

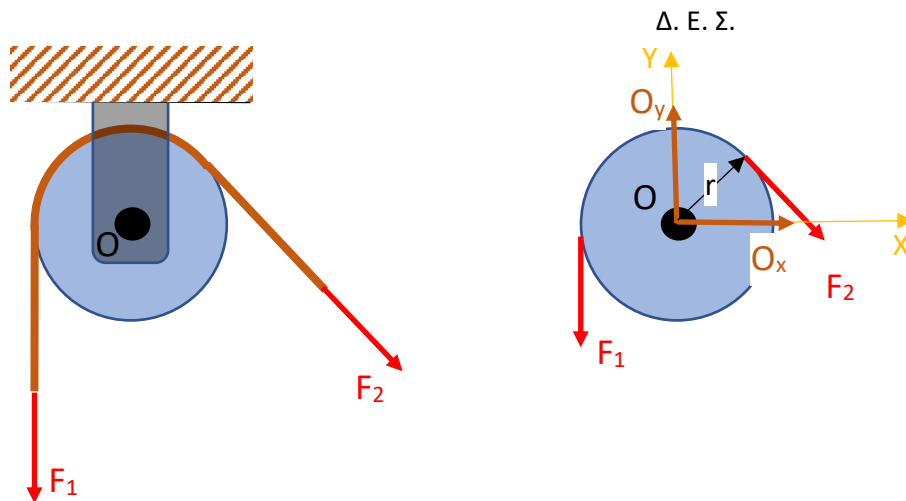
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΤΡΟΧΑΛΙΩΝ

Οι τροχαλίες χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε μηχανολογικές κατασκευές. Με την βοήθειά τους μπορούμε να συνθέσουμε απλές και αξιόπιστες διατάξεις που μπορούν να αλλάξουν δυνάμεις κατά κατεύθυνση και μέγεθος. Στις τροχαλίες, εκτός από τις δυνάμεις που δέχονται από τις στηρίξεις τους, εξασκούνται δυνάμεις και από το σχοινί ή συνηθέστερα συρματόσχοινο που τυλίγεται σ' αυτές.

Συνήθως, θεωρούμε τις τριβές που αναπτύσσονται στα διάφορα μέρη αμελητέες. Αμελητέες επίσης θεωρούνται συνήθως και οι ροπές που αναπτύσσονται εξ αιτίας της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας¹. Θεωρούμε επίσης, ότι το σχοινί ή συρματόσχοινο δεν ολισθαίνει σχετικά με το σώμα της τροχαλίας. Δεν έχει λόγο να το κάνει!

1. Η περίπτωση της σταθερής τροχαλίας

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται μια τέτοια τροχαλία ακτίνας r . Ο άξονας, γύρω από τον οποίο περιστρέφεται, είναι πακτωμένος, συνεπώς η τροχαλία δεν μπορεί να κάνει μεταφορική κίνηση (να φύγει από την θέση της). Μπορεί απλώς να περιστραφεί. Στην τροχαλία έχει τυλιχθεί συρματόσχοινο, στα άκρα του οποίου εξασκούνται δυνάμεις F_1 και F_2 .



Στο δεξιό μέρος του σχήματος, έχει σχεδιασθεί το διάγραμμα ελεύθερου σώματος της τροχαλίας. Οι δυνάμεις των συρματοσχοίνων είναι εφαπτόμενες στην περιφέρεια της τροχαλίας. Στο γεωμετρικό της κέντρο έχουν σχεδιασθεί οι συνιστώσες της δύναμης της άρθρωσης.

¹ Η ροπή που απαιτείται για την γωνιακή επιτάχυνση στρεφόμενου σώματος είναι $M=J(d\omega/dt)$, όπου J , η ροπή αδράνειας του ως προς τον άξονα περιστροφής. Στην περίπτωση των τροχαλιών, η ροπή αυτή είναι μικρή σε σχέση με τις αναπτυσσόμενες ροπές των εξωτερικών δυνάμεων.

