

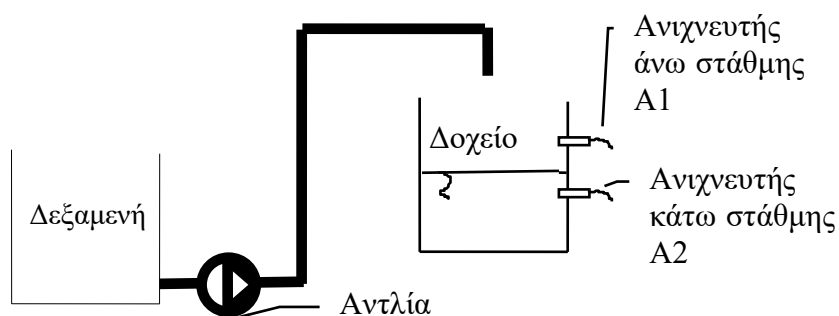
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΕΛΕΓΧΟΥ (ΡΥΘΜΙΣΗΣ) - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ

ΓΕΝΙΚΑ

Ένα από τα χαρακτηριστικά των αυτοματισμών που μέχρι τώρα διαπραγματευτήκαμε, είναι το ότι οι μονάδες ελέγχου που χρησιμοποιήσαμε έχουν όπως λέμε δύο διακριτές καταστάσεις : «**Ανοικτό - κλειστό**» (ON/OFF) για την περίπτωση ρελέ και ηλεκτροβαλβίδων ή «**βλέπω - δεν βλέπω**» για την περίπτωση των ανιχνευτών προσέγγισης. Τα αντίστοιχα αυτόματα συστήματα λειτουργούν και αυτά με «ανοίγματα - κλεισίματα», πράγμα που είναι συνήθως το ζητούμενο : Όταν π.χ. το κιβώτιο φτάσει στην άκρη του ταινιόδρομου πρέπει να εκταθεί ο κύλινδρος και να το βγάλει έξω. Η λειτουργία του κυλίνδρου «έκταση - επαναφορά» είναι μια λειτουργία μεταξύ δύο θέσεων - είναι δηλαδή μια ON-OFF λειτουργία που απαιτεί ελάχιστη 'πληροφορία' για να πραγματοποιηθεί, μόλις 1 bit όπως έχουμε αναλύσει - που είναι παρ' όλα αυτά απόλυτα ικανοποιητική για την συγκεκριμένη εφαρμογή.

Στο παράδειγμα ελέγχου της στάθμης δοχείου που επίσης διαπραγματευτήκαμε, μπορούμε να θυμηθούμε ότι με ένα πάρα πολύ απλό αυτοματισμό μπορούσαμε να κάνουμε την **στάθμη** του δοχείου να βρίσκεται πάντα **μεταξύ δύο θέσεων** : της θέσης του άνω ανιχνευτή και της θέσης του κάτω ανιχνευτή (Σχήμα 1).

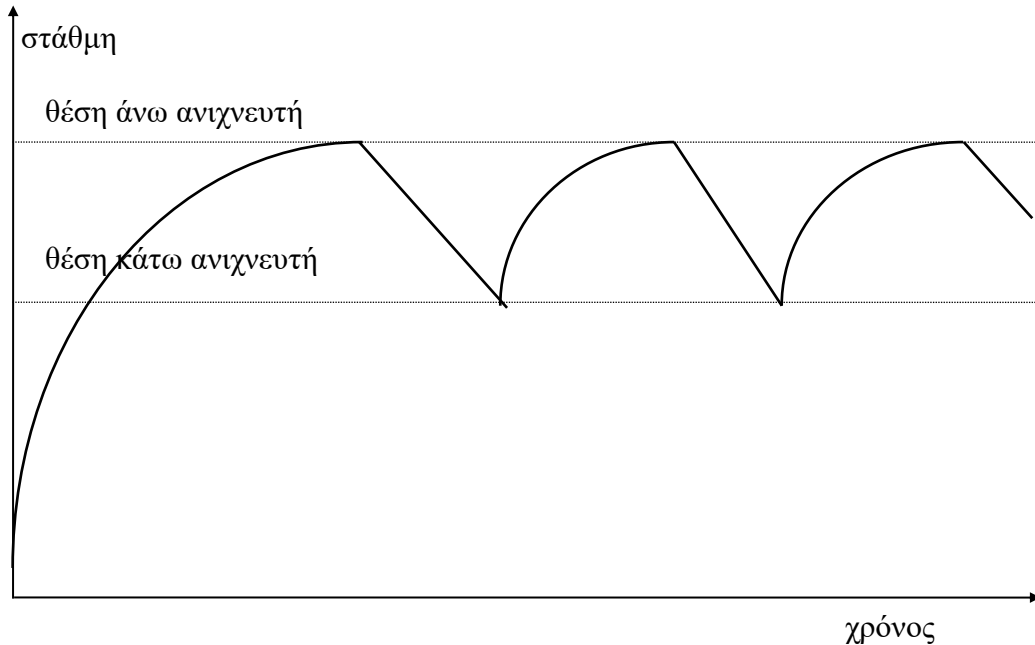


Σχήμα 1

Αν είναι επιθυμητό η στάθμη του δοχείου να διατηρείται όσο γίνεται σταθερή (σε πολλές εφαρμογές απαιτείται μια τέτοιου είδους ρύθμιση), μπορεί ίσως κανείς να σκεφθεί να πλησιάσει κοντά τους δύο ανιχνευτές: Τον ένα λίγο πιο ψηλά και τον άλλο λίγο πιο χαμηλά από την επιθυμητή στάθμη. Τότε η στάθμη του υγρού στο δοχείο θα μεταβάλλεται όπως στο Σχήμα 2. Μόλις το υγρό

φτάσει την κάτω στάθμη ξεκινά η αντλία και μόλις φτάσει στην πάνω η αντλία σταματά. Η στάθμη δηλαδή του υγρού στο δοχείο ταλαντώνεται μεταξύ δύο ορίων.

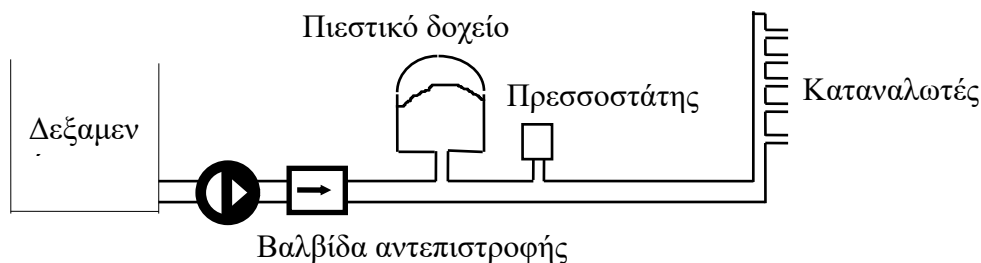
Προκειμένου να πετύχει κανείς όσο το δυνατόν ακριβέστερο έλεγχο της στάθμης πρέπει να μειώσει το εύρος μεταξύ των ορίων. Αυτό με την σειρά του



Σχήμα .2

έχει ως συνέπεια την αύξηση του αριθμού των ανοιγμάτων - κλεισιμάτων της αντλίας στη μονάδα του χρόνου. Το τελευταίο δεν μπορεί να γίνεται όμως όσο συχνά θέλουμε: Εκτός του άμεσου κινδύνου να καεί ο κινητήρας της αντλίας λόγω υπερθέρμανσης, θα έχουμε και ταχύτατη φθορά του ρελέ της αντλίας.

Ένα άλλο παράδειγμα **ελέγχου δύο θέσεων**, είναι ο έλεγχος πίεσης σε ένα υδροδοτικό ή πυροσβεστικό δίκτυο. Όπως σχηματικά φαίνεται στο Σχήμα 3, ο **πρεσσοστάτης** που επιτηρεί την πίεση στην αρχή του δικτύου, ρυθμίζεται έτσι που να ενεργοποιεί το ρελέ εκκίνησης της αντλίας όταν η πίεση πέσει κάτω από ένα (ρυθμιζόμενο) κάτω όριο, να απενεργοποιεί δε το ρελέ (σταματάει την αντλία) όταν η πίεση ανέβει πάνω από ένα (επίσης ρυθμιζόμενο) άνω όριο. Η διακύμανση



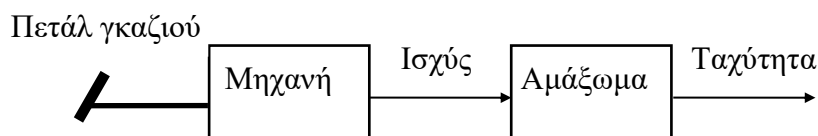
Σχήμα 3

βέβαια της πίεσης στο δίκτυο παρουσιάζει εικόνα ανάλογη της διακύμανσης της στάθμης του υγρού στο προηγούμενο παράδειγμα.

Στα παραπάνω συστήματα επιχειρούμε στην ουσία να κάνουμε **ρύθμιση** μιας ποσότητας - της **στάθμης του υγρού** στο δοχείο στην μία περίπτωση, της **πίεσης** στο δίκτυο την άλλη - χρησιμοποιώντας αυτό που ονομάζουμε έλεγχο δύο θέσεων ή ON-OFF έλεγχο. Είδαμε δε ότι υπάρχουν όρια στη ρύθμιση που μπορούμε να πετύχουμε: Ούτε την στάθμη ούτε την πίεση μπορούμε να ρυθμίσουμε έτσι που να **παραμένει ακριβώς σε μια επιθυμητή τιμή**.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΕΛΕΓΧΟΥ

Προκειμένου να οδηγηθούμε ομαλά στη κατανόηση της λειτουργίας μιας άλλης κατηγορίας συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, αυτών δηλαδή που ο έλεγχος ασκείται επί συνεχούς βάσεως, θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα από την καθημερινή εμπειρία. Στο Σχήμα 4, εντελώς διαγραμματικά, φαίνεται το σύστημα ρύθμισης της ταχύτητας ενός αυτοκινήτου :



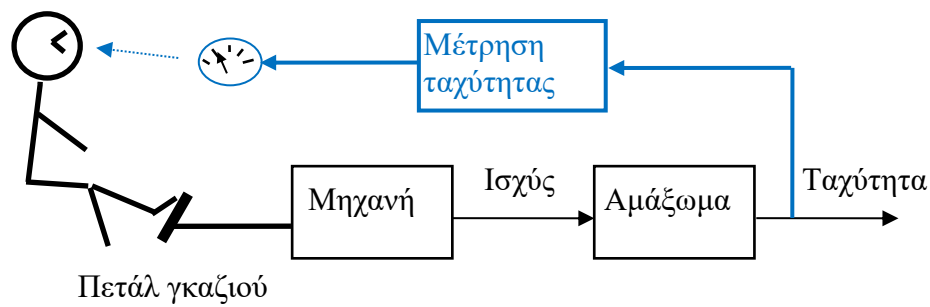
Σχήμα 4

Ο οδηγός επενεργεί στο πετάλ του γκαζιού για να αυξήσει ή να μειώσει την ταχύτητα. Το πετάλ μπορεί να πάρει άπειρες στην ουσία ενδιάμεσες θέσεις μεταξύ δύο ακραίων, άρα ο **έλεγχος** μπορεί να είναι μια **συνεχής διαδικασία** δηλαδή η ρύθμιση μπορεί να είναι πολύ ομαλή. Φανταζόσαστε τη περίπτωση που το πετάλ είχε μόνο δύο θέσεις : τελείως ανοικτό ή τελείως κλειστό !!?

Το παραπάνω σχήμα δεν περιγράφει ακριβώς αυτό που συμβαίνει με τους περισσότερους (τους καλούς) οδηγούς. Ένας τέτοιος οδηγός **παρακολουθεί** τακτικά την ταχύτητα του αυτοκινήτου με την βοήθεια του οργάνου ένδειξης και **διορθώνει** ανάλογα: Αν η ταχύτητα ξεπερνά την **επιθυμητή τιμή** τότε μειώνει το γκάζι και αντίστροφα. Το όλο σύστημα φαίνεται διαγραμματικά στο Σχήμα 5.

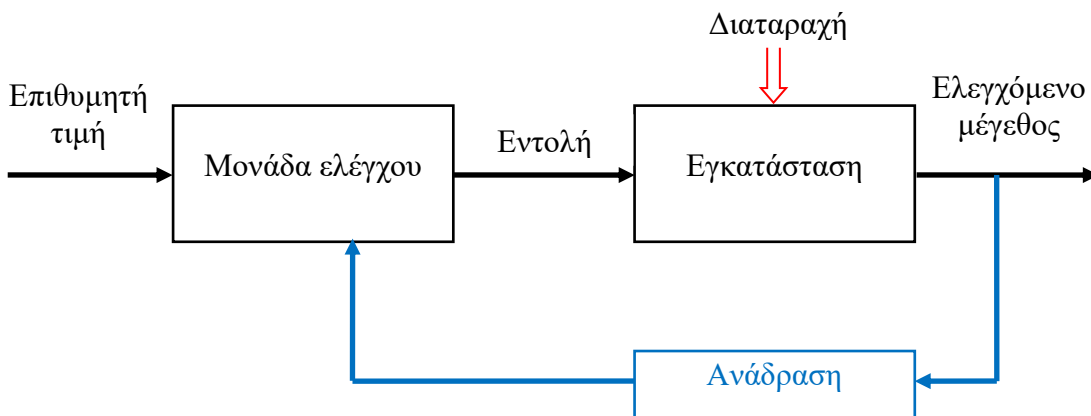
Το σύστημα του Σχήματος 4 αντιπροσωπεύει μια σειρά οδηγούς: Αυτούς που άπαξ και η ταχύτητα φτάσει μια τιμή 'ξεχνούν' να κοιτάζουν το όργανο ένδειξης. Η ταχύτητα παραμένει όμως τότε σταθερή; Το πεντάλ βρίσκεται σε συγκεκριμένη θέση, αλλά επειδή το αυτοκίνητο αντιμετωπίζει **μεταβαλλόμενα φορτία** - ανηφόρα, κατηφόρα, άνεμο - η ταχύτητα αλλάζει ανάλογα. Ένα τέτοιο σύστημα είναι ένα **σύστημα ελέγχου** (ταχύτητας εν προκειμένω) **ανοικτού βρόχου**.

Αντιθέτως στο σύστημα του Σχήματος 5, η πληροφορία για το μέγεθος της ταχύτητας **επανατροφοδοτείται** και χρησιμοποιείται από τον οδηγό για την καλή ρύθμιση της. Σχηματίζεται κατ' αυτό τον τρόπο ένας **κλειστός βρόχος** και για τον λόγο αυτό τα συστήματα αυτά ονομάζονται **συστήματα κλειστού βρόχου**. Η πληροφορία για την τιμή της ταχύτητας που χρησιμοποιείται από το σύστημα για την καλή του ρύθμιση ονομάζεται **ανάδραση**.



Σχήμα 5

Μπορούμε να πούμε τώρα ότι το γενικό σχήμα κάθε συστήματος ελέγχου κλειστού βρόγχου, είναι αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6

Η μονάδα ελέγχου παρακολουθεί συνεχώς την **πραγματική τιμή** του ελεγχόμενου μεγέθους με την βοήθεια της ανάδρασης. Εδώ απαιτούνται αισθητήρια όργανα διότι προφανώς πρόκειται για **διαδικασία μέτρησης**. Η πραγματική τιμή συγκρίνεται με την **επιθυμητή τιμή** του ελεγχόμενου μεγέθους και στη συνέχεια δίδεται κατάλληλη **εντολή διόρθωσης** στην εγκατάσταση. Η μονάδα ελέγχου μπορεί να είναι **μηχανική** (σπάνιο πλέον), **ηλεκτρονική** (λιγότερο σπάνιο) ή κάποιος **τύπος Η/Υ** (μοντέρνο κι σύνηθες πλέον).

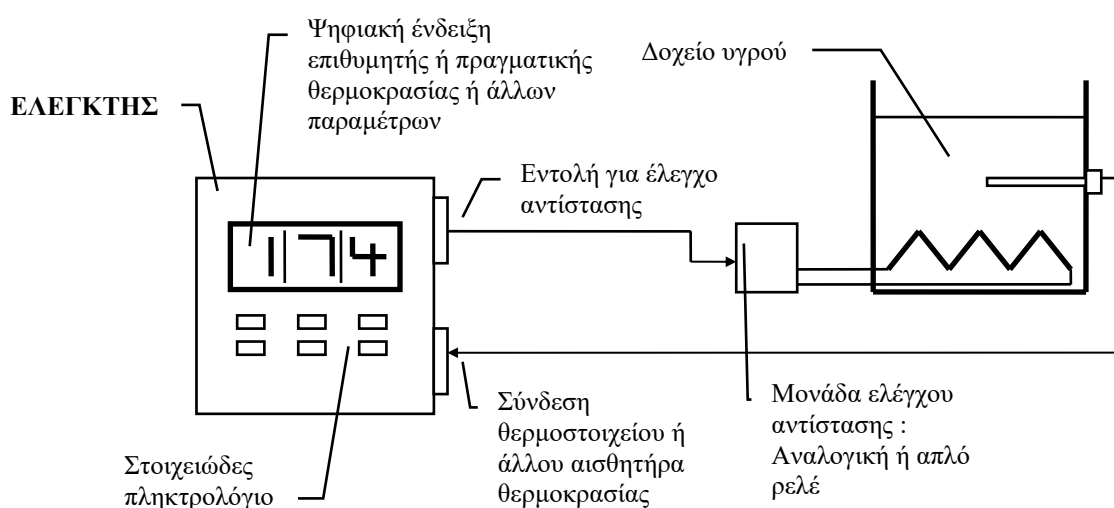
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ

Έλεγχος θερμοκρασίας

Πρόκειται για το πλέον διαδεδομένο σύστημα κλειστού βρόχου. Το συναντά κανείς κατά κόρο σε μηχανές, σε βιομηχανικές εγκαταστάσεις αλλά και στα κτίρια. Είναι επίσης, μάλλον το ευκολότερο να υλοποιηθεί και ρυθμισθεί.

Στο Σχήμα 7, φαίνεται ένα τέτοιο σύστημα ρύθμισης θερμοκρασίας δοχείου που περιέχει κάποιο υγρό. Χρησιμοποιείται θερμαντική αντίσταση και κάποια μονάδα ελέγχου της ροής ισχύος προς την αντίσταση. Η μονάδα αυτή μπορεί να είναι ένα απλό ρελέ που ανοιγοκλείνει κατάλληλα ή μια συσκευή με ηλεκτρονικούς διακόπτες ισχύος (τρανζίστορ ή θυρίστορ). Απαιτείται βεβαίως αισθητήρας θερμοκρασίας.

