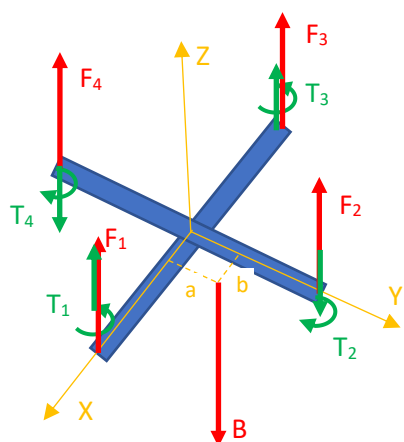


ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι – ΣΤΑΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 2ο



Η κατασκευή του σχήματος είναι ένας απολύτως συμμετρικός «σταυρός». Στα τέσσερα άκρα της κατασκευής και εντελώς συμμετρικά, έχουν τοποθετηθεί μικροί ηλεκτρικοί κινητήρες που κινούν έλικες, οι οποίες περιστρεφόμενες εξασκούν δυνάμεις, κάθετες στο επίπεδο της κατασκευής και με φορά προς τα άνω. Πρόκειται δηλαδή για ένα εν δυνάμει ιπτάμενο όχημα.

Το βάρος της όλης κατασκευής είναι 5 Κρ και η διεύθυνσή του, τέμνει το επίπεδο XY στο σημείο (a,b) – σχήμα. Η απόσταση της F1 από την F3 και της F2 από την F4 είναι 40 cm.

Οι κινητήρες «επιβάλλουν» στην έλικα ροπή T, τέτοια που $F=kT$ με $k=6 \text{ N/Nm}$. Η κατασκευή (μπλέ) δέχεται συνεπώς από την έλικα

ροπή -T .

Όπως φαίνεται στο σχήμα, οι δύο κινητήρες εξασκούν στην κατασκευή θετική (κατά τον άξονα των Z) ροπή και οι άλλοι δύο αρνητική. (Αυτό μπορεί να γίνει αν χρησιμοποιηθούν έλικες ίδιων χαρακτηριστικών, αλλά η μια δεξιόστροφη και η άλλη αριστερόστροφη).

1. Υπολογίστε τις δυνάμεις F_i ($i=1 \dots 4$) ούτως ώστε η κατασκευή να αιωρείται ακίνητη σε οριζόντια θέση.
2. Υπολογίστε δυνάμεις, τέτοιες που $\Sigma \vec{F} + \vec{B} = 0$ και $\Sigma \vec{T} = (0.5 \text{ Nm}) \vec{i}$. Τι θεωρείτε ότι θα κάνει τότε η κατασκευή;
3. Υπολογίστε δυνάμεις, τέτοιες που $\Sigma \vec{F} + \vec{B} = (5 \text{ N}) \vec{k}$ και $\Sigma \vec{T} = (0.5 \text{ Nm}) \vec{k}$. Τι θεωρείτε ότι θα κάνει τότε η κατασκευή;

Παρατηρήσεις - Υποδείξεις

$a = K$ (cm), $b = \Lambda$ (cm) όπου K,Λ το τελευταίο και προ-τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.

Μπορείτε να δουλέψετε μόνοι ή σε ομάδες το πολύ τριών ατόμων. Στην περίπτωση ομάδας τα στοιχεία K και Λ θα αφορούν ένα από τα μέλη της ομάδας.

Οι εργασία που θα παραδώσετε θα πρέπει να είναι γραμμένη σε κάποιο κειμενογράφο (Word κατά προτίμηση ή συμβατό με αυτό) και θα πρέπει να την «καταθέσετε» ηλεκτρονικά μέσω της πλατφόρμας eClass, μέχρι την Κυριακή 21/11, 11:00.

Η εργασία δεν πρέπει να είναι απλή παράθεση τύπων και αριθμών. Δείτε τα παραδείγματα ασκήσεων που υπάρχουν στο eClass και γράψτε κάτι αντίστοιχο.

Η εργασία είναι υποχρεωτική και συμμετέχει στην διαμόρφωση του τελικού βαθμού με ποσοστό 5%

Υποδείξεις για την λύση

1. Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων (1 εξίσωση) και ροπών (3 εξισώσεις):
 - Μία εξίσωση δυνάμεων – Ισορροπία κατά τον άξονα Z

- Τρεις εξισώσεις ισορροπίας ροπών κατά τους τρεις άξονες. Κατά τους άξονες X, Y ροπές δημιουργούν μόνο οι δυνάμεις (μελετήστε το λυμένο παράδειγμα στο eClass), ενώ κατά τον άξονα Z μόνο οι ροπές T1..T4.
- Αντικαταστήσετε στην τελευταία εξίσωση τις ροπές με δυνάμεις, σύμφωνα με τον τύπο που σας δίνεται.
- Λύσετε το σύστημα των 4 εξισώσεων για να βρείτε τις τέσσερις δυνάμεις.

