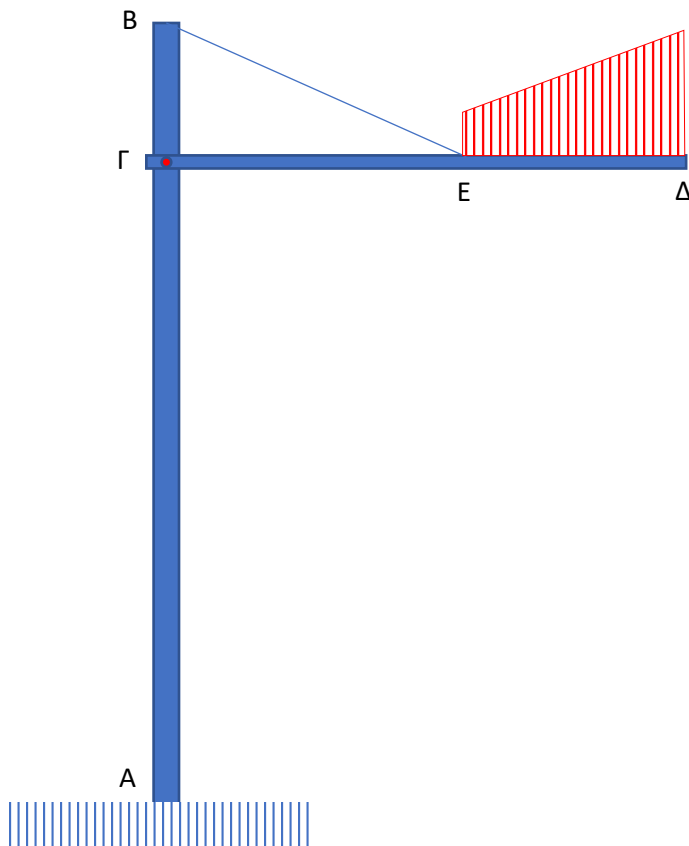


ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι – ΣΤΑΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 3^ο



Η κατασκευή του σχήματος αποτελείται από τα μέλη AB και ΓΔ, τα οποία ενώνονται με άρθρωση στην θέση Γ, και το συρματόσχοινο BE. Είναι δε πακτωμένη στο έδαφος στην θέση A και καλείται να στηρίξει κατανεμημένο φορτίο τραπεζοειδούς μορφής, όπως στο σχήμα.

1. Υπολογίσετε τις εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται κάθε ένα από τα μέλη.

2. Σχεδιάσετε τα διαγράμματα αξονικών και τεμνουσών δυνάμεων καθώς και καμπτικών ροπών για κάθε ένα από τα μέλη AB και ΓΔ.

3. Προτείνετε ένα τρόπο να περιορισθούν οι «μεγάλες» καμπτικές ροπές που καταπονούν το μέλος AB στην θέση A – χωρίς η στήριξη της κατασκευής να γίνει υπερστατική.

Δίδονται :

$AB = 7 \text{ m}$, $\Gamma\Delta = 5 \text{ m}$, $\Gamma E = 3 \text{ m}$, $\Gamma B = 2 \text{ m}$, $q_{\Delta} = 2 \text{ tn/m}$, $q_E = (XX/40) \text{ tn/m}$ όπου
XX ο αριθμός που σχηματίζουν τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας

Παρατηρήσεις - Υποδείξεις

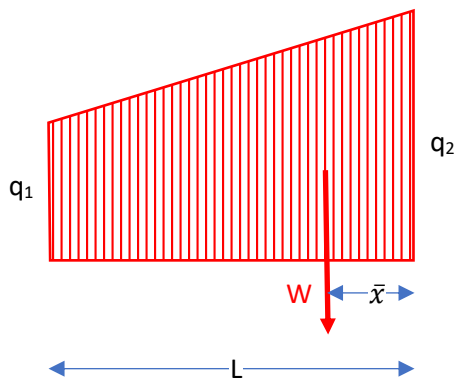
Οι εργασία που θα παραδώσετε θα πρέπει να είναι γραμμένη σε κάποιο κειμενογράφο (Word κατά προτίμηση ή συμβατό με αυτό) και θα πρέπει να την «καταθέσετε» ηλεκτρονικά μέσω της πλατφόρμας eClass, μέχρι την Κυριακή 12/01/2025.