Για την υλοποίηση του ελέγχου, υπάρχουν διαθέσιμοι ελεγκτές σε μεγάλη ποικιλία. Οι εν λόγω **ελεγκτές θερμοκρασίας**, «κλείνουν» ουσιαστικά τον βρόχο ελέγχου όπως φαίνεται στο σχήμα. Διαθέτουν δηλαδή είσοδο για σύνδεση του αισθητήρα και έξοδο για έλεγχο της μονάδας ισχύος της αντίστασης.



Σχήμα 7



διαδικασίας.

Οι ελεγκτές αυτοί διαθέτουν ένα μικροελεγκτή ο οποίος είναι προγραμματισμένος να **υλοποιεί κάποια ή κάποιες μεθόδους ελέγχου**. Διαθέτουν επίσης μικρή οθόνη για ένδειξη επιθυμητής ή πραγματικής θερμοκρασίας και άλλων παραμέτρων καθώς και στοιχειώδες πληκτρολόγιο για εισαγωγή επιθυμητής θερμοκρασίας και παραμέτρων ρύθμισης.

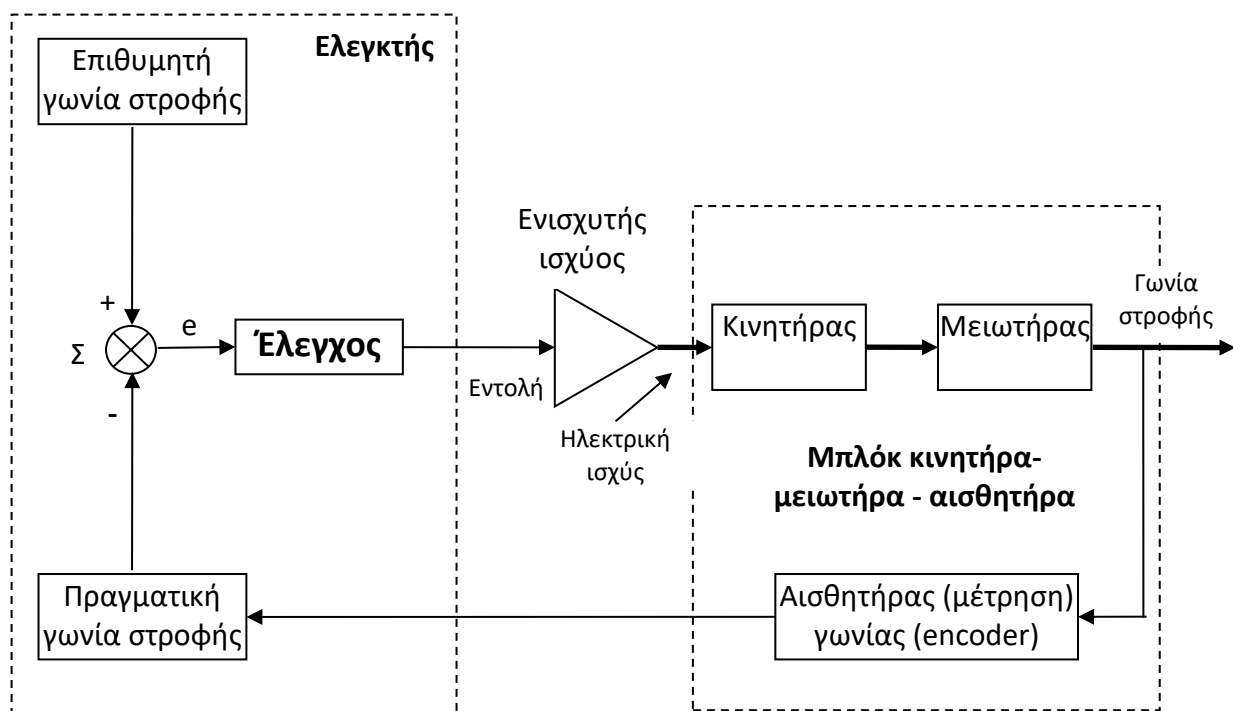
Ο έλεγχος μπορεί να υλοποιηθεί και με την βοήθεια οποιουδήποτε γενικής χρήσης Η/Υ. Πολύ συνηθισμένο στην βιομηχανία είναι να χρησιμοποιείται κάποιο PLC για έλεγχο θερμοκρασιών σε διάφορα σημεία μια παραγωγικής

Σερβοσυστήματα

Σερβοσύστημα είναι ένα σύστημα που είναι σε θέση να ελέγχει μετατόπιση, ταχύτητα και επιτάχυνση. Διαθέτουν :

- Επενεργητή για την «παραγωγή» της μετατόπισης
- Αισθητήρα για την μέτρηση της μετατόπισης
- Μονάδα που ελέγχει την ροή ισχύος προς τον επενεργητή
- Ελεγκτή

Στην πλέον συνηθισμένη τους μορφή (Σχήμα 8) ο επενεργητής είναι ηλεκτρικός κινητήρας με ενσωματωμένο μειωτήρα και κωδικοποιητή γωνιακής θέσης (encoder), η μονάδα ισχύος, ενισχυτής ισχύος εν προκειμένω, αποτελείται από ηλεκτρονικά στοιχεία ισχύος και φυσικά υπάρχει κατάλληλος ελεγκτής ο οποίος είναι σε θέση, προγραμματιζόμενος, να υλοποιήσει πολλές μεθόδους ελέγχου.



Σχήμα 8

Τα σεβοσυστήματα αποτελούν τον πυρήνα κάθε ρομποτικού συστήματος και κάθε μηχανής αριθμητικού ελέγχου (CNC). Χρησιμοποιούνται επίσης ευρύτατα σε πλήθος αυτόματων μηχανών παντός τύπου στις οποίες είναι επιθυμητό να ελέγχεται με ακρίβεια κάποια ή κάποιες κινήσεις.

Μικρό ιπτάμενο όχημα (drone)



Τα μικρού μεγέθους ιπτάμενα οχήματα και ειδικά η κατηγορία των τετρακόπτερων (quadcopters) έχουν γίνει πολύ φθηνά και αξιόπιστα τα τελευταία χρόνια. Η «άνθηση» αυτή οφείλεται αφ' ενός στις καλύτερες μπαταρίες που απαιτούνται για την κίνηση των ηλεκτρικών κινητήρων και αφ' ετέρου στα γυροσκόπια χαμηλού κόστους και καλής αξιοπιστίας που υπάρχουν διαθέσιμα. Οι ίδιες ως άνω τεχνολογίες ωθούν και την ανάπτυξη μεγαλύτερων ιπτάμενων οχημάτων μεγέθους μικρού αυτοκινήτου που δεν

έχουν απαγορευτικό κόστος.

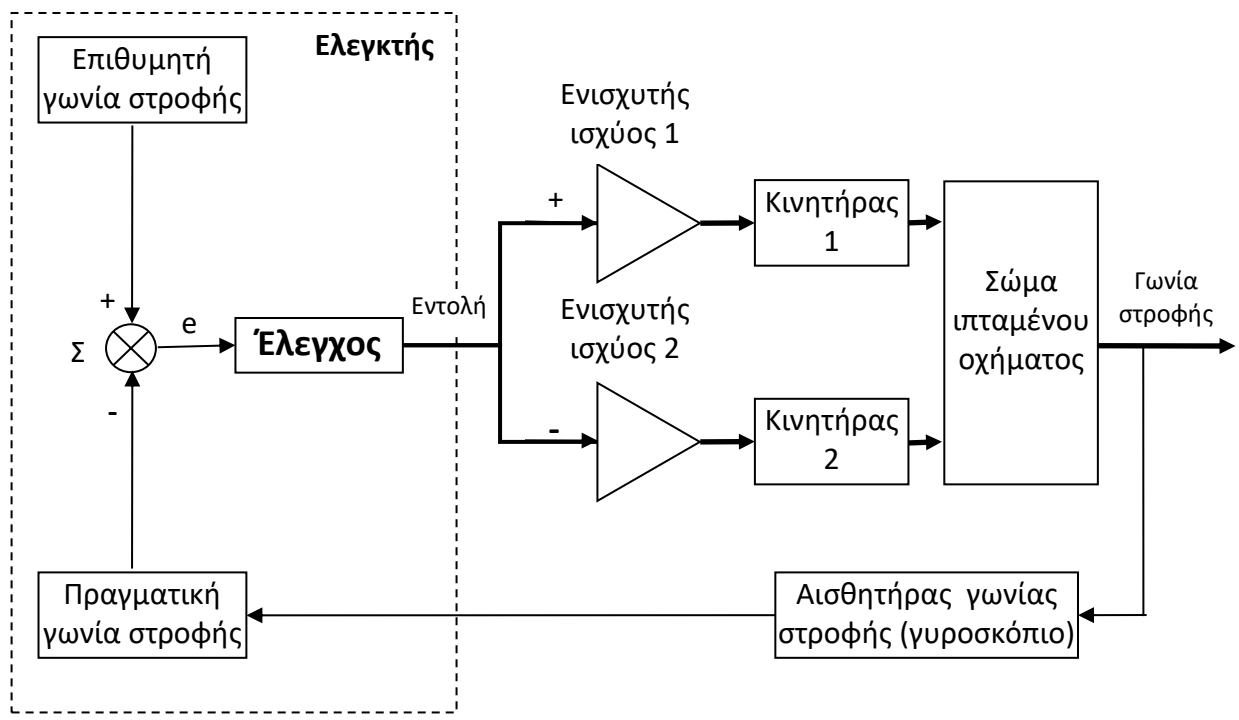
Φυσικά, τα ιπτάμενα αυτά οχήματα **χρειάζονται απαραίτητως ένα καλό σύστημα ελέγχου**. Το σύστημα αυτό πρέπει να ελέγχει τους ηλεκτρικούς κινητήρες κατά τρόπο που το όχημα να μπορεί να αιωρείται σε οριζόντια θέση, πράγμα καθόλου αυτονόητο αν σκεφτεί κανείς ότι το βάρος δεν

μπορεί να είναι ποτέ «ισοκατανεμημένο» αλλά και τον άνεμο, που μπορεί να τείνει να το αναποδογυρίσει.

Γενικότερα, το σύστημα ελέγχου θα πρέπει να είναι σε θέση να διατηρήσει το όχημα σε οποιαδήποτε επιθυμητή από τις τρεις γωνίες που είναι ικανό να περιστραφεί ένα στερεό σώμα. Στο διπλανό σχήμα, φαίνεται μια από τις τρεις αυτές γωνίες σε ένα τετρακόπτερο, ένα όχημα δηλαδή με τέσσερις προπέλες και τους αντίστοιχους ηλεκτρικούς κινητήρες. Στο σχήμα φαίνεται μόνο το ζευγάρι

εκείνο των κινητήρων που είναι ικανό να επηρεάσει την γωνία θ . Εύκολα καταλαβαίνει κανείς, ότι αν ο κινητήρας 1 κινηθεί με μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα από τον 2, τότε η γωνία θα αυξηθεί.

Στο Σχήμα 9, φαίνεται ένα σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου και για τους δύο κινητήρες το οποίο είναι σε θέση να ελέγξει την γωνία στροφής θ . Το μέγεθος αυτό πρέπει να μετριέται συνεχώς και για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται κατάλληλο γυροσκόπιο ενσωματωμένο στο σώμα της κατασκευής. Ο ελεγκτής υλοποιεί την απαραίτητη μέθοδο ελέγχου και «παράγει» την εντολή προς τους κινητήρες. Παρατηρείστε εδώ, ότι πρόκειται για μια «διαφορική εντολή». Ένα σήμα δηλαδή που όσο αυξάνει την εντολή στον ένα κινητήρα, τόσο την μειώνει στον άλλο. Αυτό είναι απαραίτητο και για άλλο λόγο. Μπορείτε να φαντασθείτε για ποιόν;



Σχήμα 9

ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΡΙΩΝ ΟΡΩΝ : ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΣ – ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ - ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ

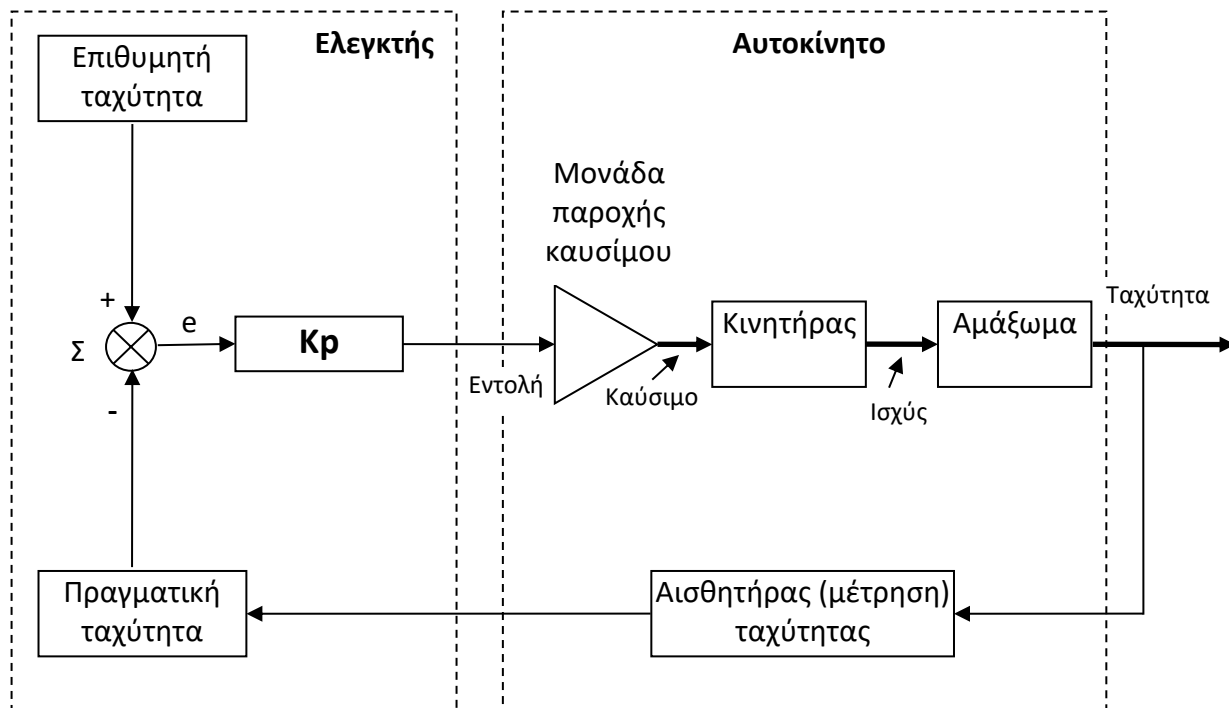
Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα μας απασχολήσει το τι κάνει η μονάδα ελέγχου. Τι είδους δράσεις αναλαμβάνει προκειμένου να **διατηρεί το ελεγχόμενο μέγεθος όσο γίνεται πλησιέστερα στην επιθυμητή τιμή** ανεξάρτητα από απρόβλεπτες αλλαγές στο περιβάλλον ή την ίδια την εγκατάσταση. Τις απρόβλεπτες αυτές μεταβολές τόσο σε μέγεθος όσο και σε διάρκεια ονομάζονται στην ορολογία των συστημάτων ελέγχου **διαταραχές**.

Στα χρόνια πριν την ύπαρξη των Η/Υ υπήρχαν συστήματα αυτομάτου ελέγχου, που δούλευαν πολύ καλά μάλιστα. Είχαν αναπτυχθεί για το σκοπό αυτό συγκεκριμένες **δράσεις ελέγχου** - που υποδείχθηκαν βασικά από μαθηματική ανάλυση της συμπεριφοράς των αυτομάτων συστημάτων - και που μπορούσαν εύκολα να υλοποιηθούν από στοιχεία τόσο μηχανικά όσο και κυρίως ηλεκτρονικά. Ο πλέον δημοφιλής τρόπος ελέγχου που χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα - υλοποιούμενος από Η/Υ - είναι ο λεγόμενος **έλεγχος τριών όρων : Αναλογικός - Ολοκληρωτικός - Διαφορικός**.

Θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε την λειτουργία των τριών αυτών όρων, στο παράδειγμα του (αυτομάτου πλέον) ελέγχου ταχύτητας αυτοκινήτου (cruise control), με το οποίο ξεκινήσαμε.

1. Αναλογικός έλεγχος (Proportional Control)

Στο σχήμα 10, φαίνεται το αυτοκίνητο σε αναπαράσταση «κουτιών» (blocks), λειτουργικών μονάδων δηλαδή συνδεδεμένων μεταξύ τους. Μια τέτοια αναπαράσταση, που θα την λέμε «μπλόκ διάγραμμα», μας είναι χρήσιμη στην ανάλυση των Συστημάτων Ελέγχου. Φαίνεται επίσης σχεδιασμένος με τον ίδιο τρόπο, ένας Ελεγκτής (Controller). Ο εν λόγω ελεγκτής είναι ένας Η/Υ κατάλληλης μορφής, συνήθως κάποιος μικροελεγκτής.



