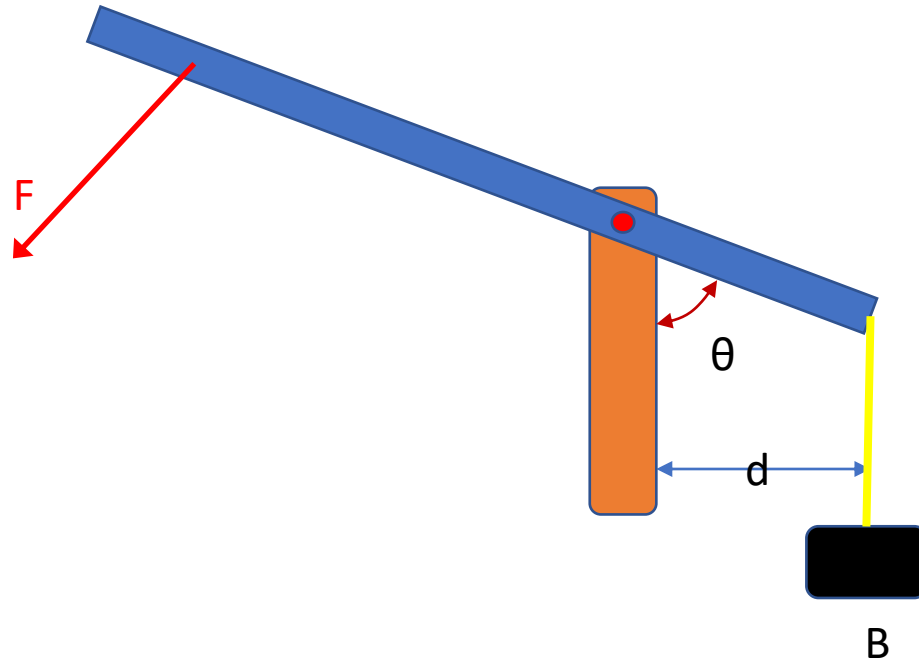
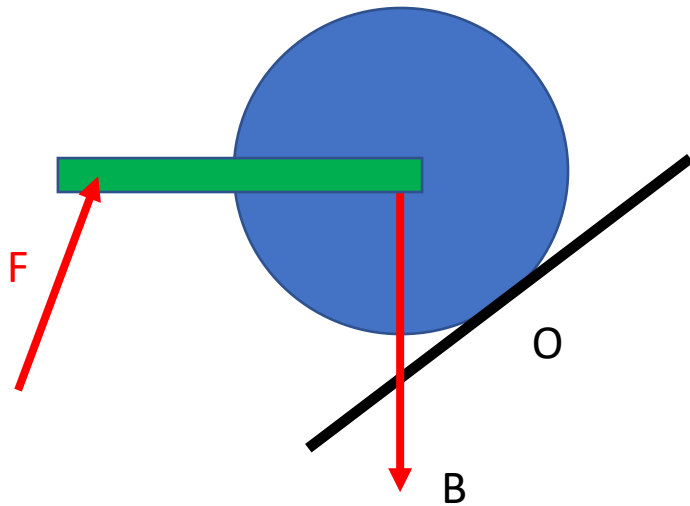


Ροπή δύναμης



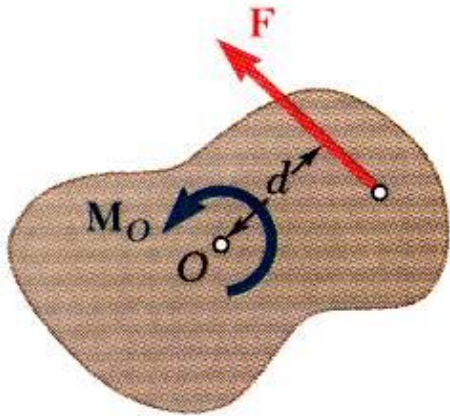
- Προσπαθούμε να συγκρατήσουμε (ή να ανυψώσουμε) το βάρος B με την βοήθεια αυτού του πρωτόγονου γερανού και της δύναμης F .
- Πως πρέπει να εξασκήσουμε την δύναμη, για «καλύτερα» αποτελέσματα;
 - Σε ποιο σημείο δηλαδή και με ποια διεύθυνση
- Η γωνία θ επηρεάζει την προσπάθειά μας;

