beta)] / 180 \text{ Nt} = 0 \Rightarrow$$

$$15000 \cdot \sin(270^\circ + \beta) = 42000 \cdot \eta\mu(270^\circ + \beta) \Rightarrow \epsilon\phi(270^\circ + \beta) = 0.357 \Rightarrow$$

Δύο λύσεις :

$$270^\circ + \beta = 19.65^\circ \Rightarrow \beta = -250.35^\circ$$

ή

$$270^\circ + \beta = 19.65^\circ + 180^\circ \Rightarrow \beta = -70.35^\circ$$

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις η διεύθυνση της δύναμης των 150 Nt περνά από το D και έτσι δεν μας χρειάζεται η στήριξη στο A.

3. Για να ισορροπεί η κατασκευή με στήριξη κύλισης στο σημείο D, πρέπει η δύναμη D_x που υπολογίσαμε να γίνει μηδέν. Από την (2) έχουμε :

$$D_x = 233.3 [\eta\mu(270^\circ + \beta) - \sigma\upsilon\nu(270^\circ + \beta)] Nt = 0 \Rightarrow \epsilon\phi(270^\circ + \beta) = 1 \Rightarrow$$

Δύο λύσεις :

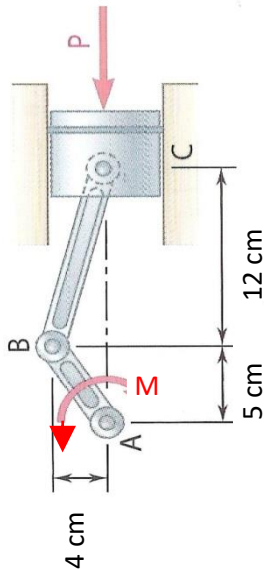
$$270^\circ + \beta = 45^\circ \Rightarrow \beta = -225^\circ$$

ή

$$270^\circ + \beta = 45^\circ + 180^\circ \Rightarrow \beta = -45^\circ$$

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις η διεύθυνση της δύναμης των 150 Nt περνά από το σημείο τομής των διευθύνσεων της A και της D_y .

ΑΣΚΗΣΗ



Υπολογίστετε την ροπή που εξασκεί ο στρόφαλος AB στο σημείο A (σημείο στο οποίο είναι «πακτωμένος» στον στροφαλοφόρο άξονα).

Θεωρήσετε τις τριβές στο πιστόνι αμελητέες.

Υπόδειξη : Θεωρήσετε την ισορροπία του πιστονιού και υπολογίστε τη δύναμη στον διωστήρα BC που είναι βεβαίως αρθρωμένος τόσο στο πιστόνι όσο και στο σημείο B.

ΛΥΣΗ

A. Θεωρούμε την ισορροπία του ελευθέρου σώματος «πιστόνι». Οι δυνάμεις που δέχεται φαίνονται στο διπλανό σχήμα : Η δύναμη P, η αντίδραση N από τα τοιχώματα, που είναι κάθετη στην επιφάνεια επαφής λόγω έλλειψης τριβής και η δύναμη F_{BC} της ράβδου BC –του διωστήρα δηλαδή.

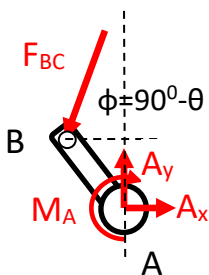
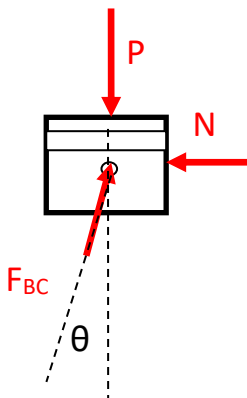
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{BC} \sin(\theta) - P = 0 \Rightarrow F_{BC} = P / \sin(\theta) \quad (1)$$

Ισχύει όμως :

$$\sin(\theta) = 4 \text{ cm} / 12 \text{ cm} = 0.333 \Rightarrow \theta = 18.43^\circ \text{ και } \sin(\theta) = 0.316$$

$$\text{οπότε : } F_{BC} = P / \sin(\theta) = P / 0.316 \Rightarrow$$

$$F_{BC} = 1.054 P$$



B. Θεωρούμε την ισορροπία του ελευθέρου σώματος BA - του «στρόφαλου» δηλαδή. Οι δυνάμεις και η ροπή που δέχεται φαίνονται στο διπλανό σχήμα : Οι δυνάμεις A_x και A_y καθώς και η ροπή M_A της πάκτωσης και η δύναμη F_{BC} της ράβδου BC –του διωστήρα δηλαδή.