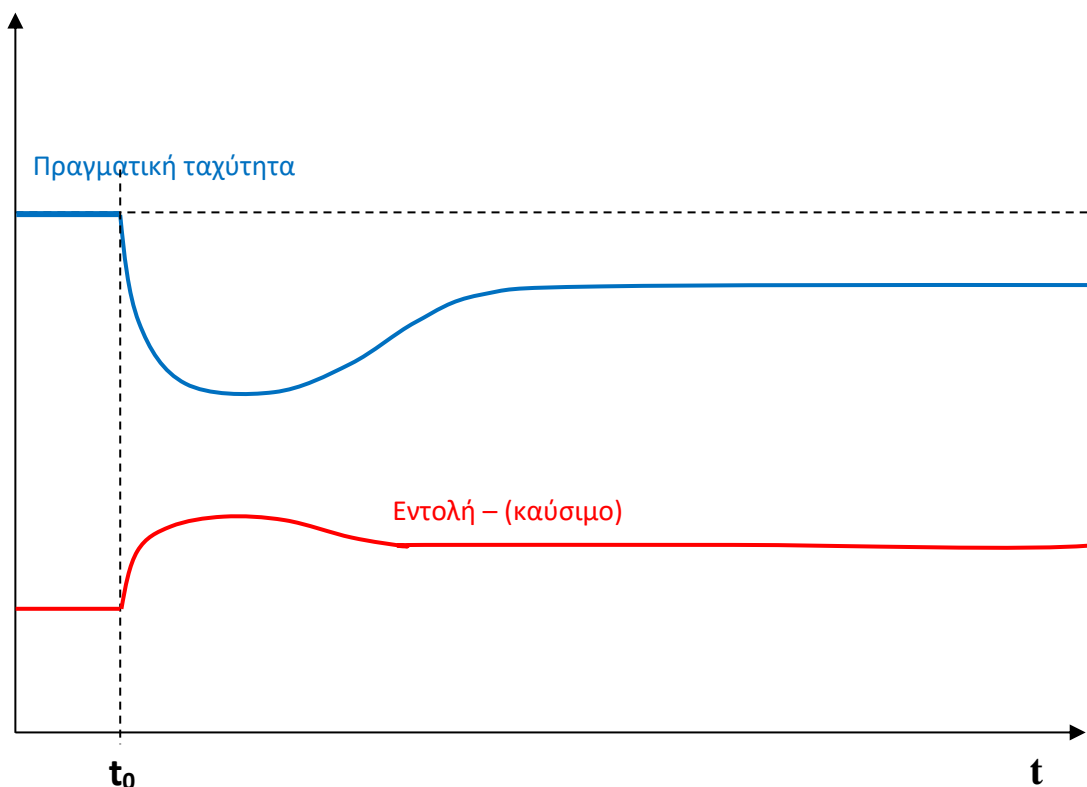
Σχήμα 10

Ο συγκεκριμένος ελεγκτής, όπως και κάθε ελεγκτής που υλοποιεί σύστημα κλειστού βρόχου, εκτελεί τις παρακάτω εργασίες :

- Παρακολουθεί «συνεχώς» το μέγεθος που επιθυμεί να ρυθμίσει – στο παράδειγμά μας την ταχύτητα του αυτοκινήτου
- Το συγκρίνει με την επιθυμητή τιμή του μεγέθους αυτού
- Επεξεργάζεται τις πληροφορίες αυτές και
- Παράγει την κατάλληλη Εντολή προς την εγκατάσταση, ώστε αυτή να αντιδράσει κατά τέτοιο τρόπο ώστε το ελεγχόμενο μέγεθος να αποκτήσει όσο γίνεται γρηγορότερα την επιθυμητή τιμή.

Ο αναλογικός ελεγκτής ή αλλιώς η αναλογική δράση ελέγχου, το μόνο που κάνει είναι να **πολλαπλασιάζει την τιμή του σφάλματος** (την διαφορά δηλαδή της επιθυμητής από την πραγματική τιμή) **με κάποιον αριθμό K_p** , που θα ονομάζομε **κέρδος** του αναλογικού ελεγκτή. Η εντολή προς την εγκατάσταση είναι το αποτέλεσμα αυτού του πολλαπλασιασμού. Η ιδέα είναι απλή : Όσο περισσότερο απέχει το επιθυμητό αποτέλεσμα από το πραγματικό, όσο πιο μεγάλο είναι δηλαδή το σφάλμα, τόσο πιο μεγάλη εντολή πρέπει να φτάσει στην εγκατάσταση για να διορθώσει το σφάλμα αυτό. Στην περίπτωση μας, όσο πιο πολύ απέχει η επιθυμητή ταχύτητα από την πραγματική, τόσο περισσότερα καύσιμα πρέπει να φτάσει στην μηχανή. Έστω τώρα ότι η ταχύτητα του αυτοκινήτου ελέγχεται με τον παραπάνω τρόπο. Έστω ακόμη, ότι αυτό κινείται με μια κάποια ταχύτητα και την χρονική στιγμή t_0 ο δρόμος γίνεται ανηφορικός. Τότε φυσικά η ταχύτητα θα αρχίσει να μειώνεται. Αυτό θα γίνει αμέσως αντιληπτό από τον ελεγκτή μέσω της ανάδρασης, οπότε το σφάλμα θα αυξηθεί και κατά συνέπεια η εντολή – καύσιμα προς την μηχανή.

Στο σχήμα 11, φαίνονται ποιοτικά αυτές οι μεταβολές.



Σχήμα 11

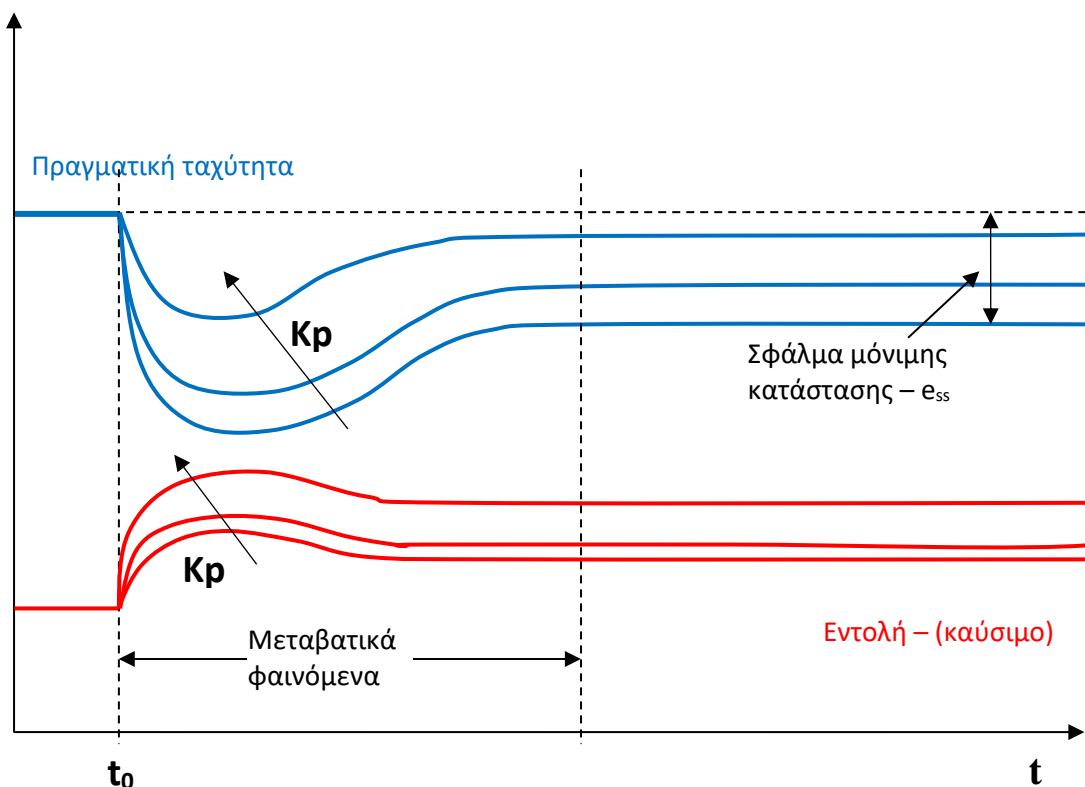
Ο ελεγκτής δηλαδή, αντιλήφθηκε την πτώση της ταχύτητας και αντέδρασε σωστά. Μπορεί κανείς εύκολα να καταλάβει, ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός K_p , τόσο η εντολή θα είναι μεγαλύτερη για τις ίδιες τιμές του σφάλματος. Αυτό σημαίνει πρακτικά, ότι μικρή απόκλιση από την επιθυμητή τιμή θα δημιουργεί **μεγάλη εντολή**, θα κάνει δηλαδή το όλο σύστημα να **αντιδρά γρήγορα**.

Στο Σχήμα 12, φαίνονται ποιοτικά και πάλι αυτές οι διαφορετικές «συμπεριφορές» αναλόγως της τιμής του κέρδους K_p .

Ας δούμε τώρα κάτι επίσης σημαντικό: Ας υποθέσουμε ότι το αυτοκίνητο συνεχίζει να ανεβαίνει την ίδια ανηφόρα. Η ταχύτητά του, με την βοήθεια του συστήματος κλειστού βρόχου, θα βρει μια νέα τιμή και θα παραμείνει σ' αυτήν. Αυτή η νέα τιμή θα είναι όση και πριν την ανηφόρα; Με την συγκεκριμένη δράση ελέγχου, τον απλό δηλαδή αναλογικό έλεγχο, η απάντηση είναι ΟΧΙ. Θα υπάρχει πάντα αυτό που ονομάζομαι **σφάλμα μόνιμης κατάστασης (steady state error - e_{ss})**, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Αυτό μπορεί να το καταλάβει κανείς κοιτάζοντας το μπλόκ διάγραμμα : Αν η επιθυμητή τιμή γίνει ίση με την πραγματική, τότε το σφάλμα γίνεται μηδέν, άρα και η εντολή μηδέν, άρα και το καύσιμο προς τον κινητήρα μηδενίζεται. Δηλαδή το αυτοκίνητο κινείται στην ανηφόρα χωρίς καύσιμο : ΑΤΟΠΟ!

Σχήμα 12



Δυστυχώς δηλαδή, με τον συγκεκριμένο τύπο ελέγχου, μας χρειάζεται πάντα κάποιο σφάλμα. Αυτό που μπορούμε να παρατηρήσουμε προς το παρόν, είναι ότι **όσο μεγαλύτερο είναι το κέρδος K_p τόσο μικρότερο είναι αυτό το σφάλμα**.

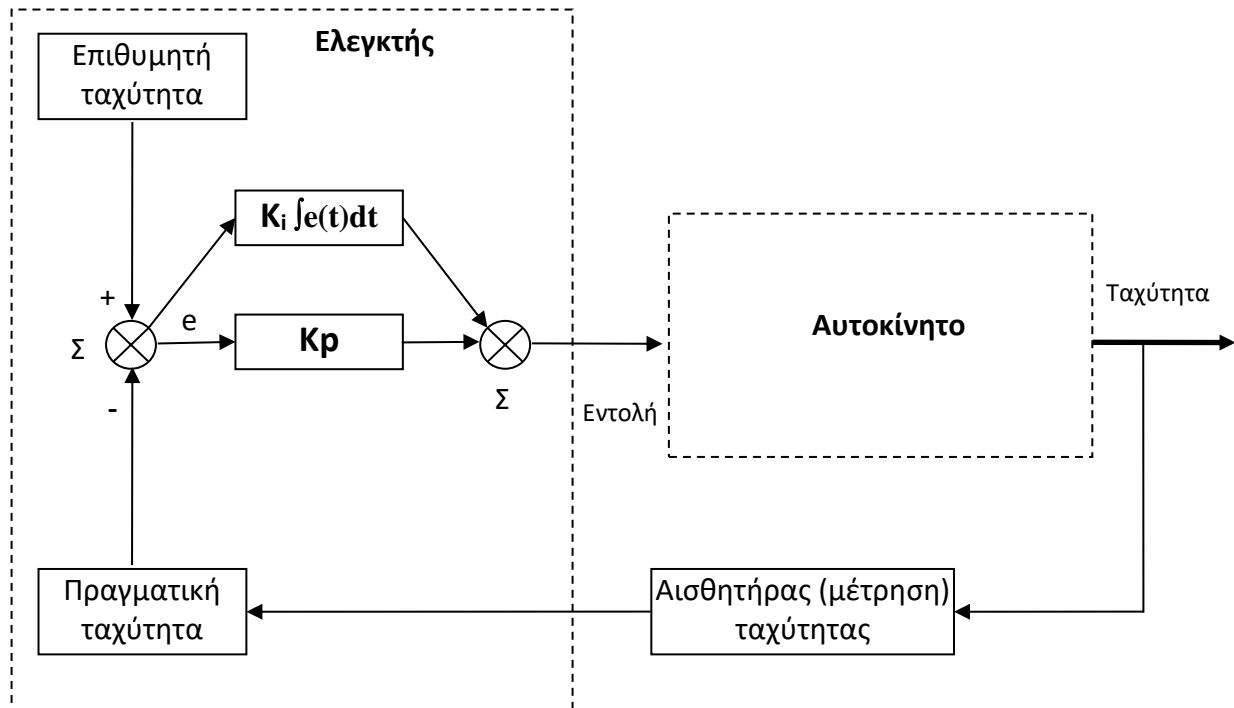
2. Αναλογικός + Ολοκληρωτικός Έλεγχος (Proportional + Integral Control)

Από την ανάλυση της δράσης του αναλογικού ελέγχου προέκυψε το συμπέρασμα ότι η ρύθμιση της ελεγχόμενης ποσότητας δεν είναι και τόσο καλή αφού για τα περισσότερα συστήματα - εκτός μιας κατηγορίας¹ - υπάρχει **σφάλμα μόνιμης κατάστασης**. Σε πολλά συστήματα αυτομάτου ελέγχου, έστω και μικρό τέτοιο σφάλμα είναι ανεπιθύμητο. Γι' αυτό το λόγο κυρίως υπάρχει η ολοκληρωτική δράση ελέγχου ή **ολοκληρωτικός έλεγχος**, ο οποίος έχει την ιδιότητα να **καταστέλλει το σφάλμα μόνιμης κατάστασης στο μηδέν**. Ο ολοκληρωτικός έλεγχος δεν εφαρμόζεται ποτέ από μόνος του, αλλά σε συνδυασμό τουλάχιστον με τον αναλογικό.

Η ολοκληρωτική δράση ελέγχου δημιουργεί μια **εντολή η οποία είναι ανάλογη του ολοκληρώματος του σφάλματος**. Ο συντελεστής αναλογίας K_i ονομάζεται κέρδος του ολοκληρωτικού όρου. Η εντολή αυτή προστίθεται σε αυτή που δημιουργεί η αναλογική ή η οποιαδήποτε άλλη δράση ελέγχου, ώστε να προκύψει η συνολική εντολή ρύθμισης.

$$\text{Εντολή} = K_p * e(t) + K_i * \int e(t)dt$$

¹ Ένα σύστημα ελέγχου γωνιακής θέσης π.χ. που δεν αντιμετωπίζει σταθερά φορτία δεν έχει σφάλμα μόνιμης κατάστασης.



Σχήμα 13

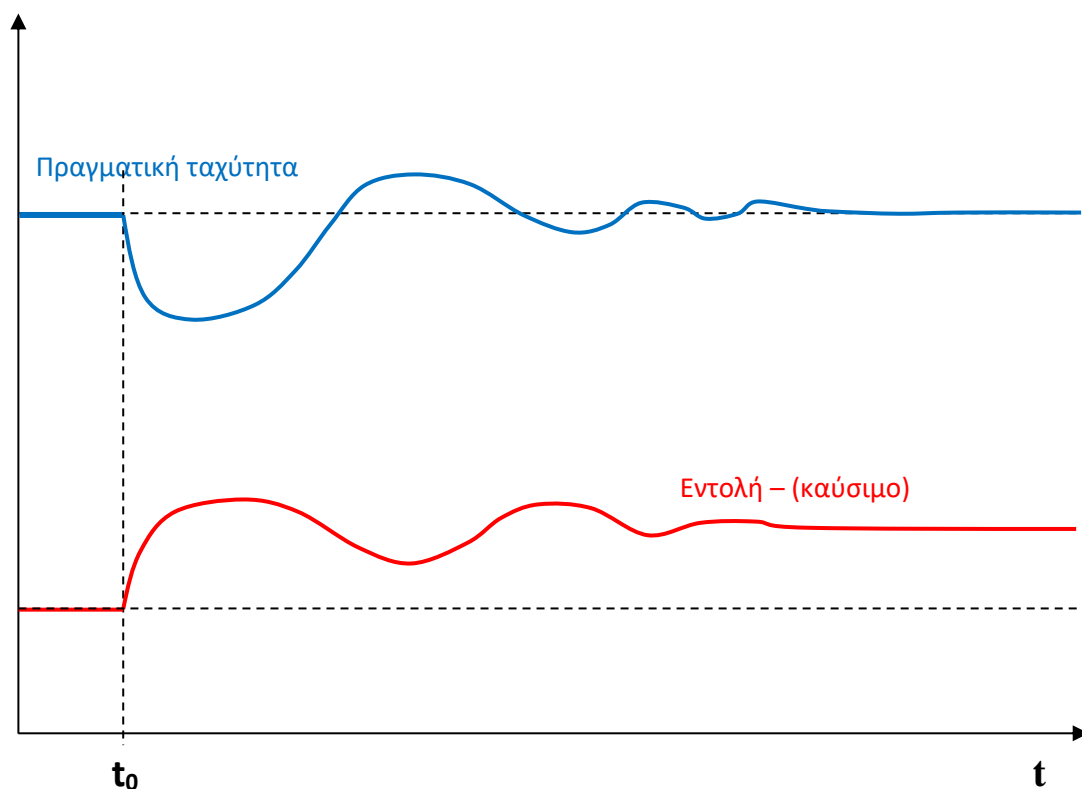
Πως θα δράσει τώρα ο νέος αυτός ολοκληρωτικός όρος; Μπορούμε να θυμηθούμε από τα μαθηματικά, ότι το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης, εν προκειμένω της συνάρτησης του σφάλματος (συνάρτηση του χρόνου), είναι το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και του άξονα της ανεξάρτητης μεταβλητής. Μπορεί κανείς να παρατηρήσει, ότι παρεχόμενου του χρόνου το εμβαδόν θα αυξάνει², εκτός αν το σφάλμα γίνει κάποια στιγμή μηδέν, οπότε σταθεροποιείται – σχήμα 14.