Ροπή δύναμης

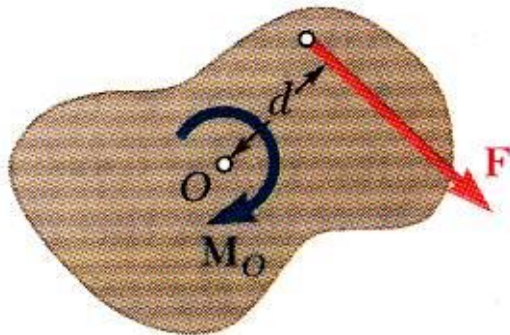


Ροπή δύναμης

Η απλή περίπτωση των δισδιάστατων (2D) κατασκευών



(a) $M_O = +Fd$



(b) $M_O = -Fd$

- Οι πραγματικές κατασκευές είναι πάντα τρισδιάστατες. Κάποιες από αυτές όμως μπορούμε να τις θεωρήσουμε δισδιάστατες όταν εξετάζουμε την ισορροπία τους. Είναι αυτές που «περιγράφονται» από ένα επίπεδο σχήμα το οποίο έχει σταθερό «πάχος» (σχήμα) και στις οποίες δρουν δυνάμεις, παράλληλες στο επίπεδο αυτό.

- **Ροπή** (μιας τέτοιας) δύναμης F ως προς σημείο O του επιπέδου, ορίζουμε να είναι ένα **διάνυσμα με μέτρο**

$$M = F \cdot d$$

- d : Απόσταση του O από τον φορέα (ευθεία) της δύναμης
- Σημείο εφαρμογής το O
- Διεύθυνση : Την κάθετη στο επίπεδο
- Φορά : Αυτή του κανόνα των «τριών δακτύλων»

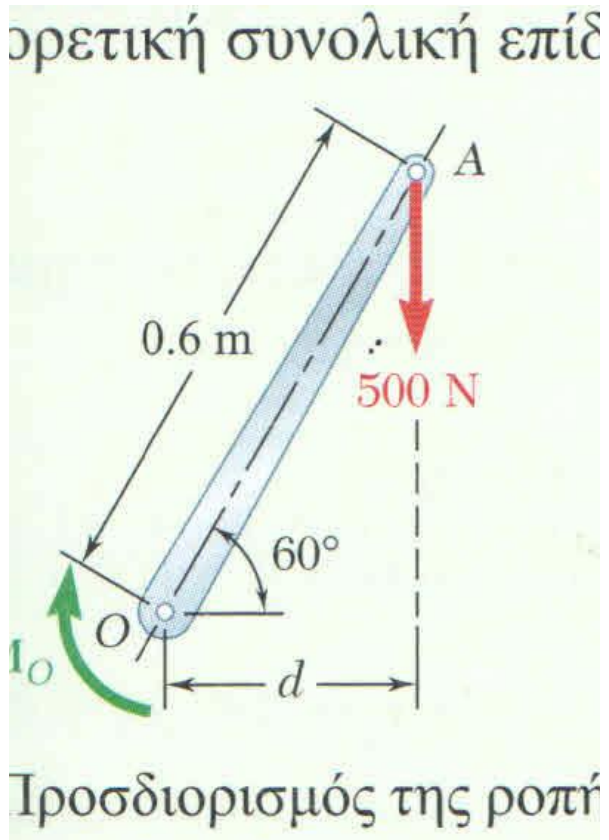
Ροπή δύναμης

Παράδειγμα

Μια δύναμη 500 N (κατακόρυφη) εφαρμόζεται στο σημείο A του μοχλού OA.