Ισορροπία ροπών ως προς το σημείο A :

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow - F_{BCx} * 5 \text{ cm} - F_{BCy} * 4 \text{ cm} + M_A = 0 \quad (2)$$

Ισχύει όμως :

$$F_{BCx} = F_{BC} \sin(\phi) \text{ και } F_{BCy} = F_{BC} \cos(\phi)$$

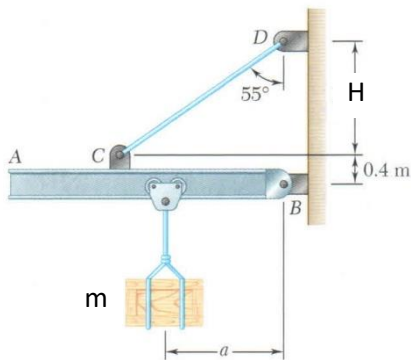
$$\phi = 90^\circ - \theta = 71.57^\circ \Rightarrow \sin(\phi) = 0.949 \text{ και } \cos(\phi) = 0.316$$

οπότε από την (2) παίρνουμε :

$$M_A = F_{BC} * 0.316 * 5 \text{ cm} + F_{BC} * 0.949 * 4 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$M_A = 5.67 P \text{ (Kpcm)}$$

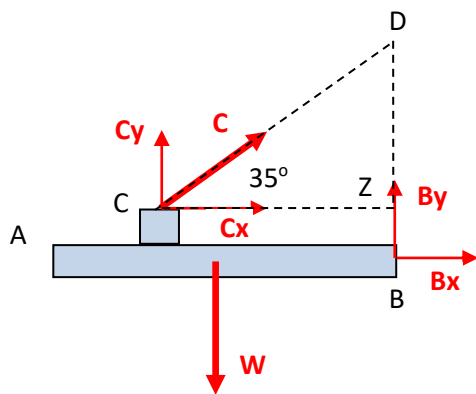
ΑΣΚΗΣΗ



Φορτίο μάζας m μπορεί να ολισθαίνει κατά μήκος της «γλίστρας» AB. Η τελευταία συγκρατείται σε οριζόντια θέση με την βοήθεια της άρθρωσης B και του συρματοσχοίνου CD. Αν το συρματοσχοίνο αντέχει 2000 Kp, βρείτε την μέγιστη επιτρεπτή απομάκρυνση a .

Πόση είναι τότε η δύναμη στην άρθρωση;

ΛΥΣΗ



Εξετάζουμε την ισορροπία του σώματος ACB, στην οριακή κατάσταση που το συρματοσχοίνο «φορτίζεται» με δύναμη $C = 2000$ Kp. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το διάγραμμα του ελεύθερου αυτού σώματος. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ZDC έχω :

$$\epsilon\phi(35^\circ) = DZ/CZ = H/CZ \Rightarrow CZ = H/\epsilon\phi(35^\circ) \Rightarrow \mathbf{CZ = 1.428 H}$$

Ας πάρουμε και την περίπτωση που $m=1500$ Kg και $H = 70$ cm. Τότε, για το βάρος W ισχύει :

$$W = mg = 1500 \cdot 10 = \mathbf{15000 = 1500 \text{ Kp.}} \quad (g = 10 \text{ m/s}^2)$$

Συνθήκες ισορροπίας του σώματος :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow C_x + B_x = 0 \Rightarrow B_x = -2000 \cos(35^\circ) \Rightarrow$$

$$\mathbf{B_x = -1638 \text{ Kp}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow C_y - W + B_y = 0 \Rightarrow C_y + B_y = 1500 - 2000 \sin(35^\circ) \Rightarrow$$

$$\mathbf{B_y = 353 \text{ Kp}}$$

Οπότε, η δύναμη στην άρθρωση είναι : $B = \sqrt{(-1638)^2 + (353)^2} \Rightarrow$

$$\mathbf{B = 1676 \text{ Kp}}$$

$$+\curvearrowright \Sigma M_B = 0 \Rightarrow C_y \cdot CZ + C_x \cdot 0.4 - W \cdot a = 0 \Rightarrow 2000 \sin(35^\circ) \cdot (1.428 \cdot 0.7) + 2000 \cos(35^\circ) \cdot 0.4 - 1500 a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{a = 1.201 \text{ m} = 120.1 \text{ cm}}$$