Η εργασία δεν πρέπει να είναι απλή παράθεση τύπων και αριθμών. Δείτε τα παραδείγματα ασκήσεων που υπάρχουν στο eClass και γράψτε κάτι αντίστοιχο.

Η εργασία είναι υποχρεωτική και συμμετέχει στην διαμόρφωση του τελικού βαθμού με ποσοστό 5%

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Προκαταρκτικά



Για καταμεμημένο φορτίο τραπεζοειδούς μορφής, ισχύει γενικά :

Το συνολικό ισοδύναμο φορτίο, ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας του τραpezίου :

$$W = \left(\frac{q_1 + q_2}{2} \right) L \quad (1)$$

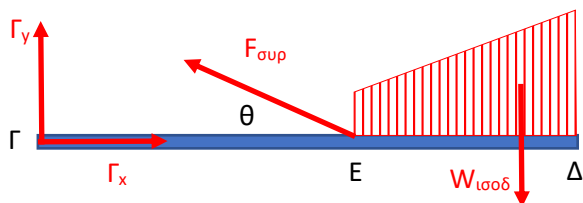
Το σημείο εφαρμογής του είναι αυτό του κεντροειδούς της επιφάνειας :

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \left(\frac{2q_1 + q_2}{q_1 + q_2} \right) L \quad (2)$$

1. Εξωτερικές δυνάμεις στα μέλη της κατασκευής

Για να υπολογίσουμε τις εξωτερικές δυνάμεις θα σχεδιάσουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για κάθε μέλος χωριστά :

1.1 Μέλος ΓΕΔ



Για την γωνία θ ισχύει :

$$\epsilon\phi(\theta) = \Gamma\Delta/\Gamma\epsilon = 2/3 \Rightarrow \theta = 33.7^\circ$$

Ας εξετάσουμε την περίπτωση που

$$q_E = 1 \text{ tn/m}$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα :

$$W_{\text{ισοδ}} = \left(\frac{q_E + q_\Delta}{2} \right) E\Delta = 3 \text{ tn}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \left(\frac{2q_E + q_\Delta}{q_E + q_\Delta} \right) E\Delta = 0.889 \text{ m}$$

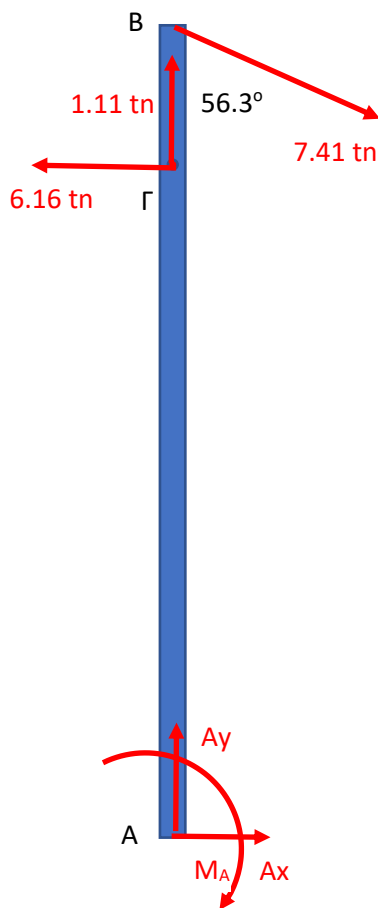
Συνθήκες ισορροπίας σώματος :

$$\sum M_\Gamma = 0 \Rightarrow -(F_{\text{συρ}} \cos(90 - \theta)) \Gamma\epsilon + W_{\text{ισοδ}}(\Gamma\Delta - \bar{x}) = 0 \Rightarrow F_{\text{συρ}} = 7.41 \text{ tn}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \Gamma_x + (F_{\text{συρ}} \cos(180 - \theta)) = 0 \Rightarrow \Gamma_x = 6.16 \text{ tn}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \Gamma_y + (F_{\sigma\nu\rho\mu} \cos(90 - \theta)) + W_{\iota\sigma\omicron\delta} \cos(180) = 0 \Rightarrow \Gamma_y = -1.11 \text{ tn}$$