Υπολογίσετε:

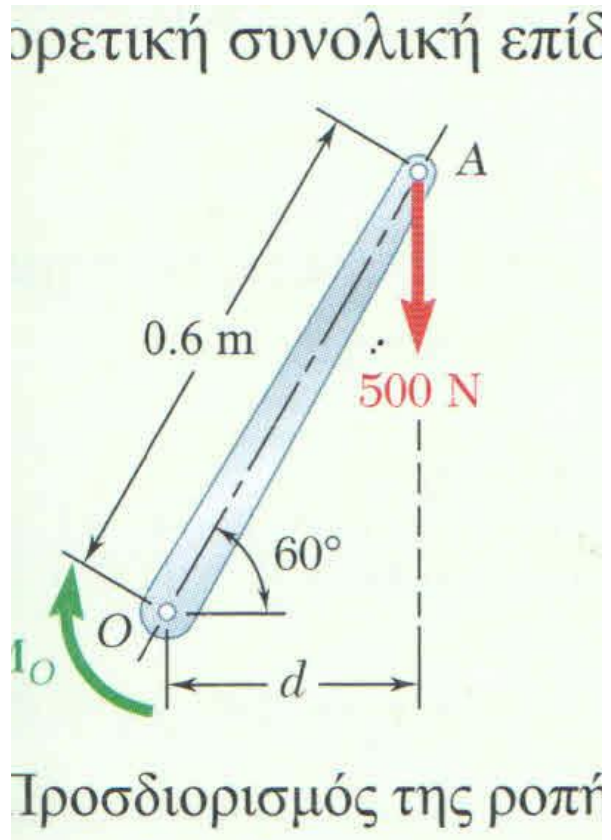
- Την ροπή της ως προς το O,
- Μια οριζόντια δύναμη στο A που δημιουργεί την ίδια ως άνω ροπή,
- Την μικρότερη σε μέγεθος δύναμη στο A που δημιουργεί την ίδια ροπή,
- Τη θέση μιας κατακόρυφης δύναμης 1.2 kN που δημιουργεί την ίδια ροπή,



Ροπή δύναμης

Παράδειγμα

(a)



Για το **μέτρο** της ροπής ισχύει :

$$|M| = Fd$$

$$d = OA \cdot \cos(60^\circ) = 0.6 \cdot 0.5 = 0.3 \text{ m}$$

$$|M| = 500 \text{ N} \cdot 0.3 \text{ m} = \mathbf{150 \text{ Nm}}$$

Ως διάνυσμα, είναι κάθετο στο επίπεδο στο σημείο O και η φορά του δείχνει προς τα μέσα.

Τείνει να περιστρέψει τον μοχλό ως προς το O κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού.

Την φορά αυτή θεωρούμε κατά σύμβαση αρνητική.

Μπορούμε τότε να γράψουμε ότι :

$$M = - 150 \text{ Nm}$$

Ροπή δύναμης

Παράδειγμα

(b)

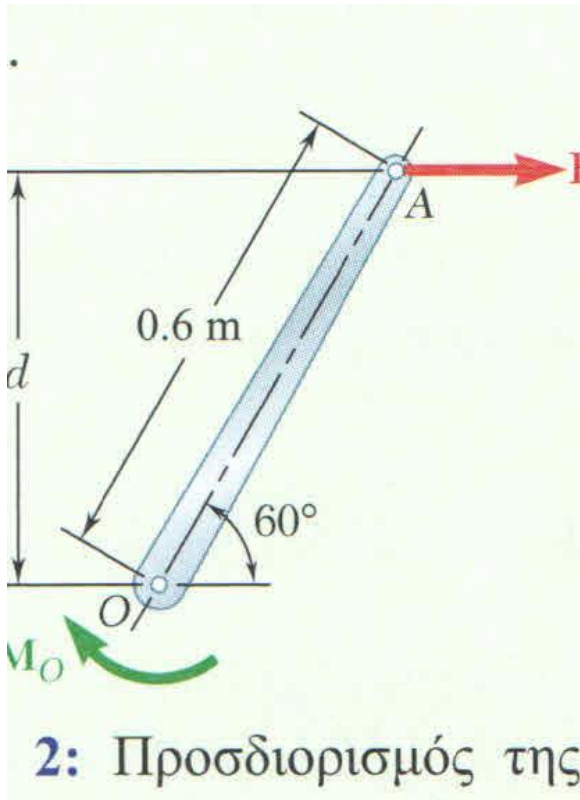
Και πάλι, για το **μέτρο** της ροπής ισχύει :

$$|M| = Fd = 150 \text{ Nm}$$

Όπου όμως :

$$d = OA \cdot \sin(60^\circ) = 0.6 \cdot 0.866 = 0.52 \text{ m}$$

$$F \cdot 0.52 \text{ m} = 150 \text{ Nm} \Rightarrow \mathbf{F = 289 \text{ N}}$$