Συνθήκες ισορροπίας (είτε όταν η τροχαλία είναι ακίνητη είτε όταν περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα είτε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, όταν επιταχύνει):

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{O}_x + \vec{O}_y = 0 \quad (1)$$

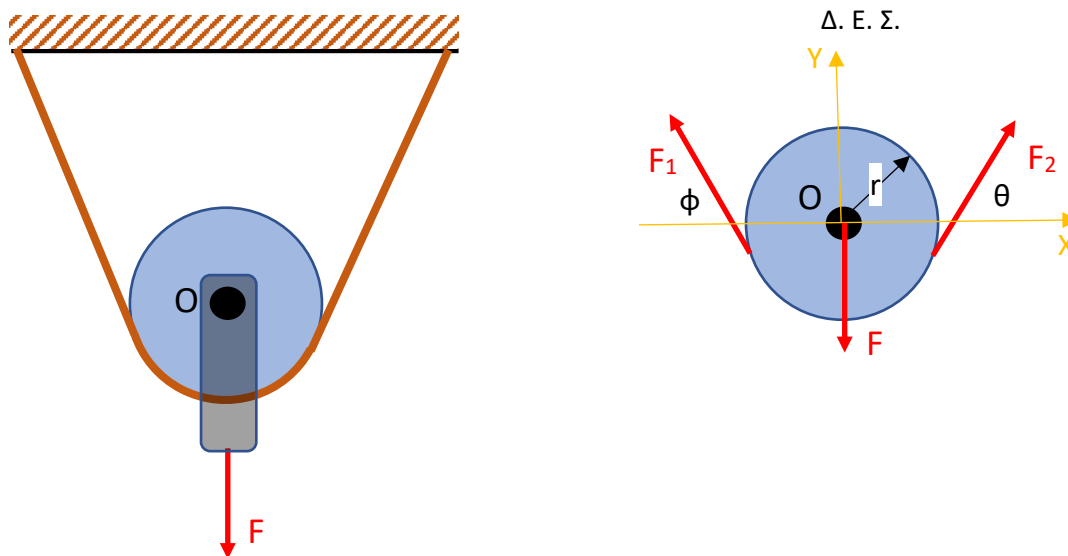
$$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow F_1 r - F_2 r = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \quad (2)$$

Προκύπτει δηλαδή αμέσως, ότι οι δυνάμεις από τις δύο μεριές του συρματοσχοίνου είναι ίσες κατά μέγεθος.

Επίσης, από την σχέση (1), μπορεί κανείς να υπολογίσει τις δυνάμεις στην στήριξη. Απαιτείται να γνωρίζει την διεύθυνση των συρματοσχοίνων.

2. Η περίπτωση της «ελεύθερης» τροχαλίας

Στην περίπτωση αυτή, η τροχαλία είναι ελεύθερη να κυλίεται πάνω στα συρματοσχοίνα συνθηθέστατα δε υποβαστάζει βάρος (γενικότερα δύναμη F) που είναι αναρτημένο στο άξονα της, δηλαδή επενεργεί στο γεωμετρικό της κέντρο – σχήμα που ακολουθεί.



Ας εξετάσουμε την ενδιαφέρουσα περίπτωση που η δύναμη F είναι κατακόρυφη – περίπτωση αναρτούμενης μάζας. Συνθήκες ισορροπίας :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1 \cos(180 - \varphi) + F_2 \cos(\theta) = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 \cos(90 - \varphi) + F_2 \cos(90 - \theta) + F \cos(180) = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow F_1 r - F_2 r = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \quad (3)$$

Από την (1) και εξ αιτίας της (3), προκύπτει ότι $\varphi = \theta$. Αναμενόμενο : Η ελεύθερη να κινείται τροχαλία θα κυλίσει πάνω στο συρματοσχοίνο μέχρι την «θέση συμμετρίας».