2. Γράψετε τις ίδιες εξισώσεις με πριν, εκτός την εξίσωση των ροπών κατά τον άξονα ...

3.

ΛΥΣΗ

Οι δυνάμεις που δρουν στην κατασκευή, είναι παράλληλες στον άξονα Z και ως διανύσματα είναι οι εξής :

$$\vec{F}_1 = (F_1)\vec{k} , \quad \vec{F}_2 = (F_2)\vec{k} , \quad \vec{F}_3 = (F_3)\vec{k} , \quad \vec{F}_4 = (F_4)\vec{k}, \quad \vec{B} = (-5Kp)\vec{k}$$

Για την ροπή μιας οποιασδήποτε από τις παραπάνω δυνάμεις, ως προς την αρχή των αξόνων, ισχύει :

$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix} = (r_y F)\vec{i} - (r_x F)\vec{j}$$

Όπου r είναι το «διάνυσμα θέσης» του σημείου που η δύναμη τέμνει το επίπεδο XY. Τα διανύσματα αυτά, για τις παραπάνω τέσσερις δυνάμεις και το βάρος, είναι :

$$\vec{r}_1 = (20cm, 0, 0), \quad \vec{r}_2 = (0, 20cm, 0), \quad \vec{r}_3 = (-20cm, 0, 0), \quad \vec{r}_4 = (0, -20cm, 0)$$
$$\vec{r}_B = (b, a, 0)$$

Οι ροπές που δημιουργούν οι δυνάμεις αυτές ως προς το σημείο O είναι :

$$\vec{M}_o^1 = -(F_1 20)\vec{j}, \quad \vec{M}_o^2 = +(F_2 20)\vec{i}, \quad \vec{M}_o^3 = -(F_3(-20))\vec{j}, \quad \vec{M}_o^4 = +(F_4(-20))\vec{i}$$
$$\vec{M}_o^B = (a(-5))\vec{i} - (b(-5))\vec{j}$$

Εκτός από τις δυνάμεις, στην κατασκευή δρουν και ροπές από τις έλικες (μέσω των κινητήρων), κατά τον άξονα Z.

1ο Ερώτημα

Η τρισδιάστατη κατασκευή ισορροπεί σε οριζόντια θέση, συνεπώς :

$$\Sigma \vec{F}_i = \mathbf{0} \Rightarrow (F_1)\vec{k} + (F_2)\vec{k} + (F_3)\vec{k} + (F_4)\vec{k} + (-5Kp)\vec{k} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$(F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - 5Kp)\vec{k} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - 5Kp = 0 \quad (1a)$$

$$\Sigma \vec{M}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{M}_o^1 + \vec{M}_o^2 + \vec{M}_o^3 + \vec{M}_o^4 + \vec{T}_1 - \vec{T}_2 + \vec{T}_3 - \vec{T}_4 = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$-(F_1 20)\vec{j} + (F_2 20)\vec{i} - (F_3(-20))\vec{j} + (F_4(-20))\vec{i} + (a(-5))\vec{i} - (b(-5))\vec{j} +$$
$$(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)\vec{k} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$(F_2 20 - F_4 20 + a(-5))\vec{i} + (F_3 20 - F_1 20 + 5b)\vec{j} + (T_1 - T_2 + T_3 - T_4)\vec{k} = \mathbf{0} \quad (1b)$$

Η (1b) είναι μια διανυσματική εξίσωση. Από αυτήν προκύπτουν 3 αλγεβρικές εξισώσεις

$$F_2 20 - F_4 20 - 5a = 0 \quad (2)$$

$$-F_1 20 + F_3 20 + 5b = 0 \quad (3)$$

$$T_1 - T_2 + T_3 - T_4 = (F_1 - F_2 + F_3 - F_4)/k = 0 \quad (4)$$

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων 1α, 2,3,4, μας δίδει τις ζητούμενες δυνάμεις.

Με εντελώς ανάλογο τρόπο μπορούν να απαντηθούν και τα επόμενα ερωτήματα.