1.2 Μέλος ΑΓΒ



Συνθήκες ισορροπίας σώματος :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + (7.41 \cos(33.7)) - 6.16 = 0 =$$

$$> A_x = 0 \text{ tn}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 1.11 + (7.41 \cos(123.7)) = 0 =$$

$$> A_y = +3 \text{ tn}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow + 6.16 * \Gamma B + M_A = 0 =$$

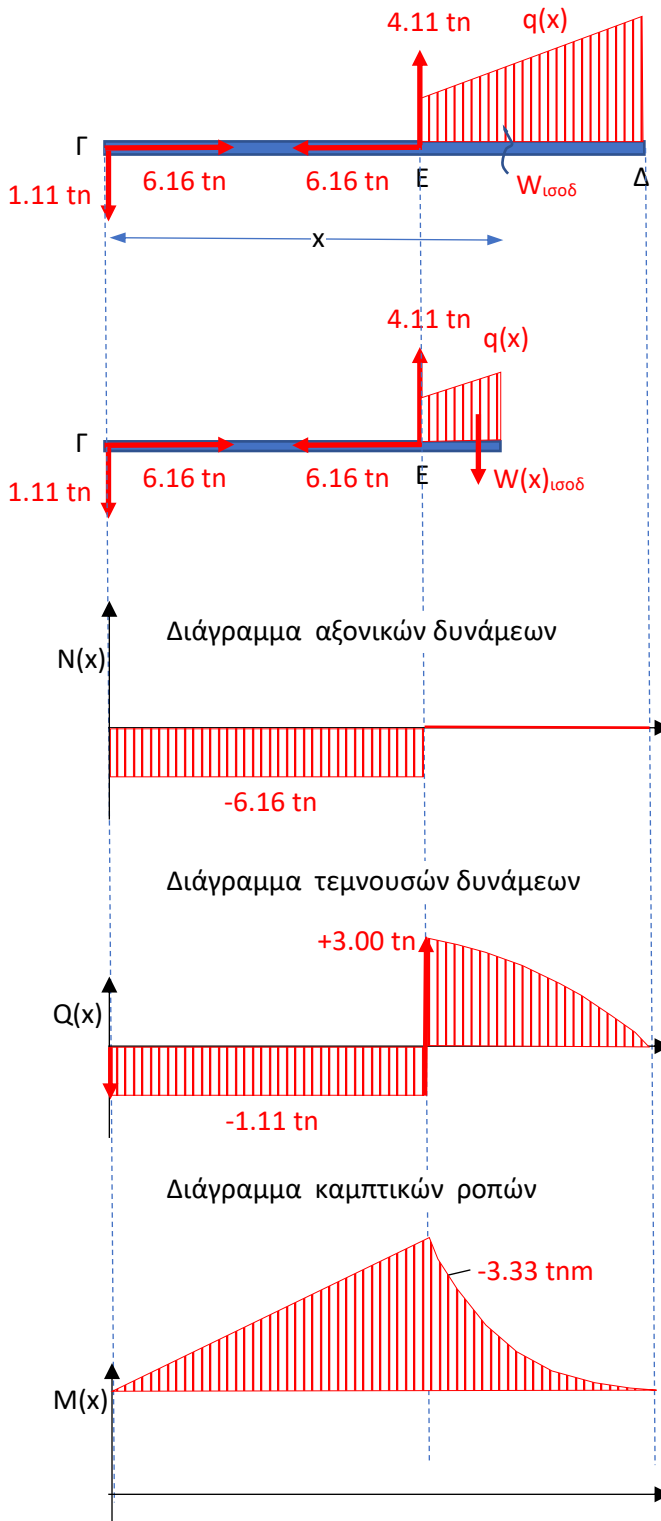
$$> M_A = -12.32 \text{ tnm}$$

Παρατήρηση :

Τις ίδιες τιμές για τη δύναμη και την ροπή στο σημείο Α θα βρίσκαμε, αν εξετάζαμε την ισορροπία όλης της κατασκευής.

2. Διαγράμματα εσωτερικών δυνάμεων και ροπών

2.1 Μέλος ΓΕΔ



Α. Αξονικές δυνάμεις

Σταθερή (θλιπτική) αξονική δύναμη υπάρχει μόνο στο τμήμα ΓΕ. Το διάγραμμα είναι συνεπώς απλό.