Ροπή δύναμης

Παράδειγμα

της των 500 N ως προς το C
τοιώνοντας την κάθετη απόστα

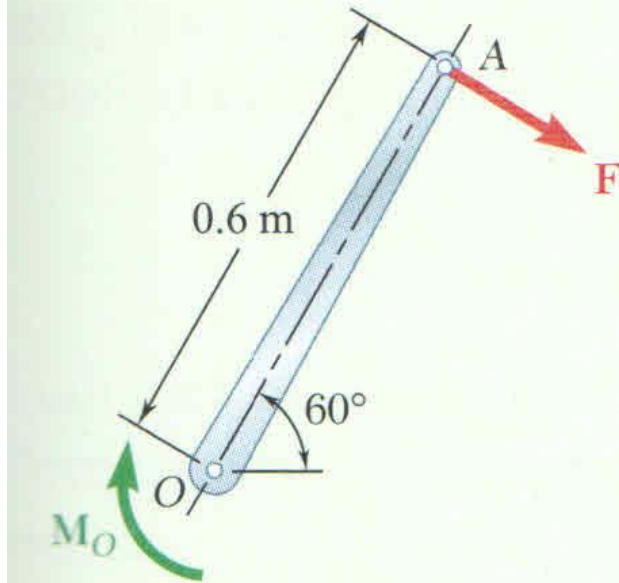
(c)

Αν παρατηρήσει κανείς τον τύπο που δίδει το
μέτρο της ροπής :

$$|M| = Fd = 150 \text{ Nm}$$

διαπιστώνει ότι για να έχει ελάχιστη δύναμη πρέπει
να εξασφαλίσει μέγιστη απόσταση d . Η μέγιστη
αυτή απόσταση είναι ίση με OA και επιτυγχάνεται
ότνα η δύναμη είναι κάθετη στο OA . Ισχύει τότε :

$$F \cdot 0.6 \text{ m} = 150 \text{ Nm} \Rightarrow \mathbf{F = 250 \text{ N}}$$



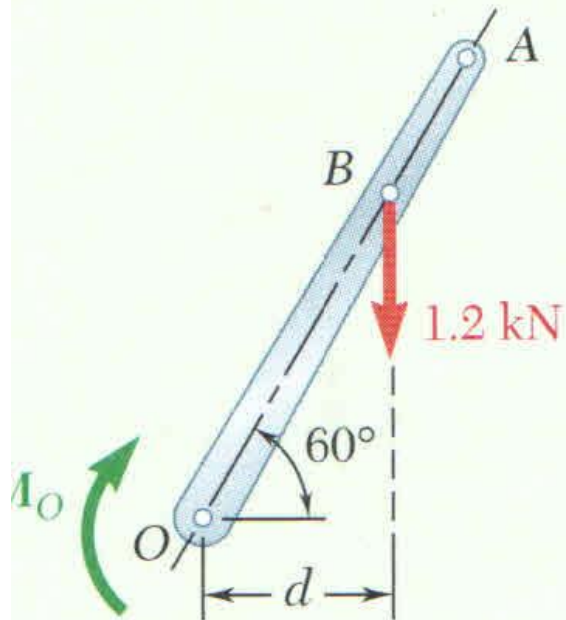
Πα 3: Προσδιορισμός της μ
δύναμης στο σημείο A.