Σχήμα 14

² Υπάρχει και η ειδική περίπτωση βέβαια το σφάλμα να κάνει αρμονική ταλάντωση, οπότε το εμβαδόν αυξομειώνεται συνεχώς. Πάντως αυτή είναι μια κατάσταση έτσι κι αλλιώς ανεπιθύμητη : σύστημα ταλαντωτικό.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ζητούμε από το σύστημα μια επιθυμητή ταχύτητα και ότι αυτό, μετά το μεταβατικό φαινόμενο, βρίσκει μια κατάσταση ισορροπίας. Στη κατάσταση αυτή ούτε η πραγματική τιμή μεταβάλλεται άρα ούτε και το σφάλμα ούτε και η εντολή προς την εγκατάσταση. Αυτό σημαίνει ότι και το ολοκλήρωμα έχει πάρει μια σταθερή τιμή, άρα σύμφωνα με τα παραπάνω **το σφάλμα είναι αναγκαστικά μηδέν (Σχήμα 15)! Σε κάθε περίπτωση, ανεξάρτητα των όποιων διαταραχών.**



Σχήμα 15

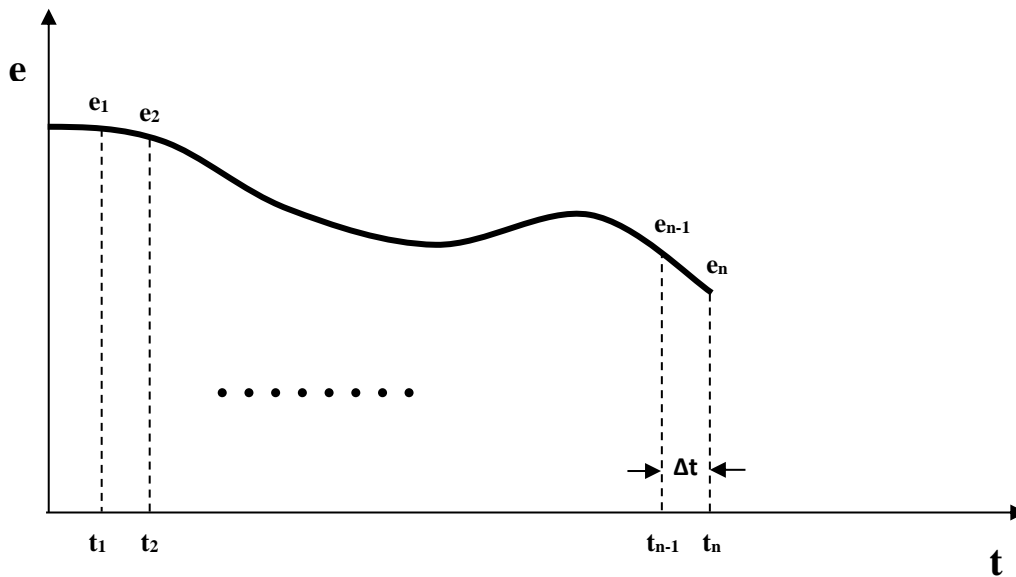
Η εισαγωγή του ολοκληρωτικού όρου, λύνει βεβαίως το πρόβλημα του σφάλματος μόνιμης κατάστασης - αφού το κάνει πάντα μηδέν - αλλά συνήθως **επιδεινώνει** την κατάσταση από την άποψη της **ευστάθειας** - **το σύστημα δηλαδή είναι τώρα πιο πιθανόν να οδηγηθεί σε ταλαντώσεις** - Σχήμα 15. Έτσι τώρα πρέπει σχεδόν πάντα να μειώνεται το κέρδος K_p του αναλογικού όρου.

Για την σωστή λειτουργία του συστήματος ελέγχου, πρέπει τώρα να επιλεγεί κατάλληλα το ζευγάρι των παραμέτρων (αριθμών) K_p και K_i . Θα δούμε αργότερα μεθόδους να κάνει κανείς κάτι τέτοιο με συστηματικό τρόπο. Προς το παρόν πρέπει να κάνουμε την παρατήρηση, ότι όσο μεγαλύτερο είναι το κέρδος K_i , τόσο πιο γρήγορα «αναπτύσσεται» η εντολή του ολοκληρωτικού όρου και άρα το σύστημα «καταστέλλει» το σφάλμα μόνιμης κατάστασης γρήγορα. Γρήγορη αντίδραση όμως, μπορεί και πάλι να οδηγήσει σε ανεπιθύμητες ταλαντώσεις.

Αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος

Για την υλοποίηση του ελέγχου, όπως έχει αναφερθεί, χρησιμοποιείται κάποιου είδους Η/Υ. Η εντολή προς το σύστημα υπολογίζεται και ανανεώνεται κάθε Δt mseconds. Ο χρόνος αυτός ονομάζεται **χρόνος δειγματοληψίας και ελέγχου**. Γενικά, όσο μικρότερος είναι ο χρόνος αυτός, τόσο καλύτερα. Με την σημερινή στάθμη της τεχνολογίας των Η/Υ αυτός ο χρόνος μπορεί να γίνει

πάρα πολύ μικρός. Για τα μηχανικά συστήματα που μας ενδιαφέρουν, αν το Δt είναι της τάξης του 1 msecond είναι υπερ-επαρκές.



Σχήμα 16

Το (ορισμένο) ολοκλήρωμα του σφάλματος από χρόνο t_{n-1} μέχρι χρόνο t_n είναι περίπου ίσο με το εμβαδόν του σχετικού τραπεζίου (Σχήμα 16) :

$$(e_{n-1} + e_n) \Delta t / 2$$

Το ολοκλήρωμα από την έναρξη του ελέγχου μέχρι τον χρόνο t_n (n -οστή περίοδος ελέγχου), δίδεται από τον αναδρομικό τύπο :

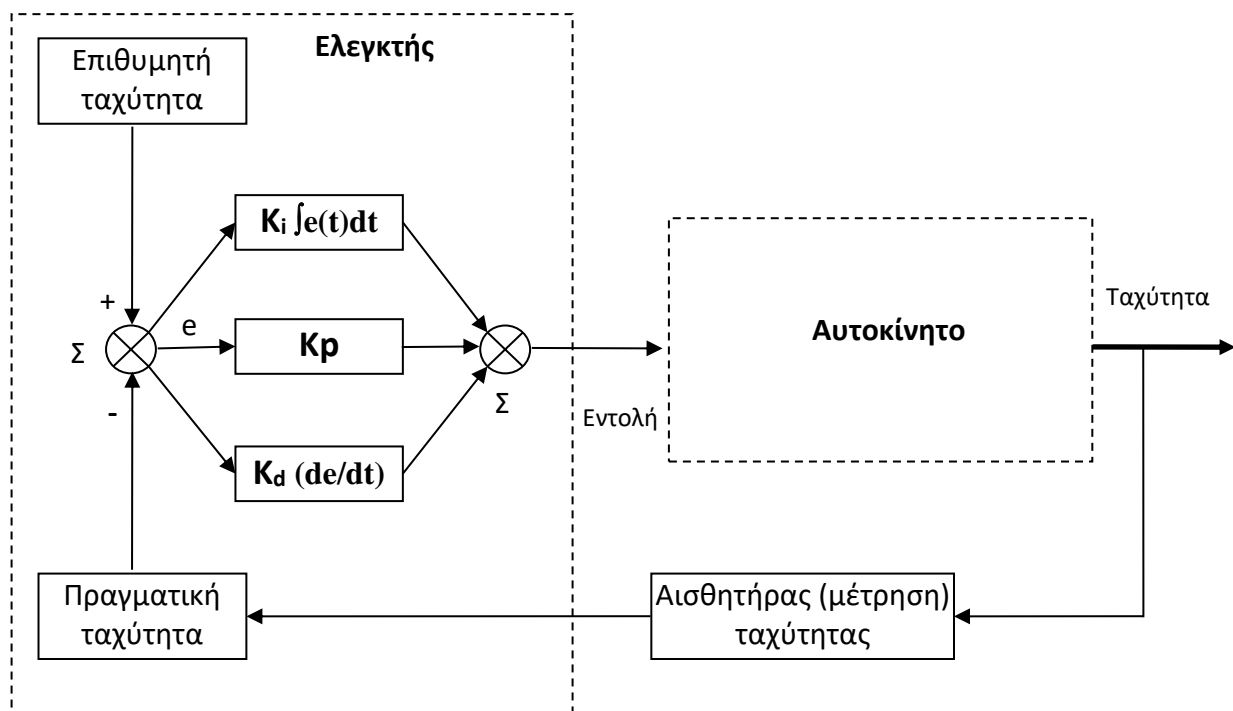
$$I_n = I_{n-1} + (e_{n-1} + e_n) \Delta t / 2$$

Ο Ελεγκτής (που μην ξεχνάμε είναι H/Y), γνωρίζει την τιμή του σφάλματος e_n την τρέχουσα χρονική στιγμή, έχει κρατήσει στην μνήμη και την τιμή e_{n-1} (σφάλμα την προηγούμενη χρονική στιγμή), οπότε υπολογίζει την ποσότητα $(e_{n-1} + e_n) \Delta t / 2$. Στην συνέχεια, με την βοήθεια του αναδρομικού τύπου, υπολογίζει το I_n ανά πάσα χρονική στιγμή – όταν ξεκινά ο έλεγχος $I_0 = 0$.

3. Διαφορικός έλεγχος – (Derivative Control)

Θεωρώντας τον αναλογικό ως τον βασικό τύπο ελέγχου, όπως αναλύσαμε στα προηγούμενα, ολοκληρωτικός έλεγχος μπορεί να προστεθεί προκειμένου να εξαλειφθεί το σφάλμα μόνιμης κατάστασης. Όπως όμως αναφέρθηκε, αυτό μπορεί να αποβεί σε βάρος της ευστάθειας του συστήματος. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν επιθυμούμε γρήγορη απόκριση σε είσοδο ή γρήγορη καταστολή των διαταραχών - δηλαδή μεγάλο κέρδος - τότε πιθανόν το σύστημα να οδηγηθεί σε ταλαντώσεις, πράγμα παντελώς ανεπιθύμητο.

Ένας τρίτος τύπος ελέγχου εφαρμόζεται επιπρόσθετα σ' αυτή την περίπτωση προκειμένου να βελτιωθεί η ευστάθεια του συστήματος: Ο **διαφορικός έλεγχος**. Η εντολή που παράγει ο συγκεκριμένος τύπος ελέγχου είναι **ανάλογη της παραγώγου του σφάλματος στον χρόνο**. Ο συντελεστής αναλογίας K_d , **ονομάζεται κέρδος του διαφορικού όρου**.



Σχήμα 17

Αντιλαμβάνεται κανένας ότι ο διαφορικός έλεγχος έχει την ιδιότητα να **λαμβάνει υπ' όψη μεταβολές του σφάλματος**. Όταν δηλαδή το σφάλμα μεταβάλλεται με **ταχύ ρυθμό**, ο ελεγκτής δίνει **"μεγάλη" εντολή**, έτσι που η εγκατάσταση να ρυθμισθεί γρήγορα. Τελικά βέβαια ο **διαφορικός έλεγχος βελτιώνει την ευστάθεια του συστήματος**. Έτσι επιτρέπει στο αναλογικό κέρδος να πάρει μεγαλύτερες τιμές (από το αν υπήρχε μόνο αναλογικός έλεγχος) και έτσι να αυξηθεί η ταχύτητα απόκρισης.

Ο διαφορικός έλεγχος έχει το **μειονέκτημα ότι ενισχύει το θόρυβο** όταν αυτός υπάρχει στο σήμα του σφάλματος. Αυτό μπορεί να αποβεί καταστροφικό για ένα σύστημα ελέγχου. Γι' αυτό πρέπει να αποφεύγεται όταν τα σήματα στο σύστημα έχουν θόρυβο.

Αριθμητικός υπολογισμός της παρανώγου

Μια προσέγγιση 1^{ης} τάξης της παραγώγου της συνάρτησης σφάλματος την χρονική στιγμή t_n (Σχήμα 16) δίδεται από τον τύπο :

$$(de/dt)_n = (e_n - e_{n-1}) / \Delta t$$

4. Αναλογικός – Ολοκληρωτικός – Διαφορικός Έλεγχος (P . I . D . Control)

Αναλύσαμε στα προηγούμενα ότι κάθε τύπος ελέγχου συνεισφέρει κατά συγκεκριμένο τρόπο στην συμπεριφορά ενός συστήματος . Ο ελεγκτής ο οποίος είναι σε θέση να συνδυάσει και τις τρεις βασικές αυτές μορφές ελέγχου , ονομάζεται **αναλογικός - ολοκληρωτικός - διαφορικός ελεγκτής (P.I.D. Controller)**. Χρησιμοποιείται συνήθως στις εγκαταστάσεις που υπόκεινται σε ξαφνικές και μεγάλες διαταραχές, εκεί δηλαδή που δεν θα επαρκούσε ελεγκτής δύο όρων .

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει συνοπτικά την **επίδραση μια αύξησης των παραμέτρων των τριών όρων**, δηλαδή των τιμών K_p , K_i , K_d , σε τρία βασικά χαρακτηριστικά του συστήματος ελέγχου: Στην ταχύτητα με την οποία αντιδρά, στην τάση του να κάνει ταλαντώσεις και στο σφάλμα μόνιμης κατάστασης.

Παράμετρος	«Ταχύτητα αντίδρασης»	Ταλαντωτική συμπεριφορά (ευστάθεια)	Σφάλμα μόνιμης κατάστασης
$K_p \uparrow$	Αυξάνει	Χειροτερεύει	Μειώνεται
$K_i \uparrow$	Αυξάνει	Χειροτερεύει	Εξαλείφεται
$K_d \uparrow$	Ελάχιστη επίδραση	Βελτιώνεται	Ελάχιστη επίδραση

Ρύθμιση του P.I.D. ελεγκτή ονομάζουμε την **διαδικασία επιλογής των παραμέτρων των τριών όρων**.

Απ' ευθείας εύρεση των καταλλήλων τιμών είναι γενικά δύσκολη υπόθεση. Στη φάση του σχεδιασμού του συστήματος, συνήθως χρησιμοποιούνται τεχνικές προσομοίωσης της εγκατάστασης με τη βοήθεια του υπολογιστή. Αυτό σημαίνει ότι φτιάχνεται, αν είναι δυνατόν, κάποιο μαθηματικό μοντέλο της εγκατάστασης και στη συνέχεια με τη βοήθεια δοκιμών επιλέγονται εκείνες οι τιμές των σταθερών του P.I.D. ελεγκτή που δίδουν ικανοποιητική δυναμική συμπεριφορά στο σύστημα - μοντέλο.

Αν είναι δυνατή η εύρεση μαθηματικού μοντέλου για το σύστημα τότε μπορούν να εφαρμοσθούν και καθαρά **μαθηματικές μέθοδοι ανάλυσης και στη συνέχεια σχεδιασμού** του συστήματος. Για το σκοπό αυτό υπάρχει η πολύ κομψή **Θεωρία των Συστημάτων Ελέγχου**. Με τις ευρεθείσες κατά τον ένα ή τον άλλο τρόπο τιμές των παραμέτρων γίνεται στη συνέχεια η **αρχική ρύθμιση** του ελεγκτή στην πραγματική εγκατάσταση. Η **τελική ρύθμιση (fine tuning)** θα ακολουθήσει όταν η εγκατάσταση τεθεί σε λειτουργία, έτσι που να δίδει τα βέλτιστα αποτελέσματα.

Η μέθοδος Ziegler – Nickols για την ρύθμιση του PID ελεγκτή

Πολλές φορές δεν είναι δυνατόν να υπάρξει μαθηματικό μοντέλο της εγκατάστασης, με την βοήθεια του οποίου να γίνει η ρύθμιση του PID. Επίσης, σε κάποιες εγκαταστάσεις που αντιδρούν αργά, δεν είναι και εντελώς απαραίτητο να υπάρχει ένα τέτοιο μοντέλο. Μπορεί κανείς τότε να ακολουθήσει κάποιες «ευριστικές» μεθόδους. Η πιο γνωστή από αυτές είναι η μέθοδος Ziegler – Nickols. Η διαδικασία ρύθμισης είναι η ακόλουθη :

Στον PID ελεγκτή, συνδεδεμένο με την πραγματική εγκατάσταση, θέτει κανείς $K_i = K_d = 0$ και αυξάνει σταδιακά τις τιμές του K_p , ξεκινώντας από πολύ μικρές, μέχρι να παρατηρήσει (μη

φθίνουσες ουσιαστικά) ταλαντώσεις. Έστω ότι η τιμή του κέρδους αυτού είναι K_u και η περίοδος των ταλαντώσεων T_u . Τότε, μια καλή ρύθμιση των όρων του PID, είναι η παρακάτω :

Μέθοδος ελέγχου	K_p	K_i	K_d
P	0.50 K_u	-	-
PI	0.45 K_u	0.54 K_u/T_u	-
PID	0.60 K_u	1.20 K_u/T_u	3 $K_u T_u/40$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΦΥΣΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

1. ΓΕΝΙΚΑ

Ένα αρκετά σημαντικό μέρος της θεωρίας του Αυτομάτου Ελέγχου διαπραγματεύεται την ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς των συστημάτων ελέγχου. Αυτό, αρκετά απλουστευτικά, σημαίνει ανάλυση του πως ένα σύστημα μεταβαίνει από μια κατάσταση ισορροπίας σε μια άλλη, όταν παίρνει εντολή να κάνει κάτι τέτοιο, ή του πως ένα σύστημα αντιδρά στις διαταραχές που τείνουν να το απομακρύνουν από μια θέση ισορροπίας. Η "μετάβαση" γίνεται "ομαλά" όπως είναι επιθυμητό ή το σύστημα ταλαντώνεται; Στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει τρόπος να αποφευχθούν οι ταλαντώσεις;

Το πρώτο βήμα στην ανάλυση της συμπεριφοράς ενός συστήματος Αυτομάτου Ελέγχου είναι η δημιουργία του μαθηματικού του μοντέλου».

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μοντέλο ενός φυσικού συστήματος είναι μια μαθηματική παράσταση που περιγράφει τη (δυναμική) συμπεριφορά του συστήματος. Η διαδικασία για τον προσδιορισμό του μαθηματικού μοντέλου ενός συστήματος ελέγχου είναι, η εξής :

- Καθορίζουμε τις εισόδους και τις εξόδους του συστήματος. Αυτές πρέπει να θεωρούνται πάντα συναρτήσεις του χρόνου.
- Γράφουμε τις μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν τις φυσικές μεταβλητές του συστήματος μεταξύ τους ή με τις εισόδους και εξόδους. Οι φυσικές μεταβλητές μπορεί να είναι : δυνάμεις, επιταχύνσεις, ταχύτητες, ροπές, τάσεις, ρεύματα, ισχείς κ.λ.π. , οι δε σχέσεις που τις συνδέουν δεν είναι παρά οι νόμοι της Φυσικής, σχεδόν πάντα δε γραμμένοι υπό μορφή διαφορικών εξισώσεων του χρόνου.
- Προσπαθούμε απαλείφοντας τις φυσικές μεταβλητές να καταλήξουμε σε σχέσεις που θα συνδέουν τις εισόδους με τις εξόδους.

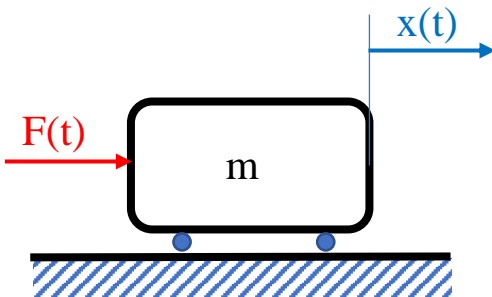
Το σύνολο αυτών των σχέσεων αποτελεί το μαθηματικό μοντέλο του φυσικού συστήματος. Στη πιο συνηθισμένη και απλή περίπτωση έχουμε συστήματα με μια είσοδο και μια έξοδο, άρα και μια τέτοια σχέση που τις συνδέει, που έχει την μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης του χρόνου. Υπάρχουν βεβαίως συστήματα με περισσότερες από μια εισόδους και εξόδους, οπότε οι διαφορικές εξισώσεις είναι περισσότερες.

2. ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΠΛΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

2.1 Στοιχεία ευθύγραμμης κίνησης

Τα βασικά μηχανικά στοιχεία που εκτελούν ευθύγραμμη κίνηση είναι : η μάζα, το ελατήριο και ο αποσβεστήρας. Στην απλούστερη μορφή του ο τελευταίος είναι ένας κύλινδρος γεμάτος λάδι, μέσα στον οποίο κινείται ένα κατάλληλα διαμορφωμένο πιστόνι.

A. Μοντέλο κίνησης μάζας που ολισθαίνει χωρίς τριβή



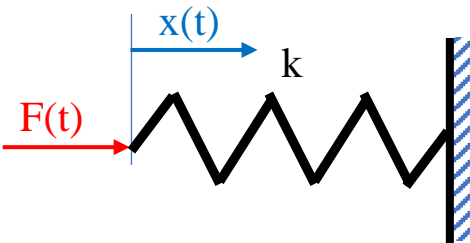
Ο Νόμος του Newton δηλαδή.

Είσοδος : Η συνισταμένη $F(t)$ των δυνάμεων επενέργειας

Έξοδος : Η μετατόπιση $x(t)$ κατά την διεύθυνση της συνισταμένης

Μαθηματικό Μοντέλο³ : $F(t) = ma(t) = m\ddot{x}(t)$

B. Μοντέλο ελατηρίου



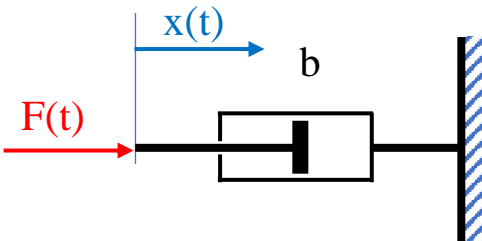
Είσοδος : Η συνισταμένη $F(t)$ των δυνάμεων επενέργειας

Έξοδος : Η μετατόπιση $x(t)$ κατά την διεύθυνση της συνισταμένης

Μαθηματικό Μοντέλο : $F(t) = kx(t)$

Ο Νόμος του Hook δηλαδή. k : Σταθερά του ελατηρίου

Γ. Μοντέλο αποσβεστήρα



Είσοδος : Η συνισταμένη $F(t)$ των δυνάμεων επενέργειας

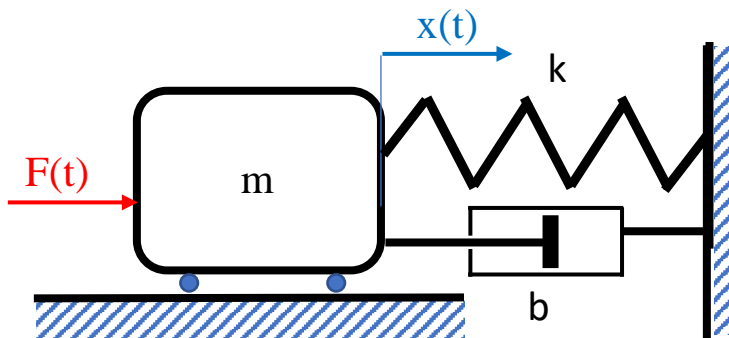
Έξοδος : Η μετατόπιση $x(t)$ κατά την διεύθυνση της συνισταμένης

Μαθηματικό Μοντέλο : $F(t) = b\dot{x}(t)$

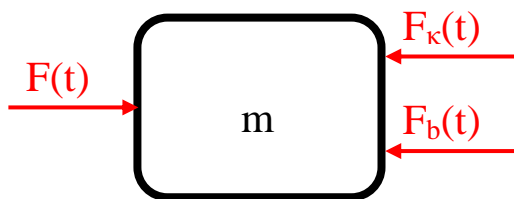
b : Σταθερά του αποσβεστήρα

³ Για τις παραγώγους του χρόνου θα χρησιμοποιούμε την τελίτσα (.) αντί του (').

Τα παραπάνω βασικά μηχανικά στοιχεία μπορούν να εμφανισθούν συνδεδεμένα μεταξύ τους με πάρα πολλούς τρόπους. Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι ένας από αυτούς.



Διάγραμμα ελεύθερου σώματος μάζας m



Η μάζα m μπορεί να ολισθήσει χωρίς τριβή, συγκρατείται από ελατήριο και αποσβεστήρα και δέχεται δυνάμεις των οποίων η συνισταμένη $F(t)$ είναι παράλληλη τόσο στο ελατήριο όσο και τον αποσβεστήρα. Θεωρούμε είσοδο στο σύστημα αυτή ακριβώς την συνισταμένη και έξοδο την μετατόπιση $x(t)$ της μάζας.

Για να προσδιορίσουμε το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος, θα γράψουμε την εξίσωση κίνησης της μάζας. Θα πρέπει να βρούμε συνεπώς την συνισταμένη των δυνάμεων που επενεργούν σ' αυτή. Στο Διάγραμμα Ελεύθερου Σώματος της μάζας (σχήμα) φαίνονται οι δυνάμεις που επενεργούν κατά την διεύθυνση της δύναμης. Οι δυνάμεις $F_k(t)$ και $F_b(t)$ είναι οι δυνάμεις που δέχεται η μάζα από το ελατήριο και τον αποσβεστήρα αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ισχύει :

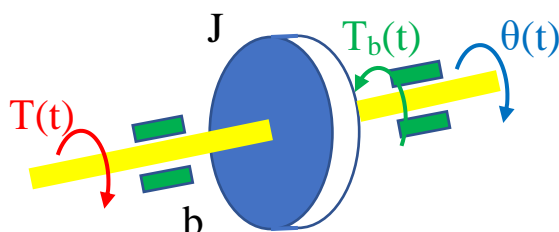
$$\sum F = m\ddot{x}(t) \Rightarrow F(t) - F_b(t) - F_k(t) = m\ddot{x}(t) \Rightarrow F(t) = m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t)$$

Η τελευταία αυτή διαφορική εξίσωση είναι το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος.

2.2 Στοιχεία περιστροφικής κίνησης

Τα βασικά μηχανικά στοιχεία περιστροφικής κίνησης, κατ' αναλογία με αυτά της ευθύγραμμης, είναι: η περιστρεφόμενη μάζα, το περιστροφικό ελατήριο και το στοιχείο ιξώδους τριβής – το τελευταίο δεν υπάρχει ως μονάδα υπάρχει όμως πάντα η ιξώδης τριβή. Ένας συνδυασμός των παραπάνω στοιχείων που συναντούμε συχνά, είναι μια περιστρεφόμενη μάζα, στην περιστροφή της οποίας "αντιστέκεται" η ιξώδης τριβή των εδράνων στήριξης.

Αν είναι :



$T(t)$: η επιβαλλόμενη ροπή

$T_b(t)$: η ροπή εξ αιτίας της ιξώδους τριβής των εδράνων

J : η ροπή αδράνειας της μάζας

b : ο συντελεστής ιξώδους τριβής

$\theta(t)$: η γωνία στροφής

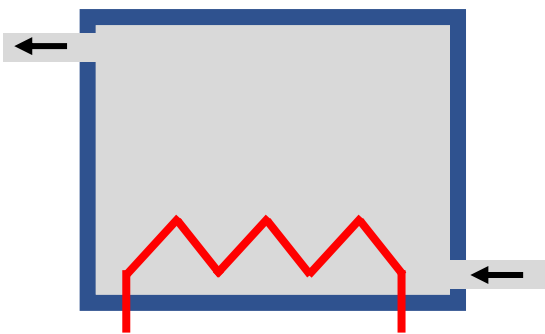
τότε ισχύει :

$$T(t) - T_b(t) = J\ddot{\theta}(t) \Rightarrow T(t) = J\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t)$$

Η τελευταία αυτή διαφορική εξίσωση είναι το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος στο οποίο σιωπηλά έχουμε θεωρήσει ως είσοδο την επιβαλλόμενη ροπή και έξοδο την γωνία στροφής.

3. ΕΝΑ ΑΠΛΟ ΘΕΡΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Ένα καλό παράδειγμα απλού θερμικού συστήματος είναι ένα δοχείο από το οποίο περνά ένα υγρό με σκοπό να θερμανθεί. Η θέρμανση επιτυγχάνεται με την βοήθεια ηλεκτρικής αντίστασης. Για το σύστημα κάνουμε τις εξής απλουστευτικές παραδοχές :



- Το δοχείο είναι τέλεια μονωμένο θερμικά
- Το νερό στο δοχείο έχει ομοιόμορφη θερμοκρασία, ίση με την θερμοκρασία εξόδου

Ορίζουμε τις παρακάτω μεταβλητές και παραμέτρους του συστήματος :

- $q(t)$: Ροή θερμότητας από την ηλεκτρική αντίσταση - ισχύς της ηλεκτρικής αντίστασης (watt)
- $q_i(t)$: Ροή θερμότητας που μεταφέρει το εισερχόμενο υγρό (watt)
- $q_o(t)$: Ροή θερμότητας που απάγει το εξερχόμενο υγρό (watt)
- $Q(t)$: Παροχή μάζας υγρού (Kgr/s)
- $\theta(t)$: Θερμοκρασία υγρού στο δοχείο (°C)
- $\theta_i(t)$: Θερμοκρασία εισερχομένου υγρού (°C)
- C : Θερμοχωρητικότητα του του δοχείου με το υγρό (joule/ °C)
- n : Ειδική θερμότητα υγρού (joule/Kgr °C)

Ας σημειωθεί, ότι οι μονάδες των μεγεθών που φαίνονται εδώ είναι ενδεικτικές – μπορεί να είναι οποιοσδήποτε κατάλληλες μονάδες. Ισχύει :

$$q_i(t) = nQ\theta_i(t) \quad (1) \quad \text{και} \quad q_o(t) = nQ\theta(t) \quad (2)$$

Η συνολική ροή θερμότητας προς το δοχείο είναι :

$$q(t) + q_i(t) - q_o(t)$$

... και είναι «υπεύθυνη» για την άνοδο της θερμοκρασίας του υγρού στο δοχείο, οπότε :

$$q(t) + q_i(t) - q_o(t) = C\dot{\theta}(t) \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) αν απαλείψω τις «εσωτερικές μεταβλητές» του συστήματος $q_i(t)$ και $q_o(t)$ προκύπτει :

$$q(t) + nQ\theta_i(t) = C\dot{\theta}(t) + nQ\theta(t)$$

που αποτελεί το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος που εδώ θεωρείται ότι έχει δύο εισόδους (q , θ_i) και μια έξοδο την θερμοκρασία θ .

4. ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΠΛΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

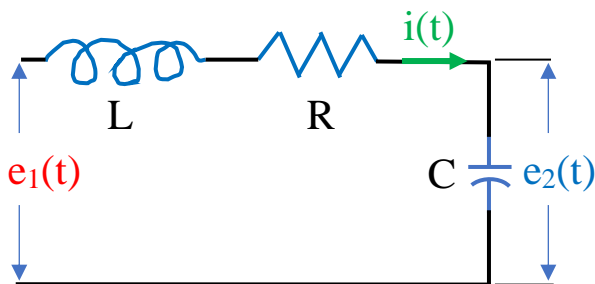
Κατ' αναλογία προς τα απλά μηχανικά στοιχεία - μάζα, αποσβεστήρα, ελατήριο - υπάρχουν τα αντίστοιχα απλά ηλεκτρικά στοιχεία που είναι το πηνίο, η ωμική αντίσταση και ο πυκνωτής. Για τα βασικά αυτά στοιχεία ισχύουν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις - μοντέλα που συνδέουν την εφαρμοζόμενη τάση με το ρεύμα που τα διαρρέει.

A. Πηνίο με αυτεπαγωγή L : $V_L = L \frac{di}{dt}$

B. Ωμική αντίσταση R : $V_R = Ri$

C. Πυκνωτής χωρητικότητας C: $\frac{dV_C}{dt} = \left(\frac{1}{C}\right) i$

Τα τρία παραπάνω βασικά ηλεκτρικά στοιχεία, συνδυαζόμενα μεταξύ, τους δίδουν ποικιλία ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Σε αυτό του ακολουθεί, είναι συνδεδεμένα σε σειρά. Ας θεωρήσουμε επίσης την τάση e_1 ως είσοδο και την τάση στα άκρα του πυκνωτή e_2 ως έξοδο. Ισχύει (Νόμος Kirchoff) :



$$e_1(t) = V_L(t) + V_R(t) + e_2(t)$$

...και σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις :

$$e_1(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + e_2(t)$$

$$i(t) = C\dot{e}_2$$

Όπου $i(t)$ το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα. Απαλείφοντας αυτό ακριβώς το ρεύμα (ως εσωτερική μεταβλητή του συστήματος) από τις προηγούμενες εξισώσεις, έχουμε :

$$e_1(t) = (LC)\ddot{e}_2(t) + (RC)\dot{e}_2(t) + e_2(t)$$

... μια διαφορική εξίσωση του χρόνου, που αποτελεί το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος. Παρατηρήστε ότι είναι ουσιαστικά ίδια με αυτήν του μηχανικού συστήματος μάζα – ελατήριο – αποσβεστήρας που βρήκαμε σε προηγούμενη παράγραφο.

5. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Η επίλυση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, που αποτελούν το μοντέλο του συστήματος, διευκολύνεται πολύ με την χρήση του μετασχηματισμού LAPLACE. Μαθηματικές «εργασίες» όπως η παραγωγή και η ολοκλήρωση αντικαθίστανται, με την βοήθεια του μετασχηματισμού αυτού από απλές αλγεβρικές πράξεις.

Ορισμός

Ο μετασχηματισμός LAPLACE μιας συνάρτησης του χρόνου $f(t)$ είναι μια άλλη συνάρτηση $F(s)$, της μιγαδικής μεταβλητής s , τέτοια ώστε :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Η συνάρτηση $f(t)$ πρέπει να είναι συνεχής και ακόμη : $f(t)=0$ για $t<0$.

Παράδειγμα : Η εκθετική συνάρτηση, που ορίζεται ως εξής :

$$\begin{aligned} f(t) &= Ae^{-at} \quad \text{για} \quad t \geq 0 \\ f(t) &= 0 \quad \text{για} \quad t < 0 \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός LAPLACE της συνάρτησης βρίσκεται ως εξής :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} Ae^{-at} e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \dots \Rightarrow F(s) = \frac{A}{s+a}$$

Μετασχηματισμός LAPLACE απλών συναρτήσεων

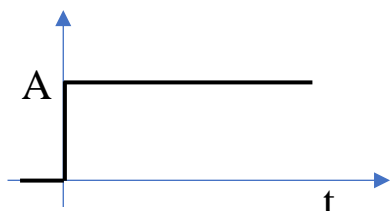
Δίδεται στη συνέχεια ο μετασχηματισμός LAPLACE μερικών συναρτήσεων που συναντά κανείς στην μελέτη των Συστημάτων Ελέγχου.

A. Εκθετική συνάρτηση

$$\begin{aligned} f(t) &= Ae^{-at} \quad \text{για} \quad t \geq 0 \\ f(t) &= 0 \quad \text{για} \quad t < 0 \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{A}{s+a}$$

Β. Συνάρτηση βαθμίδας (step function)

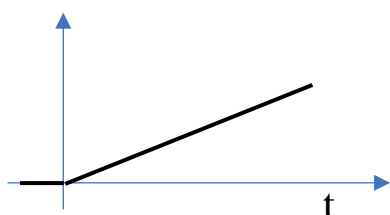


$$\begin{aligned} f(t) = u(t) &= A && \text{για } t \geq 0 \\ f(t) = u(t) &= 0 && \text{για } t < 0 \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{A}{s}$$

Την συναντά κανείς- πολύ συχνά στα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου. Με την βοήθειά της παριστάνουμε μαθηματικά μεταβολές που γίνονται "ακαριαία", πρακτικά σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Το κλείσιμο ή το άνοιγμα ενός διακόπτη περιγράφεται μαθηματικά από μια τέτοια συνάρτηση, αφού αυτό δεν είναι παρά ακαριαία μεταβολή της τάσης σε ένα δίκτυο από μια τιμή σε μια άλλη.

Γ. Συνάρτηση αναρρίχησης (ramp function)

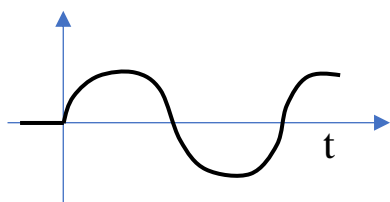


$$\begin{aligned} f(t) &= At && \text{για } t \geq 0 \\ f(t) &= 0 && \text{για } t < 0 \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{A}{s^2}$$

Πολύ χρήσιμη επίσης συνάρτησης : Με την βοήθειά της παριστάνουμε μεταβολές που λαμβάνουν χώρα σταδιακά, εν προκειμένω αυξάνονται γραμμικά με το χρόνο, με ρυθμό αύξησης A.

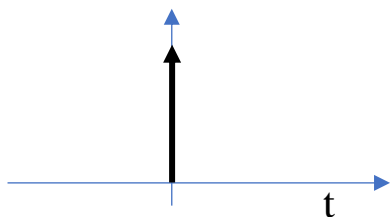
Δ. Ημιτονοειδής συνάρτηση



$$\begin{aligned} f(t) &= A \sin(\omega t) && \text{για } t \geq 0 \\ f(t) &= 0 && \text{για } t < 0 \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$

Δ. Κρουστική συνάρτηση (impulse function)



Ορίζεται ως η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης βαθμίδας, όπως την ορίσαμε προηγουμένως :

$$f(t) = \delta(t) = \frac{d[u(t)]}{dt}$$

Όπως μπορεί να προκύψει εύκολα από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού που θα αναφέρομε στη συνέχεια, ο μετασχηματισμός LAPLACE της εν λόγω συνάρτησης είναι :

$$F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = A$$

Η κρουστική συνάρτηση είναι ένας «παλμός» πολύ μικρής διάρκειας και πολύ μεγάλου πλάτους. Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη του παλμού είναι A. Με την βοήθειά της παριστάνουμε μαθηματικά κρουστικά φαινόμενα, όπως ας πούμε η κρούση δύο μαζών.

Στον Πίνακα που ακολουθεί αποτυπώνεται ο μετασχηματισμός Laplace μερικών χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Μπορεί κανείς να αναζητήσει στο διαδίκτυο και άλλους πιο πλούσιους τέτοιους πίνακες.

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	A
$u(t)$	$\frac{A}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού LAPLACE.