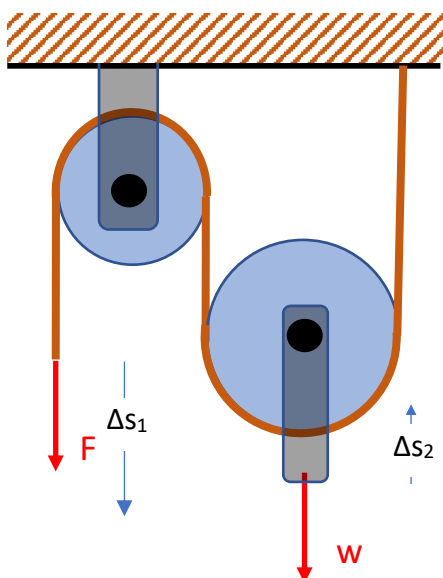
Από την εξίσωση (2), μπορούμε στην συνέχεια να προσδιορίσουμε τις δυνάμεις των συρματοσχοίων να είναι γνωστή η F και οι γωνίες.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που $\phi = \theta = 90^\circ$. Τότε από την (2) παίρνουμε :

$$F_1 \cos(90 - 90) + F_2 \cos(90 - 90) + F \cos(180) = 0$$

$$\Rightarrow F_1 = F_2 = F/2$$

Δύο χαρακτηριστικές εφαρμογές της ελεύθερης τροχαλίας.



A. Ανύψωση βάρους αναρτημένου στον άξονά της – διπλανό σχήμα.

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί βοηθητικά και η σταθερή τροχαλία, προκειμένου η φορά με την οποία με την οποία έλκει κανείς, δηλαδή η φορά της F , να είναι προς τα κάτω.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η δύναμη σε οποιαδήποτε θέση του συρματοσχοίνου είναι F και ισχύει :

$$F = W/2$$

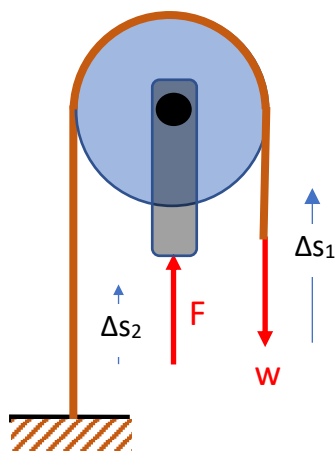
Ο μηχανισμός δηλαδή επιτρέπει την ανύψωση του βάρους με δύναμη ίση με το μισό του μέγεθος.

Αν κατά μια συγκεκριμένη μετακίνηση, η δύναμη F μετατοπίζεται κατά Δs_1 και το βάρος κατά Δs_2 , τότε, το έργο που παράγει η δύναμη είναι $\Delta E = F \cdot \Delta s_1$ το δε βάρος, αυξάνει την δυναμική του ενέργεια κατά $\Delta U = W \cdot \Delta s_2$. Αν θεωρήσουμε τις απώλειες ενέργειας κατά την μετακίνηση αμελητέες, τότε :

$$\Delta E = \Delta U \Rightarrow F \Delta s_1 = W \Delta s_2 \Rightarrow \Delta s_1 = 2 \Delta s_2$$

που σημαίνει ότι το φορτίο ανέρχεται με την μισή ταχύτητα, από αυτή που μετατοπίζεται η F .