Ροπή δύναμης

Παράδειγμα

είναι την ίδια ροπή ως προς

(d)



4: Η θέση της κατακόρυ

Αν υποθέσουμε ότι η κατακόρυφη δύναμη εφαρμόζεται στο σημείο B, ισχύει :

$$|M| = Fd \text{ και } d = OB \cdot \cos(60^\circ) \Rightarrow$$

$$150 \text{ Nm} = 1200 \text{ N} \cdot OB \cdot \cos(60^\circ) \Rightarrow$$

$$OB = 0.25 \text{ m}$$

Ροπή δύναμης

Γενίκευση για τρισδιάστατες (3D) κατασκευές

Ροπή $\vec{M}_O$, μιας δύναμης $\vec{F}$ ως προς κάποιο σημείο O του χώρου, είναι το εξωτερικό γινόμενο :

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

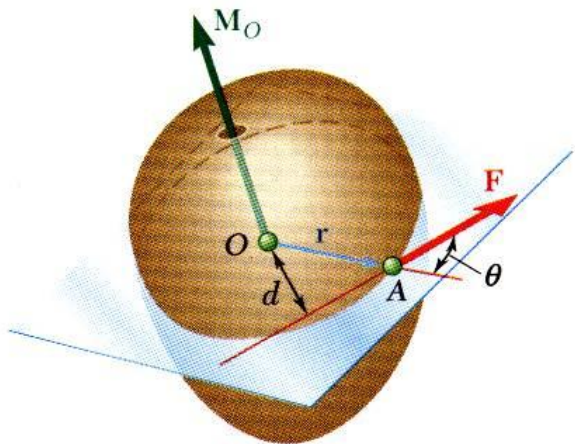
Όπου $\vec{r}$ το «διάνυσμα θέσης» της δύναμης ως προς το σημείο O . Το διάνυσμα δηλαδή $\vec{OA}$.

Το διάνυσμα της ροπής είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από την δύναμη και το σημείο.

Για το μέτρο του M_O , ισχύει :

$$M_O = rF\sin(\theta) = Fd$$

Η φορά του διανύσματος προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού (Σχήμα b)



(a)



(b)

Ροπή δύναμης

Ορθογώνιες συνιστώσες της ροπής

Αν είναι γνωστό το διάνυσμα θέσης :

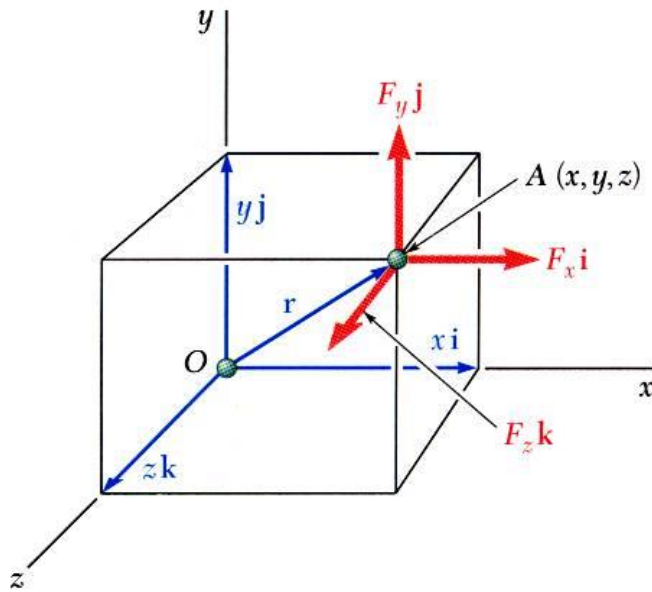
$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

Και η δύναμη :

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

Τότε η ροπή υπολογίζεται ως εξής :