Β. Τέμνουσες δυνάμεις

Στο **τμήμα ΓΕ** δεν υπάρχει κατανεμημένο φορτίο, άρα το διάγραμμα είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα.

Τμήμα ΕΔ

Η συνάρτηση $q(x)$, η τιμή δηλαδή του κατανεμημένου φορτίου σε απόσταση x από την αρχή των αξόνων, είναι πρώτου βαθμού :

$$q(x) = ax + b$$

και ισχύει :

$$q_E = q(3) = a \cdot 3 + b = 1 \text{ tn/m}$$

$$q_\Delta = q(5) = a \cdot 5 + b = 2 \text{ tn/m}$$

Από την λύση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων, προκύπτει :

$$q(x) = 0.5x - 0.5 \text{ tn/m} \quad (3\text{m} < x < 5\text{m})$$

Α' Μέθοδος

Θα θεωρήσουμε την τομή του σχήματος σε απόσταση x από την αρχή.

$$W(x)_{\text{iso}\delta} = \left(\frac{q_E + q(x)}{2} \right) (x - 3)$$

$$= \left(\frac{1 + (0.5x - 0.5)}{2} \right) (x - 3) = \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{4} \right) \text{tn}$$

Στο τμήμα συνεπώς ΕΔ, η συνάρτηση της τέμνουσας δύναμης είναι :

$$Q(x) = -1.11 + 4.11 - W(x)_{\text{iso}\delta} = \left(\frac{-x^2 + 2x + 15}{4} \right) \text{tn}$$

Β' Μέθοδος

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) = -0.5x + 0.5 \Rightarrow$$

$$Q(x) = \int (-0.5x + 0.5)dx + c = \frac{-x^2 + 2x}{4} + c$$

Ισχύει όμως (οριακή συνθήκη) : $Q_E = Q(3) = +3.00 \text{ tn}$

Οπότε :

$$Q(3) = 3.00 = \frac{-3^2 + 2 \cdot 3}{4} + c \Rightarrow c = \frac{15}{4}$$

Οπότε :

$$Q(x) = \frac{-x^2 + 2x + 15}{4} \text{ tn}$$

Γ. Καμπτικές ροπές

Στο **τμήμα ΓΕ** δεν υπάρχει κατανεμημένο φορτίο, άρα το διάγραμμα είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα.

Τμήμα ΕΔ

Α' Μέθοδος

Με την βοήθεια και πάλι της τομής και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (1) και (2) :

$$\begin{aligned} M(x) &= -1.11x + 4.11(x - 3) + W(x)_{ισοδ\bar{x}} = \\ &+ 3x - 12.33 + \left[\left(\frac{q_E + q(x)}{2} \right) (x - 3) \right] \left[\frac{1}{3} \left(\frac{2q_E + q(x)}{q_E + q(x)} \right) (x - 3) \right] = \\ &+ 3x - 12.33 + \frac{1}{6} [2 \cdot 1 + (0.5x - 0.5)](x - 3)^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$M(x) = \frac{1}{12} (-x^3 + 3x^2 + 45x - 175) \text{ tnm} \quad (3 < x < 5)$$

Β' Μέθοδος

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) = \frac{-x^2 + 2x + 15}{4} \Rightarrow$$

$$M(x) = \int \left(\frac{-x^2 + 2x + 15}{4} \right) dx + c = \frac{-x^3 + 3x^2 + 45x}{12} + c$$

Ισχύει όμως (οριακή συνθήκη) : $M_E = M(3) = -3.33 \text{ tnm}$

Οπότε :

$$M(3) = -3.33 = \frac{-3^3 + 3 \cdot 3^2 + 45 \cdot 3}{12} + c \Rightarrow c = -\frac{175}{12}$$