A. Ανύψωση βάρους αναρτημένου στο συρματοσχοίνο με επιβολή δύναμης στον άξονά της – διπλανό σχήμα.



Στην περίπτωση αυτή :

$$W = F/2 \Rightarrow F = 2W$$

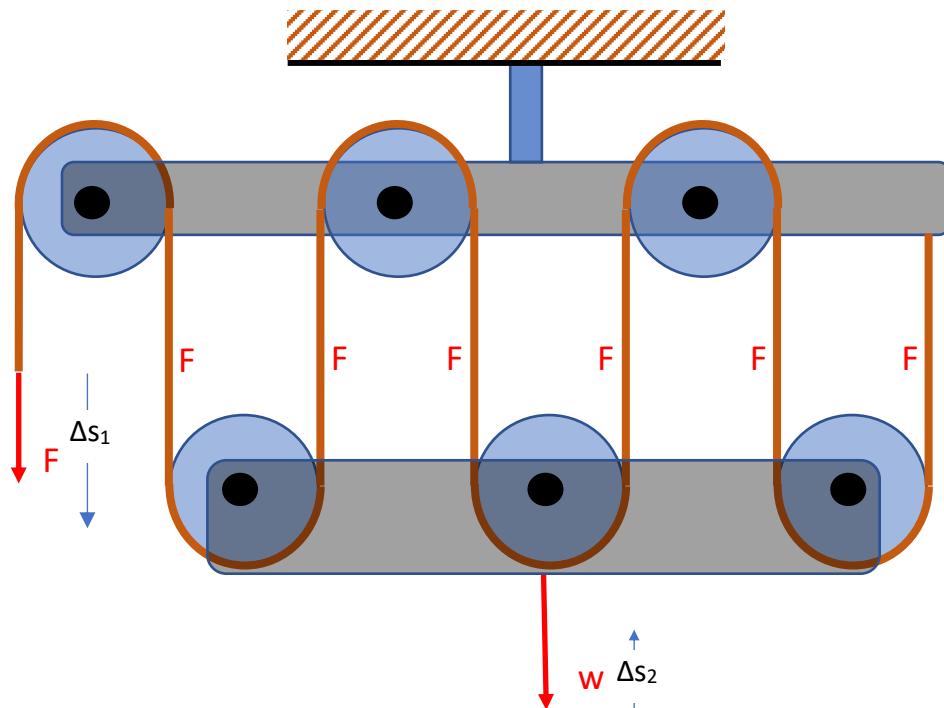
Απαιτείται δηλαδή διπλάσια δύναμη για την ανύψωση, όμως ισχύει επίσης :

$$\Delta s_1 = 2 \Delta s_2$$

Που σημαίνει ότι ο «επενεργητής» που εξασκεί την δύναμη F (συνήθως έμβολο), χρειάζεται το μισό μήκος επενέργειας από την απόσταση ανύψωσης και κινείται με την μισή ταχύτητα από αυτή του φορτίου.

Χρησιμοποιείται σε ανυψωτικούς μηχανισμούς περνοφόρων οχημάτων και σε υδραυλικούς ανελκυστήρες.

Πολύσπαστα



Εδώ χρησιμοποιείται ένα αριθμός n ελεύθερων τροχαλιών με τους άξονές τους πακτωμένους στο ίδιο στήριγμα (βάση). Το προς ανύψωση βάρος αναρτάται στην βάση αυτή και κατανέμεται εξ ίσου στους άξονες των ελευθέρων τροχαλιών. Χρειάζεται ακόμη και ένας αριθμός n σταθερών τροχαλιών για να «διευθετεί» το σχοινί (ή συρματοσχοινό). Η δύναμη του σχοινιού είναι ίση παντού όπως έχουμε αποδείξει και άρα, για κάθε ελεύθερη τροχαλία ισχύει :

$$2F = \frac{W}{n} \Rightarrow F = \frac{W}{2n}$$

... η απαιτούμενη δύναμη ανύψωσης, μειώνεται δραστικά!

Ισχύει όμως επίσης λόγω της διατήρησης της ενέργειας :

$$F\Delta s_1 = W\Delta s_2 \Rightarrow \left(\frac{W}{2n}\right)\Delta s_1 = W\Delta s_2 = > \Delta s_2 = \left(\frac{\Delta s_1}{2n}\right)$$

... άρα εξ ίσου δραστικά μειώνεται και η ταχύτητα ανύψωσης!