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

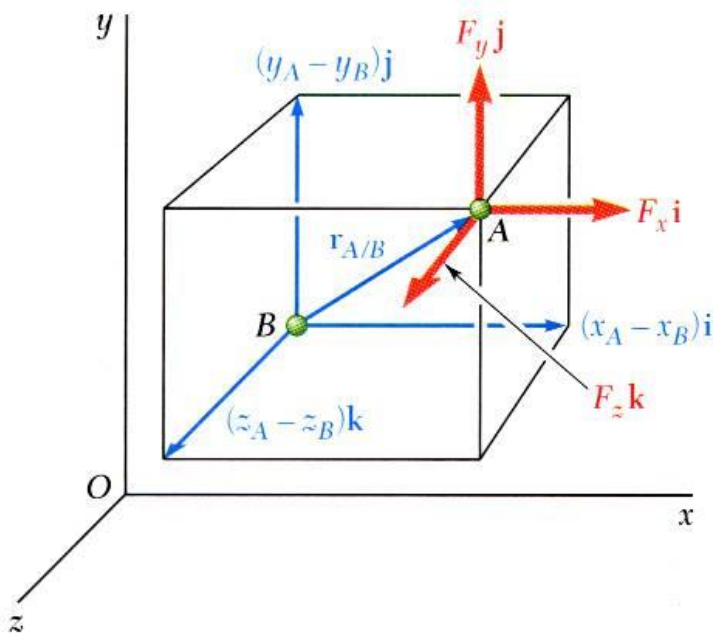


Η ειδική περίπτωση 2D

$$= (r_y F_z - r_z F_y) \vec{i} + (r_z F_x - r_x F_z) \vec{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \vec{k}$$

Ροπή δύναμης

Ορθογώνιες συνιστώσες της ροπής



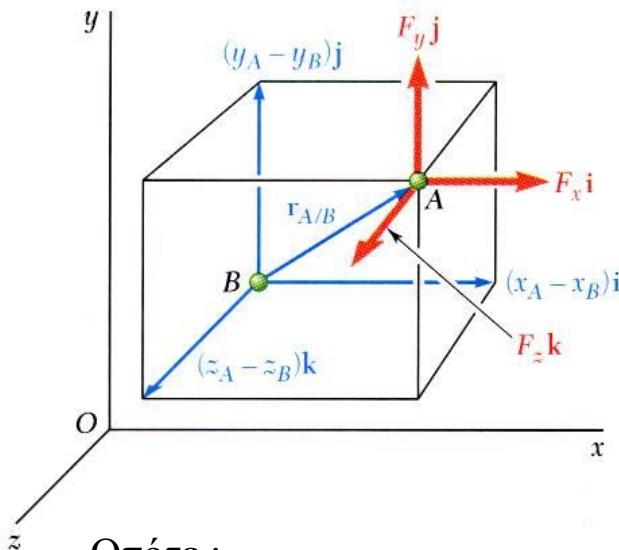
Στην γενικότερη περίπτωση, κατά την οποία το σημείο B , ως προς το οποίο μας ενδιαφέρει η ροπή, δεν είναι η αρχή των αξόνων, το διάνυσμα θέσης είναι το $\overrightarrow{BA}$ και ισχύει:

$$\overrightarrow{BA} = (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} + (z_A - z_B)\vec{k}$$

Κατά τα λοιπά, ισχύουν οι προηγούμενες σχέσεις

Ροπή δύναμης

Ορθογώνιες συνιστώσες της ροπής – Αριθμητικό παράδειγμα



Έστω δύναμη με σημείο εφαρμογής A της οποίας θέλουμε να βρούμε την ροπή ως προς σημείο B. :

$$\vec{F} = (+10\text{N})\vec{i} + (-20\text{N})\vec{j} + (+5\text{N})\vec{k}$$

και :

$$A=(5,20,40) , B=(50,0,10) \text{ (cm)}$$

Τότε το διάνυσμα θέσης είναι :

$$\begin{aligned}\vec{r} = \overrightarrow{BA} &= (5 - 50)\vec{i} + (20 - 0)\vec{j} + (40 - 10)\vec{k} \\ &= (-45)\vec{i} + (20)\vec{j} + (30)\vec{k}\end{aligned}$$

Οπότε :

$$\begin{aligned}\vec{M}_B = \vec{r} \times \vec{F} &= (r_y F_z - r_z F_y)\vec{i} + (r_z F_x - r_x F_z)\vec{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\vec{k} = \\ &= (20 * 5 - 30 * (-20))\vec{i} + (30 * 10 - (-45) * 5)\vec{j} + ((-45) * (-20) - 20 * 10)\vec{k} = \\ &= (+700)\vec{i} + (+525)\vec{j} + (+700)\vec{k}\end{aligned}$$