1. Γινόμενο συνάρτησης επί πραγματικό αριθμό :

$$\mathcal{L}[Af(t)] = A\mathcal{L}[f(t)]$$

2. Άθροισμα συναρτήσεων :

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

3. Χρονική μετατόπιση συνάρτησης :

$$\mathcal{L}[f(t - a)] = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)] = e^{-as}F(s)$$

4. Μετασχηματισμός της παραγώγου :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0-)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$$

..... αντίστοιχα για παραγώγους ανώτερης τάξης.

5. Μετασχηματισμός ολοκληρώματος συνάρτησης :

$$\mathcal{L} \left[\int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s}$$

6. Θεώρημα της τελικής τιμής :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s))$$

Με την βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, όπως αυτός ορίστηκε παραπάνω, μια συνάρτηση του χρόνου $f(t)$ μετασχηματίζεται σε μια συνάρτηση $F(s)$ της μιγαδικής μεταβλητής s . Τίθεται ήδη το ερώτημα : Αν είναι γνωστή η $F(s)$ πως μπορεί να προσδιορισθεί η αρχική συνάρτηση $f(t)$ από την οποία προήλθε η $F(s)$; Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace. Συμβολίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace με το σύμβολο \mathcal{L}^{-1} . Έτσι :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $f(t)$ μπορεί να προσδιορισθεί αναλυτικά με την βοήθεια του παρακάτω ολοκληρώματος :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-jT}^{c+jT} F(s) e^{st} ds$$

Η ολοκλήρωση που εισέρχεται στην παραπάνω σχέση είναι κοπιαστική και δεν ενδείκνυται. Ευτυχώς υπάρχει απλούστερη μέθοδος προσδιορισμού της $f(t)$: Με χρήση πινάκων που εμφανίζουν τον μετασχηματισμό Laplace αρκετών βασικών συναρτήσεων. Φυσικά δεν μπορούν να υπάρχουν όλες οι συναρτήσεις. Όμως τα πράγματα διευκολύνονται κάπως για την περίπτωση των συστημάτων ελέγχου, καθότι οι συναρτήσεις που εμφανίζονται σε αυτά είναι συνήθως της μορφής :

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

όπου τα $A(s)$ και $B(s)$ είναι πολυώνυμα του s . Μάλιστα δε ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι πάντα μεγαλύτερος ή ίσος από τον αντίστοιχο το αριθμητή. Οι συγκεκριμένες ρητές πολυωνυμικές συναρτήσεις μπορούν να αναλυθούν σε άθροισμα απλών κλασμάτων, τέτοιων που εμφανίζονται στους πίνακες του μετασχηματισμού Laplace.

Ένας σύγχρονος τρόπος για να προσδιορίσει κανείς είτε τον μετασχηματισμό Laplace είτε τον αντίστροφό του, είναι να χρησιμοποιήσει ειδικό λογισμικό, όπως π.χ. το MatLab.

6. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (TRANSFER FUNCTION)

Στη θεωρία αυτομάτου ελέγχου, χρησιμοποιούμε κατά κόρο τις ονομαζόμενες συναρτήσεις μεταφοράς προκειμένου να εκφράσουμε την σχέση εισόδου - εξόδου σε γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα είναι εκείνο το σύστημα του οποίου το μαθηματικό μοντέλο είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση του χρόνου με σταθερούς συντελεστές. Αν σε ένα τέτοιο σύστημα $x(t)$ είναι η είσοδος και $y(t)$ η έξοδος, τότε το μαθηματικό μοντέλο είναι πάντα της μορφής :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Όπου :

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, \dots, b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0$: Πραγματικοί αριθμοί

Συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ ενός τέτοιου συστήματος, είναι το πηλίκο του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου $Y(s)$, προς τον μετασχηματισμό Laplace της εισόδου $X(s)$ του συστήματος – υπό την προϋπόθεση ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Αν πάρουμε τον μετασχηματισμό Laplace και των δύο μερών της γενικής εξίσωσης του μοντέλου του γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος, έχουμε :

$$\mathcal{L} \left[a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y \right] = \mathcal{L} \left[b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} \left[a_n \frac{d^n y}{dt^n} \right] + \mathcal{L} \left[a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right] + \dots + \mathcal{L} \left[a_1 \frac{dy}{dt} \right] + \mathcal{L} [a_0 y] = \\ & = \mathcal{L} [b_m \frac{d^m x}{dt^m}] + \mathcal{L} [b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}}] + \dots + \mathcal{L} [b_1 \frac{dx}{dt}] + \mathcal{L} [b_0 x] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_n \mathcal{L} \left[\frac{d^n y}{dt^n} \right] + a_{n-1} \mathcal{L} \left[\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right] + \dots + a_1 \mathcal{L} \left[\frac{dy}{dt} \right] + a_0 \mathcal{L} [y] = \\ & = b_m \mathcal{L} \left[\frac{d^m x}{dt^m} \right] + b_{m-1} \mathcal{L} \left[\frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} \right] + \dots + b_1 \mathcal{L} \left[\frac{dx}{dt} \right] + b_0 \mathcal{L} [x] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = \\ & = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots + b_1 s X(s) + b_0 X(s) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$Y(s) [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] = X(s) [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0]$$

Συνεπώς, η συνάρτηση μεταφοράς είναι :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + \alpha_0} = \frac{n(s)}{d(s)}$$

.....πηλίκο δηλαδή δύο πολυωνύμων της μεταβλητής s .

Η συνάρτηση μεταφοράς συσχετίζει την έξοδο ενός συστήματος (δηλαδή το αποτέλεσμα της δράσης ενός αιτίου) με την είσοδο στο σύστημα (δηλαδή το αίτιο που την προκάλεσε). Αν γνωρίζει κανείς την συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ ενός συστήματος, τότε μπορεί να βρει την έξοδό του $Y(s)$ για οποιαδήποτε είσοδο $X(s)$:

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς **εκφράζει μόνο τις δυναμικές ιδιότητες** του συστήματος και είναι ανεξάρτητη εισόδων και εξόδων. Δεν δίδει όμως καμιά πληροφορία για την φυσική δομή του συστήματος. Είναι δυνατόν διαφορετικά τελείως συστήματα (π.χ. ένα μηχανικό και ένα ηλεκτρικό) να έχουν ακριβώς την ίδια συνάρτηση μεταφοράς. Η τελευταία αυτή ιδιότητα αποτελεί και την βάση για την «**αναλογία συστημάτων**» **διαφορετικών ως προς την φύση τους**.

Το πολυώνυμο :

$$d(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + \alpha_0$$

ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του συστήματος και η εξίσωση :

$$d(s) = 0$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** (characteristic equation) του συστήματος.

Ο **βαθμός** του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ονομάζεται **τάξη (order)** του συστήματος, οι δε ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης ονομάζονται **πόλοι (poles)** του συστήματος. Η χαρακτηριστική εξίσωση μας δίνει σπουδαίες πληροφορίες για την **δυναμική συμπεριφορά** γενικότερα και ειδικότερα για την **ευστάθεια του συστήματος**.

Οι ρίζες της εξίσωσης :

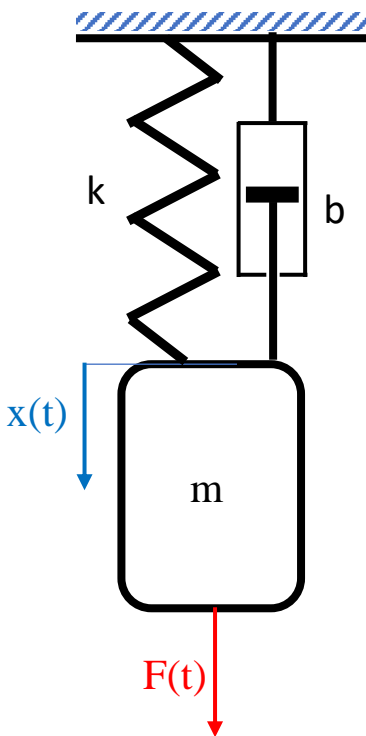
$$n(s) = 0$$

ονομάζονται **μηδενιστές⁴ (zeros)** του συστήματος και παίζουν επίσης κάποιο ρόλο στην δυναμική του συμπεριφορά.

⁴ Στην ελληνική βιβλιογραφία ο όρος «zeros» έχει μεταφρασθεί επίσης, μάλλον άστοχα, «μηδενικά».

Παραδείγματα συναρτήσεων μεταφοράς

A. Μάζα - ελατήριο - αποσβεστήρας.



Έχουμε ήδη προσδιορίσει το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος αυτού με **είσοδο την δύναμη** που ασκείται στην μάζα και **έξοδο την μετατόπιση** της μάζας :

$$F(t) = m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t)$$

Για να βρούμε την συνάρτηση μεταφοράς, θα μετασχηματίσουμε κατά Laplace και τα δύο μέλη της εξίσωσης :

$$\mathcal{L}[F(t)] = \mathcal{L}[m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t)] \Rightarrow$$

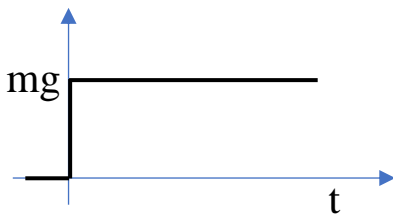
$$F(s) = ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Πρόκειται για σύστημα 2^{ης} τάξης.

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το σύστημα αυτό σε κατακόρυφη διάταξη, πράγμα φυσικά που δεν αλλάζει καθόλου το μοντέλο.

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι η μάζα συγκρατείται με κάποιο τρόπο ώστε το ελατήριο να μην είναι καθόλου «τεντωμένο» και ότι την χρονική στιγμή 0, ξαφνικά αφήνεται να κινηθεί ελεύθερη υπό την επενέργεια της βαρύτητας. Πως θα κινηθεί η μάζα;



Η είσοδος μας στην περίπτωση αυτή, είναι η δύναμη της βαρύτητας η οποία επιδρά στο σύστημα ακαριαία την χρονική στιγμή 0 και διατηρείται σταθερή στην συνέχεια. Πρόκειται δηλαδή για μια είσοδο βαθμίδας, πλάτους $B=mg$. Έχουμε ήδη δει τον μετασχηματισμό Laplace μιας τέτοιας δύναμης :

$$F(s) = \frac{mg}{s}$$

Οπότε, η **απόκριση του συστήματος** στην είσοδο αυτή, θα είναι :

$$X(s) = G(s)F(s) = \left(\frac{1}{ms^2 + bs + k} \right) \left(\frac{mg}{s} \right) = \frac{g}{\left(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m} \right) s}$$

Ας υποθέσουμε ότι στο σύστημα αυτό :

$$m = 1 \text{ Kgr} \quad \text{και} \quad k = 100 \text{ N/m}$$

και ας εξετάσουμε τρεις περιπτώσεις : Μια με υπερβολική απόσβεση, μια με πολύ μικρή απόσβεση και μια με κάποια «σωστή» απόσβεση.

Υπερβολική απόσβεση.

Ας είναι $b = 200 \text{ N/(m/s)}$. Αυτό σημαίνει ότι ο αποσβεστήρας «αντιστέκεται» με δύναμη 200 N όταν το έμβολό του κινείται με ταχύτητα 1 m/s. Η απόκριση του συστήματος είναι τότε :

$$X(s) = \frac{10}{(s^2 + 200s + 100)s}$$

Πρέπει τώρα να μετασχηματίσουμε την παραπάνω συνάρτηση με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, ώστε να βρούμε την $x(t)$ που μας ενδιαφέρει. Για να το κάνουμε αυτό θα την μετατρέψουμε σε άθροισμα απλών κλασμάτων :

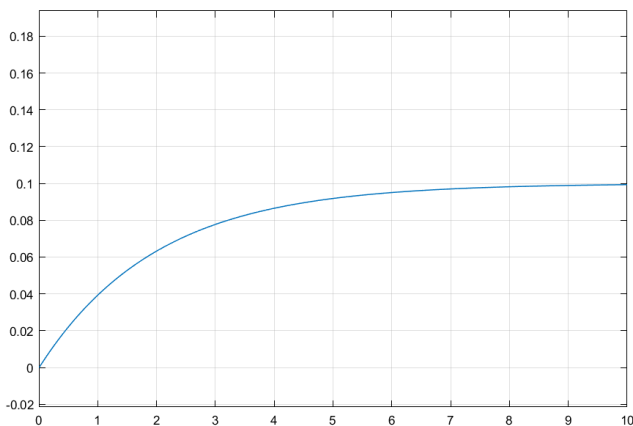
$$X(s) = \frac{10}{(s^2 + 200s + 100)s} \cong \frac{0.0003}{s + 199.49} + \frac{-0.1003}{s + 0.50} + \frac{0.1}{s}$$

Οπότε από τους πίνακες, για κάθε ένα από αυτά τα κλάσματα έχουμε :

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{0.0003}{s + 199.49} \right] = 0.0003e^{-199.49t}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-0.1003}{s + 0.50} \right] = -0.1003e^{-0.5t}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{0.1}{s} \right] = 0.1$$



Οπότε :

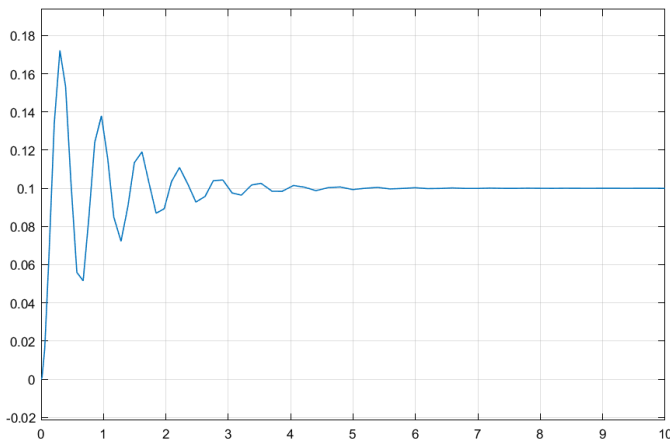
$$x(t) = 0.0003e^{-199.49t} - 0.1003e^{-0.5t} + 0.1 \text{ (m)}$$

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής. Η μάζα θα χρειασθεί περίπου 10 sec για να φτάσει, χωρίς καθόλου ταλαντώσεις, στην τελική της θέση, δηλαδή στα 0.1 m.

Ασθενής απόσβεση

Ας είναι $b = 2 \text{ N/(m/s)}$. Η απόκριση του συστήματος είναι τότε :

$$X(s) = \frac{10}{(s^2 + 2s + 100)s}$$



Βρίσκουμε, με την βοήθεια του MatLab , τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της παραπάνω συνάρτησης :

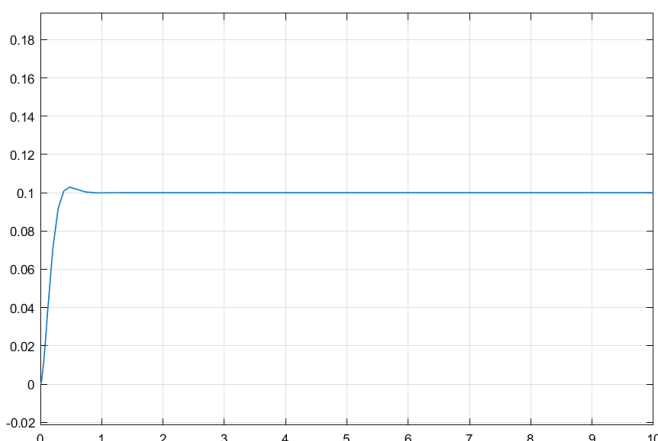
$$x(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} e^{-t} \left[\cos(3\sqrt{11}t) + \frac{\sqrt{11}}{3} \sin(3\sqrt{11}t) \right] \text{ (m)}$$

Όπως βλέπουμε στην γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης (διπλανό σχήμα), η μάζα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση πριν

ισορροπήσει και πάλι στην τελική θέση, δηλαδή στα 0.1 m.

«Σωστή» - βέλτιστη απόσβεση

Ας είναι $b = 15 \text{ N/(m/s)}$. Η απόκριση του συστήματος είναι τότε :



$$X(s) = \frac{10}{(s^2 + 15s + 100)s}$$

Βρίσκουμε, με την βοήθεια του MatLab , τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της παραπάνω συνάρτησης :

$$x(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} e^{-\frac{15t}{2}} \left[\cos\left(\frac{5\sqrt{7}t}{2}\right) + \frac{3\sqrt{7}}{7} \sin\left(\frac{5\sqrt{7}t}{2}\right) \right] \text{ (m)}$$

Όπως βλέπουμε στην γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης (διπλανό σχήμα), η μάζα **φτάνει πολύ γρήγορα στην τελική της θέση, χωρίς ταλαντώσεις.**

B. Απλό θερμικό σύστημα

Προσδιορίσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο το μαθηματικό μοντέλο ενός τέτοιου συστήματος :

$$q(t) + nQ\theta_i(t) = C\dot{\theta}(t) + nQ\theta(t)$$

Ας εξετάσουμε ένα απλό, καθημερινό τέτοιο σύστημα : Τον ηλεκτρικό θερμοσίφωνα του σπιτιού μας, χωρητικότητας 100 kgr με θερμαντική αντίσταση 4000 W. Ας υποθέσουμε επίσης ότι η θερμοχωρητικότητά του είναι αυτή του νερού που περιέχει. Ισχύει τότε :

$$n = 1 \frac{Kcal}{Kgr \text{ } ^\circ C} = 4186 \frac{Joules}{Kgr \text{ } ^\circ C}$$

$$C = n * m = (4186 * 100) \frac{Joules}{^\circ C} = 418.6 * 10^3 \frac{Joules}{^\circ C}$$

Ας δούμε σε πόσο χρόνο θα ανέβει η θερμοκρασία του νερού κατά 20° C, από την στιγμή που θα τον ανοίξουμε και με την υπόθεση ότι δεν ρέει νερό μέσα από αυτόν – δεν έχουμε δηλαδή ανοίξει τις βρύσες του ζεστού. Τότε στο μοντέλο του συστήματος, αφού Q=0, γίνεται :

$$q(t) = C\dot{\theta}(t) \Rightarrow \theta(t) = \frac{4000}{C}t + \theta_0$$

Η θερμοκρασία, όπως ήταν αναμενόμενο αυξάνει γραμμικά με τον χρόνο. Αν στο παραπάνω θέσουμε $\theta(t) - \theta_0 = 20^\circ C$ προκύπτει $t \cong 35 \text{ min}$.