Οπότε :

$$M(x) = \frac{1}{12}(-x^3 + 3x^2 + 45x - 175) \text{ tnm} \quad (3 < x < 5)$$

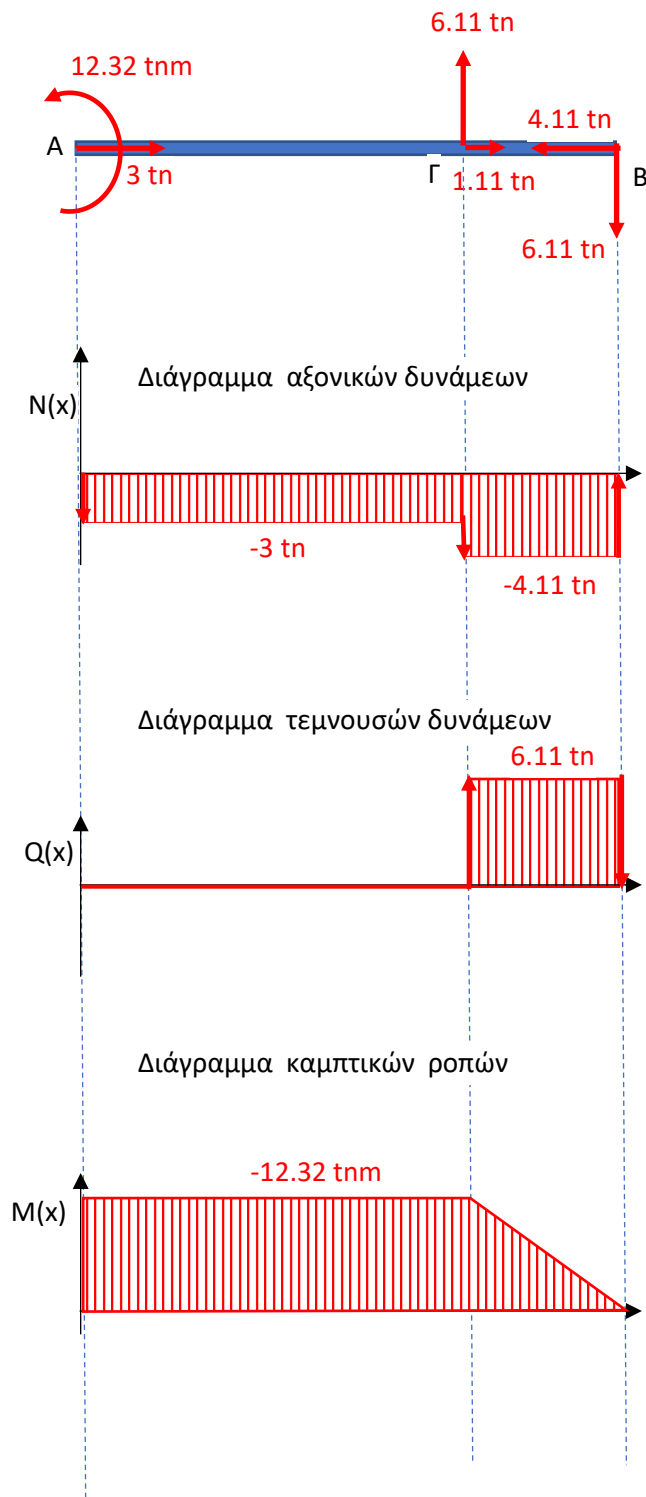
Για να ελέγξουμε αν η καμπτική ροπή παρουσιάζει κάποιο ακρότατο στο τμήμα του κατανεμημένου φορτίου, υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης και βρίσκουμε τα σημεία μηδενισμού της :

$$M'(x) = \frac{1}{12}(-3x^2 + 6x + 45)$$

Οι ρίζες της εξίσωσης $M'(x) = 0$, είναι : $x_1 = -3$ και $x_2 = 5$.

Μετά από την ανάλυση αυτή σχεδιάζουμε το διάγραμμα όπως φαίνεται στο σχετικό σχήμα.

2.2 Μέλος ΑΓΒ



Τα διαγράμματα δεν παρουσιάζουν καμιά δυσκολία, μιας και τα φορτία είναι συγκεντρωμένα.

Το μέλος σχεδιάσθηκε εδώ στραμμένο κατά 90° προκειμένου να έχει την γνώριμη μορφή των δοκών.

3. Περιορισμός των «μεγάλων» καμπτικών ροπών με τις οποίες καταπονείται η έδραση της κατασκευής.