Ας εξετάσουμε τώρα μια πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση : Νερό με σταθερή παροχή διέρχεται μέσα από το δοχείο. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι η θερμοκρασία του νερού που εισέρχεται είναι σταθερή και **ας ονομάσουμε $\theta(t) = \Theta(t) - \Theta_i(t)$** την άνοδο της θερμοκρασίας του υγρού κατά την διέλευση του από το δοχείο, εξ αιτίας βεβαίως της θερμότητας που δέχεται. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται τότε :

$$q(t) = C\dot{\theta}(t) + nQ[\theta(t) - \theta_i(t)] \Rightarrow q(t) = C\dot{\theta}(t) + nQ\theta(t)$$

Θα βρούμε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος θεωρώντας είσοδο την θερμότητα $q(t)$ και έξοδο την άνοδο της θερμοκρασίας του υγρού, δηλαδή το $\theta(t)$. Μετασχηματίζουμε κατά Laplace και τα δύο μέλη της εξίσωσης :

$$\mathcal{L}[q(t)] = \mathcal{L}[C\dot{\theta}(t) + nQ\theta(t)] \Rightarrow$$

$$q(s) = Cs\theta(s) + nQ\theta(s) \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{q(s)} \Rightarrow G(s) = \frac{1}{Cs + nQ} \Rightarrow G(s) = \frac{\frac{1}{nQ}}{\frac{C}{nQ}s + 1} = \frac{A}{Ts + 1}$$

Πρόκειται για σύστημα 1ης τάξης. Η σταθερά $T=C/nQ$ έχει μονάδες χρόνου και ονομάζεται **σταθερά χρόνου του συστήματος**.

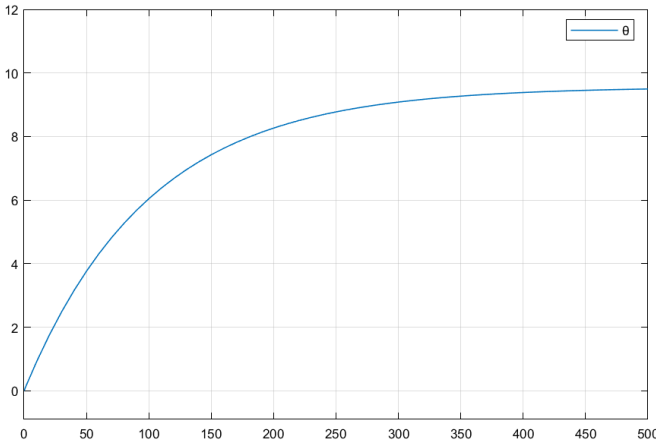
Ας δούμε τώρα πως θα «συμπεριφερθεί» ένα τέτοιος θερμοσίφωνας και πάλι νερού, μικρής χωρητικότητας αυτή τη φορά, $m=10\text{Kgr}$, που όμως θέλουμε να ζεσταίνει μια συνεχή ροή νερού $Q=0.1 \text{ Kgr/sec}$ με την ίδια θερμαντική αντίσταση των $q = 4000 \text{ watt}$. Η θερμοχωρητικότητά του τώρα είναι μικρότερη :

$$C = n * m = (4186 * 10) \frac{Joules}{^\circ C} = 41860 \frac{Joules}{^\circ C}$$

Αν η θερμαντική αντίσταση ανοίξει την χρονική στιγμή 0, τότε η άνοδος (διαφορά) της θερμοκρασίας, σύμφωνα με το μοντέλο, είναι :

$$\theta(s) = G(s)q(s) = \left(\frac{A}{Ts + 1}\right)\left(\frac{q}{s}\right)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της παραπάνω συνάρτησης είναι :



$$\theta(t) = Aq(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Για την περίπτωση μας :

$$Aq = \frac{q}{nQ} = \frac{4000}{4186 * 0.1} = 9.56 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T = \frac{C}{nQ} = \frac{41860}{4186 * 0.1} = 100 \text{ sec}$$

Η θερμοκρασία θα ανέβει σταδιακά και θα πλησιάζει ασυμπτωτικά τους 9.56°C . Σε χρόνο όσο και η σταθερά χρόνου T , η

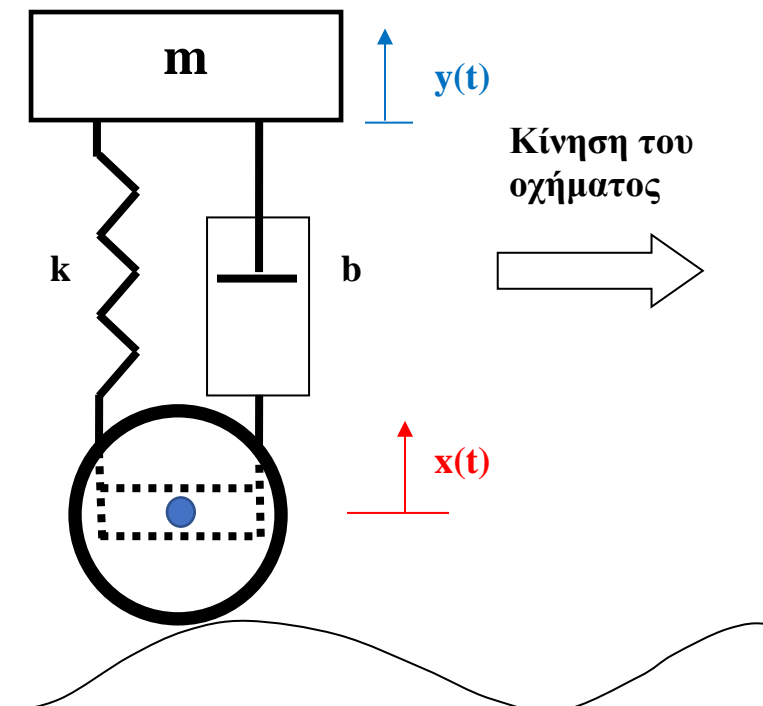
θερμοκρασία θα έχει ανέβει :

$$\theta(T) = 9.56^\circ\text{C} \left(1 - e^{-\frac{T}{T}}\right) \cong 0.63 * 9.56^\circ\text{C}$$

Σταθερά χρόνου, με άλλα λόγια, είναι ο χρόνος εκείνος που χρειάζεται ένα σύστημα 1^{ης} τάξης για να φτάσει στο 63% περίπου της τελικής του τιμής.

Γ. Ανάρτηση αυτοκινήτου.

Ένα απλό μοντέλο για την ανάρτηση τροχού αυτοκινήτου φαίνεται στο



διπλανό σχήμα : Ένα μέρος της μάζας του αυτοκινήτου, ας πούμε m , στηρίζεται στον τροχό με την βοήθεια ελατηρίου σταθεράς k και αποσβεστήρα σταθεράς b . Καθώς ο τροχός κυλιέται στον γενικά ανώμαλο δρόμο, οι κατακόρυφες μετακινήσεις $x(t)$ που επάγονται σ' αυτόν από το δρόμο, μεταβιβάζονται μέσω της ανάρτησης στο αμάξωμα ως $y(t)$. Σκοπός κάθε σωστής ανάρτησης είναι αυτές οι μετατοπίσεις να φτάνουν όσο γίνεται πιο εξασθενημένες στο αμάξωμα.

Η συνολική συμπίεση του ελατηρίου είναι $x(t) - y(t)$, οπότε η

δύναμη που αναπτύσσεται στα άκρα του είναι :

$$F_k(t) = k[x(t) - y(t)]$$

Αντίστοιχα, η δύναμη στα άκρα του αποσβεστήρα, είναι :

$$F_b(t) = b[\dot{x}(t) - \dot{y}(t)]$$

Οι δύο παραπάνω δυνάμεις, κινούν την μάζα κατά την κατεύθυνση y . Οπότε :

$$F_k(t) + F_b(t) = m\ddot{y}(t) \Rightarrow k[x(t) - y(t)] + b[\dot{x}(t) - \dot{y}(t)] = m\ddot{y}(t) \Rightarrow$$

$$kx(t) + b\dot{x}(t) = m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t)$$

... που αποτελεί και το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος. Μετασχηματίζουμε κατά Laplace και θεωρούμε είσοδο στο σύστημα το $x(t)$ και έξοδο το $y(t)$.

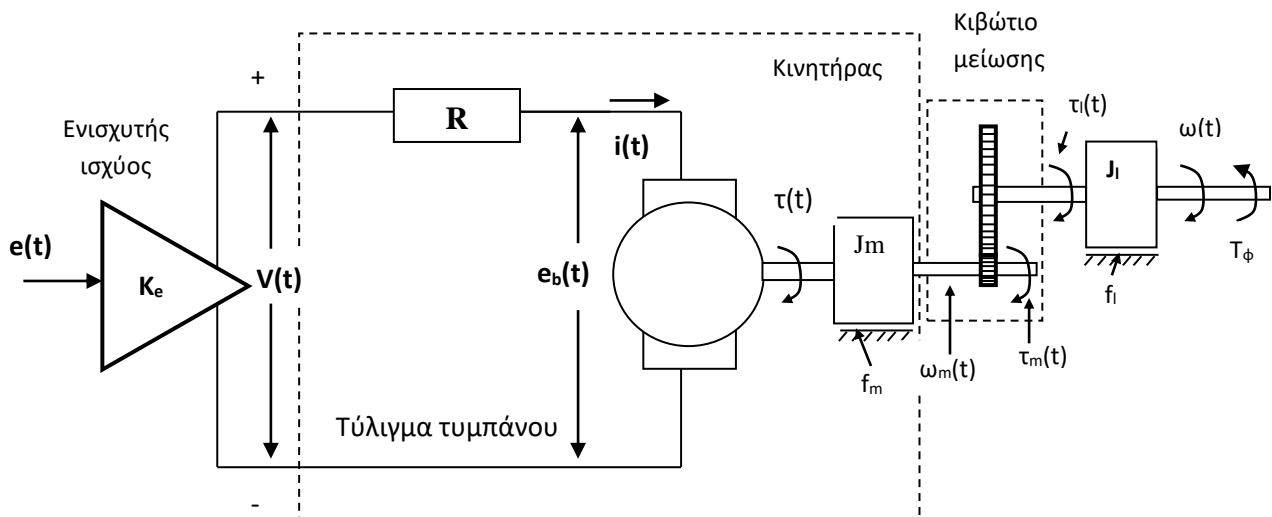
$$\mathcal{L}[kx(t) + b\dot{x}(t)] = \mathcal{L}[m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t)] \Rightarrow$$

$$kx(s) + bsx(s) = ms^2y(s) + bsy(s) + ky(s) \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

Δ. Απλό μοντέλο κινητήρα συνεχούς ρεύματος

Ας θεωρήσουμε τον κλασικό κινητήρα συνεχούς ρεύματος (DC) με μόνιμους μαγνήτες στον στάτη, ο οποίος, μέσω κιβωτίου μείωσης περιστρέφει φορτίο. Ο ενισχυτής ισχύος δίδει στο τύλιγμα του ρότορα την απαραίτητη τάση V για να κινηθεί. Τα παραπάνω αποτυπώνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



Ας είναι :

- e : Τάση (σήμα) ελέγχου του ενισχυτή ισχύος
- V : Επιβαλλόμενη τάση στο τύλιγμα τυμπάνου (ρότορας)
- R : Αντίσταση τυλίγματος τυμπάνου
- i : Ρεύμα στο τύλιγμα τυμπάνου
- e_b : Αντι-ηλεκτρεγερτική δύναμη αναπτυσσόμενη στο τύμπανο.
- τ : Ροπή αναπτυσσόμενη στο ρότορα του κινητήρα.
- ω_m : Γωνιακή ταχύτητα του κινητήρα
- K : Σταθερά ροπής του κινητήρα
- K : Σταθερά αντι-ηλεκτρεγερτικής δύναμης

Ισχύουν :

$$\tau = K i \quad , \quad e_b = K \omega_m$$

Για τα ηλεκτρικά μεγέθη στο τύλιγμα του τυμπάνου ισχύει (Νόμος Kirchoff) :

$$V(t) = R i(t) + e_b(t) = R i(t) + K \omega_m(t)$$

Την τάση στον κινητήρα, παρέχει ενισχυτής ισχύος και ισχύει :

$$V(t) = K_e e(t)$$

Όπου e , η τάση ελέγχου του ενισχυτή ισχύος.

Η ροπή τ που αναπτύσσεται στον ρότορα του κινητήρα από το ηλεκτρικό πεδίο, κατά ένα μέρος της επιταχύνει τον ρότορα (ροπή αδράνειας ρότορα : J_m), υπερνικώντας και την ιξώδη τριβή της έδρασής του (συντελεστής ιξώδους

τριβής κινητήρα f_m) και κατά το υπόλοιπο είναι διαθέσιμη στον άξονά του (τ_m) για να κινήσει το φορτίο :

$$\tau(t) = J_m \dot{\omega}_m(t) + f_m \omega_m(t) + \tau_m(t)$$

Αν ο μειωτήρας έχει σχέση μετάδοσης n και κινεί φορτίο με ροπή αδράνειας J_l και συντελεστή ιξώδους τριβής f_l τότε ισχύουν :

$$\omega(t) = \frac{\omega_m(t)}{n} \quad , \quad \tau_l(t) = n\tau_m(t)$$

Και πάλι, για την ροπή στον άξονα του φορτίου ισχύει όπως και πριν:

$$\tau_l(t) = J_l \dot{\omega}(t) + f_l \omega(t) + \tau_\varphi(t)$$

Όπου τ_φ η εξωτερική ροπή που καλείται να υπερνικήσει ο άξονας του φορτίου.

Από τις παραπάνω 8 εξισώσεις αν απαλειφθούν οι 7 «εσωτερικές μεταβλητές» του συστήματος, δηλαδή :

$$V, e_b, i, \tau, \omega, \tau_m, \tau_l$$

Προκύπτει μια σχέση (**το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος**) που συνδέει την είσοδο του συστήματος, δηλαδή την τάση e με την έξοδό του, δηλαδή την γωνιακή ταχύτητα ω_m του κινητήρα :

$$e(t) = \left(\frac{R J_{eff}}{K K_e}\right) \dot{\omega}_m(t) + \left(\frac{R f_{eff} + K^2}{K K_e}\right) \omega_m(t) + \left(\frac{R}{n K K_e}\right) \tau_\varphi(t)$$

Όπου :

$$J_{eff} = J_m + \frac{J_l}{n^2} \quad , \quad f_{eff} = f_m + \frac{f_l}{n^2}$$

η συνολική ροπή αδράνειας και η συνολική ιξώδης τριβή του συστήματος αντίστοιχα, όπως τις «αισθάνεται» ο ρότορας του κινητήρα.

Αν θέσομε :

$$C_1 = \frac{R}{n K K_e} \quad , \quad C_2 = \frac{R J_{eff}}{K K_e} \quad , \quad C_3 = \frac{R f_{eff} + K^2}{K K_e}$$

Το μοντέλο του συστήματος γράφεται :

$$e(t) - C_1 \tau_\varphi(t) = C_2 \dot{\omega}_m(t) + C_3 \omega_m(t)$$

Μετασχηματίζομε κατά Laplace και τα δύο μέλη της εξίσωσης και έχουμε :

$$e(s) - C_1 \tau_\phi(s) = C_2 s \omega_m(s) + C_3 \omega_m(s) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\omega_m(s)}{e(s) - C_1 \tau_\phi(s)} = \frac{1}{C_2 s + C_3} = \frac{\frac{1}{C_3}}{\frac{C_2}{C_3} s + 1} = \frac{K_{tot}}{Ts + 1}$$

Όπου :

$$K_{tot} = \frac{KK_e}{Rf_{eff} + K^2} \quad T = \frac{RJ_{eff}}{Rf_{eff} + K^2}$$

Αν υποθέσουμε ότι η εξωτερική ροπή τ_ϕ είναι μηδέν, τότε η συνάρτηση μεταφοράς που συνδέει την τάση ελέγχου e με την αναπτυσσόμενη γωνιακή ταχύτητα του ρότορα ω_m είναι :

$$G(s) = \frac{\omega_m(s)}{e(s)} = \frac{K_{tot}}{Ts + 1}$$

Πρόκειται δηλαδή για σύστημα πρώτης τάξης, αφού το πολυώνυμο του παρονομαστή είναι πρώτου βαθμού.

Ας δούμε πως θα «αποκριθεί» το σύστημα αυτό σε μια ξαφνική επιβολή τάσης μεγέθους A . Σε μια είσοδο δηλαδή βαθμίδας :

$$e(s) = \frac{A}{s}$$

$$\omega_m(s) = G(s) * e(s) = \frac{K_{tot}}{(Ts + 1)} \frac{A}{s}$$

Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα :

$$\frac{K_{tot}}{(Ts + 1)} \frac{A}{s} = \frac{C_1}{Ts + 1} + \frac{C_2}{s} = \frac{(C_1 + TC_2)s + C_2}{(Ts + 1)s} \Rightarrow$$

$$C_2 = K_{tot}A \quad \text{και} \quad C_1 = -TK_{tot}A$$

Άρα :

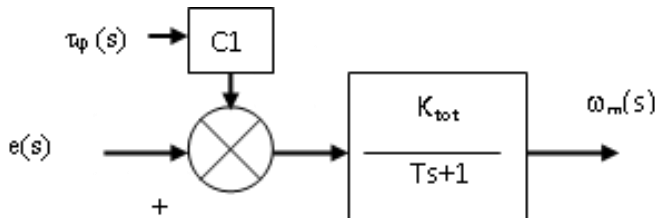
$$\omega_m(s) = \frac{K_{tot}A}{s} - \frac{TK_{tot}A}{Ts + 1} = AK_{tot} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right)$$

Με την βοήθεια των Πινάκων του μετασχηματισμού Laplace, προσδιορίζω την απόκριση :

$$\omega_m(t) = AK_{tot}(1 - e^{-t/T})$$

Η σταθερά T είναι η σταθερά χρόνου του συστήματος.

Το σύστημα ελέγχου γωνιακής ταχύτητας ανοικτού βρόχου, απεικονίζεται σε μορφή μπλοκ διαγράμματος παρακάτω. Η εξωτερική ροπή εμφανίζεται εδώ ως διαταραχή.



Έλεγχος γωνίας στροφής του κινητήρα (Σερβομηχανισμός θέσης)

Ο έλεγχος της γωνίας στροφής του κινητήρα και κατ' επέκταση της εξόδου του μειωτήρα, είναι σημαντικός για μια σειρά εφαρμογές : Ρομποτικά συστήματα, μηχανές αριθμητικού ελέγχου (CNC) και πολλές άλλες εφαρμογές ελέγχου θέσης.

Μοντέλο του συστήματος για έλεγχο θέσης

Για την γωνία στροφής θ_m του άξονα του κινητήρα ισχύει :

$$\dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t)$$

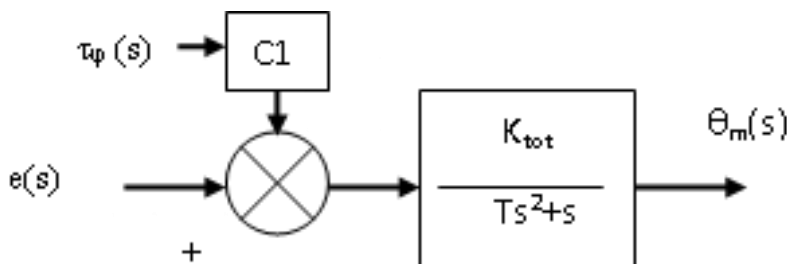
Οπότε το μοντέλο του κινητήρα, γίνεται τώρα :

$$e(t) = \left(\frac{R J_{eff}}{K K_e}\right) \ddot{\theta}_m(t) + \left(\frac{R f_{eff} + K^2}{K K_e}\right) \dot{\theta}_m(t) + \left(\frac{R}{n K K_e}\right) \tau_\varphi(t)$$

Μετασχηματίζομε όπως και πριν κατά Laplace και παίρνομε :

$$\frac{\theta_m(s)}{e(s) - C_1 \tau_\varphi(s)} = \frac{K_{tot}}{Ts^2 + s}$$

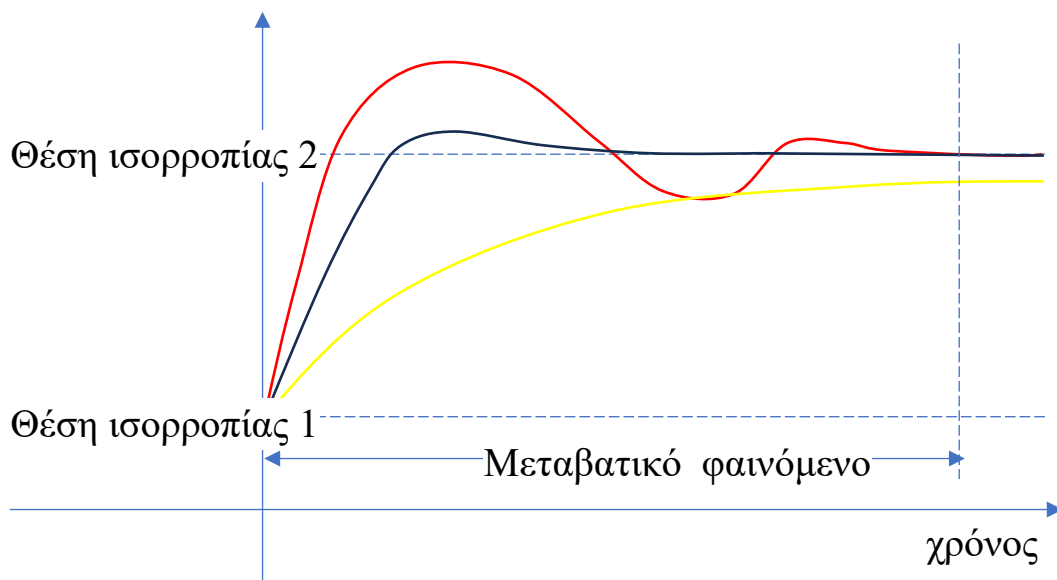
Οπότε το σύστημα ελέγχου γωνιακής θέσης ανοικτού βρόχου είναι :



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Στα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου, μας ενδιαφέρει πολύ σοβαρά ο τρόπος με τον οποίο ένα σύστημα «μεταβαίνει από μια κατάσταση/θέση ισορροπίας σε μια άλλη».



Μια τέτοια μετάβαση μπορεί να έχει μια μορφή σαν και αυτές που φαίνονται στο προηγούμενο σχήμα. Μπορεί η μετάβαση να γίνεται γρήγορα αλλά με ταλαντώσεις (κόκκινο), μπορεί να γίνεται νωθρά (πολύ αργά - κίτρινο) ή μπορεί να γίνεται βέλτιστα (μαύρο). Υπάρχει περίπτωση επίσης κατά την διαδικασία μετάβασης το σύστημα να εκτραπεί τελείως, να μην βρει δηλαδή καμιά νέα θέση ισορροπίας – αστάθεια.

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού συστήματος με χρονικά αμετάβλητους συντελεστές, μας δίνει όλη την πληροφορία για τα χαρακτηριστικά της «μετάβασης αυτής», του μεταβατικού φαινομένου δηλαδή.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Πρόκειται για τα απλούστερα, από την άποψη της δυναμικής συμπεριφοράς, συστήματα. Η συνάρτηση μεταφοράς τους είναι πάντα της μορφής :

$$G(s) = \frac{K_{tot}}{Ts + 1}$$

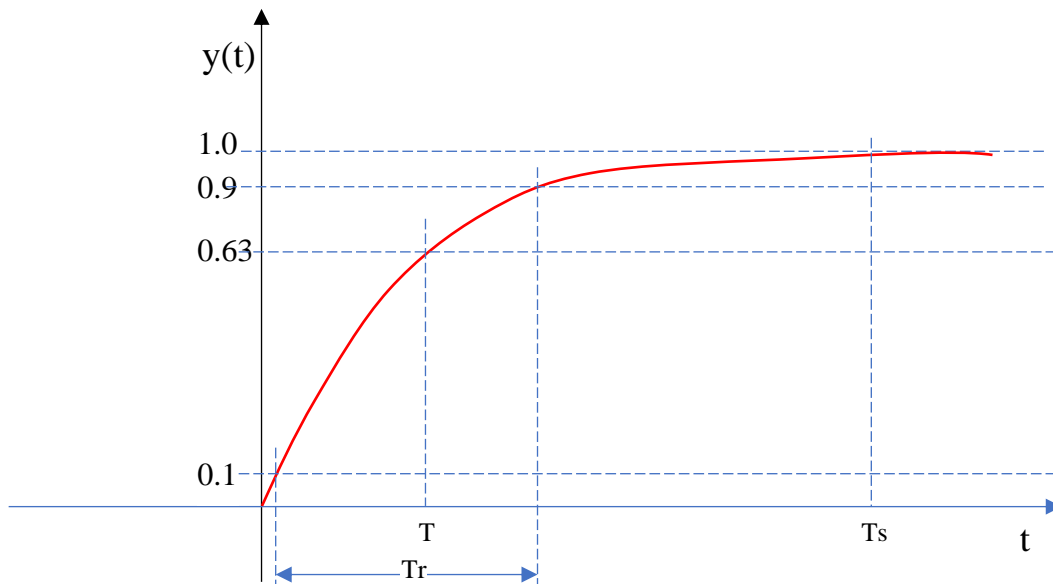
Θα εξετάσουμε την απόκριση του τυπικού αυτού συστήματος 1^{ης} τάξης σε είσοδο (μοναδιαίας) βαθμίδας. Αυτός είναι ο ενδεδειγμένος τρόπος για να εξετάσει κανείς την μεταβατική συμπεριφορά.

Η απόκριση (έξοδος) του συστήματος σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας είναι :

$$Y(s) = G(s)u(s) = \left(\frac{K_{tot}}{Ts + 1}\right)\left(\frac{1}{s}\right) = K_{tot}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{1 + \frac{1}{T}}\right) \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_{tot}}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_{tot}}{1 + \frac{1}{T}}\right]$$

...και με την βοήθεια των πινάκων του μετασχηματισμού Laplace :

$$y(t) = K_{tot}(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$



Στο παραπάνω σχήμα, φαίνεται σχεδιασμένη η απόκριση αυτή για την περίπτωση $K_{tot}=1$. Το μεταβατικό φαινόμενο καθορίζεται πλήρως από μια και μοναδική ποσότητα, το T , που έχει διαστάσεις χρόνου και ονομάζεται **σταθερά χρόνου (time constant)**. Η τιμή της εξόδου για τον χρόνο αυτό, είναι :

$$y(T) = \left(1 - e^{-\frac{T}{T}}\right) = 1 - e^{-1} \cong 0.63$$

Δύο άλλες «χρονικές ποσότητες» μας ενδιαφέρουν επίσης στην μεταβατική συμπεριφορά των συστημάτων :

A. Ο χρόνος που χρειάζεται το σύστημα για να μεταβεί από το 10% στο 90% της τελικής του τιμής. Ο χρόνος αυτός ονομάζεται **χρόνος ανόδου (rise time), T_r** .

Με απλούς συλλογισμούς και πράξεις, μπορεί κανείς να αποδείξει, ότι ο χρόνος αυτός για την περίπτωση του συστήματος πρώτης τάξης, είναι **$T_r=2.2T$**

B. Ο χρόνος που χρειάζεται το σύστημα για να φτάσει και να παραμείνει στο 98% της τελικής του τιμής. Ο χρόνος αυτός ονομάζεται **χρόνος αποκατάστασης (settling time), T_s** .

Και πάλι, με απλούς συλλογισμούς και πράξεις, μπορεί κανείς να αποδείξει, ότι ο χρόνος αυτός είναι **$T_s=4T$**

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Για πολλά από τα συστήματα δεύτερης τάξης χωρίς μηδενιστή, που ενδιαφέρουν τον Αυτόματο Έλεγχο, η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή :

$$G(s) = A \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n)s + \omega_n^2}$$

με $\zeta \geq 0$ και $\omega_n > 0$

Παράδειγμα :

Για το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς :

$$G(s) = \frac{180}{2s^2 + 8.4s + 72}$$

Γράφουμε :

$$G(s) = \frac{180}{2s^2 + 8.4s + 72} = \frac{90}{s^2 + 4.2s + 36} = 2.5 \frac{6^2}{s^2 + (2 * 0.35 * 6)s + 6^2}$$

Οπότε :

$$A=2.5, \zeta=0.35, \omega_n=6 \text{ (s}^{-1}\text{)}$$

Ο αριθμός ζ ονομάζεται **λόγος απόσβεσης** του συστήματος, το ω_n είναι η **φυσική του συχνότητα** και το A είναι απλώς μια σταθερά που επηρεάζει μόνο το «πλάτος» της απόκρισης του συστήματος και καθόλου την μορφή της. Στη συνέχεια, και εξ αιτίας της παρατήρησης αυτής, θα θεωρούμε $A=1$.

Ο λόγος απόσβεσης ζ , καθορίζει την «μεταβατική συμπεριφορά» του συστήματος, το αν δηλαδή θα είναι ταλαντωτικό ή νωθρό, ενώ η φυσική του συχνότητα σχετίζεται με το πόσο γρήγορα αντιδρά.

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια τρεις περιπτώσεις συστημάτων, με διαφορετικούς λόγους απόσβεσης.

1. Σύστημα με μηδενικό λόγο απόσβεσης : $\zeta=0$

Η συνάρτηση μεταφοράς παίρνει στην περίπτωση αυτή την μορφή :

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

Η απόκριση του συστήματος σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας είναι :

$$Y(s) = G(s)u(s) = \left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \right]$$

...και με την βοήθεια των πινάκων του μετασχηματισμού Laplace :

$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t)$$

Το σύστημα δηλαδή θα διεγερθεί και θα εκτελεί μη αποσβενυμμένες ταλαντώσεις με συχνότητα ω_n .

2. Σύστημα με υπο-απόσβεση : $0 < \zeta < 1$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί, ότι η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί :

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

Οι δε **πόλοι του συστήματος** είναι οι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί :

$$p_1 = -\sigma_\alpha + \omega_d i \quad \text{και} \quad p_2 = -\sigma_\alpha - \omega_d i$$

όπου :

$$\sigma_\alpha = \zeta \omega_n \quad \text{και} \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Η απόκριση του συστήματος σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας είναι :

$$Y(s) = G(s)u(s) = \left(\frac{\omega_n^2}{(s - p_1)(s - p_2)} \right) \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s} - \frac{s + \sigma_\alpha}{(s + \sigma_\alpha)^2 + \omega_d^2} - \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \frac{\omega_d}{(s + \sigma_\alpha)^2 + \omega_d^2}$$

...και με την βοήθεια των πινάκων του μετασχηματισμού Laplace :

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma_\alpha t} \cos(\omega_d t) - \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) e^{-\sigma_\alpha t} \sin(\omega_d t)$$

3. Σύστημα με υπερ-απόσβεση : $\zeta > 1$

Οι **πόλοι του συστήματος** είναι στην περίπτωση αυτοί, οι **αρνητικοί πραγματικοί** αριθμοί :

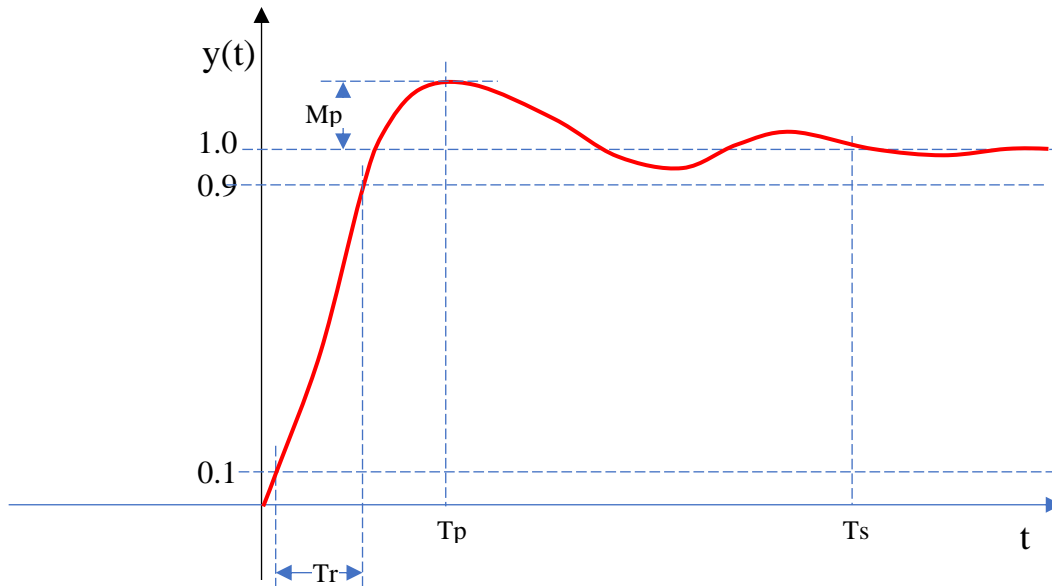
$$p_1 = -(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \quad \text{και} \quad p_2 = -(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

...η δε απόκρισή του σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας είναι :

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{p_2 t}}{p_2} - \frac{e^{p_1 t}}{p_1} \right)$$

«ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ» ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ

Η τυπική απόκριση ενός συστήματος, μεγαλύτερης από 1^{ης} τάξης, σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Αυτά που μας ενδιαφέρουν πρωτίστως για το μεταβατικό φαινόμενο, είναι : η ταχύτητα με την οποία εξελίσσεται, το πόσο γρήγορα «αποσβένει» και το πόσο καλά διατηρείται στην επιθυμητή τιμή, εν οσω διαρκεί η μετάβαση.

Για τα δύο πρώτα, έχουμε ήδη ορίσει στην ανάλυση του συστήματος 1^{ης} τάξης, **τον χρόνο ανόδου (T_r)** και τον **χρόνος αποκατάστασης (T_s)**.

Στην γενική περίπτωση, η μετάβαση από μια θέση ισορροπίας σε μια άλλη, είναι ταλαντωτική – πράγμα που δεν συμβαίνει ποτέ σε ένα σύστημα 1^{ης} τάξης. Ορίζουμε για την γενική αυτή περίπτωση, δύο νέα μεγέθη :

Χρόνος κορυφής (T_p) : Είναι ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει η απόκριση στην μέγιστη τιμής της.

Μέγιστη ποσοστιαία υπερακόντιση (maximum percent overshoot), M_p :

$$M_p = 100 \left(\frac{y(T_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \right)$$

Το μέγεθος εκφράζει ποσοτικά το «πόσο το σύστημα τείνει να ξεφύγει από τον στόχο» κατά την διαδικασία της μετάβασης. Προφανώς μας ενδιαφέρει να είναι μικρό.

Χαρακτηριστικά της μεταβατικής απόκρισης για συστήματα 2^{ης} τάξης

Για την ειδική περίπτωση των συστημάτων 2^{ης} τάξης χωρίς μηδενιστή, η συνάρτηση μεταφοράς, όπως έχει ήδη αναφερθεί, μπορεί να γραφεί πάντα στην μορφή :

$$G(s) = A \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n)s + \omega_n^2}$$

Τα χαρακτηριστικά μεγέθη της μεταβατικής απόκρισης, μπορούν εύκολα να υπολογισθούν από τις σχετικές εξισώσεις, και είναι :

α. Χρόνος κορυφής :

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

β. Μέγιστη ποσοστιαία υπερακόντιση :

$$M_p = 100 e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

γ. Χρόνος αποκατάστασης :

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

δ. Χρόνος ανύψωσης :

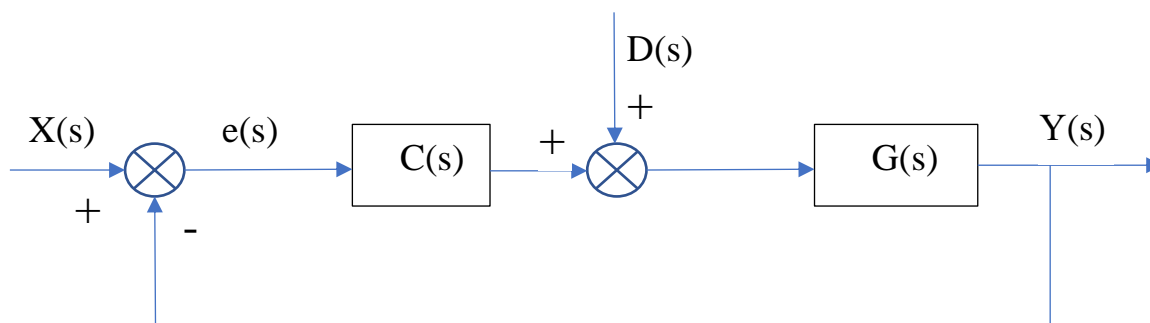
Δεν υπάρχει αναλυτική έκφραση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΑΛΥΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ

1. ΕΛΕΓΧΟΣ ΜΕ ΑΝΑΔΡΑΣΗ (ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ)

Το γενικό διάγραμμα ελέγχου μιας εγκατάστασης (plant) $G(s)$ με την βοήθεια αρνητικής ανάδρασης, φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Η πραγματική τιμή $Y(s)$ αφαιρείται από την επιθυμητή τιμή $X(s)$ και σχηματίζεται το σφάλμα $e(s)$. Το τελευταίο τροφοδοτεί τον ελεγκτή $C(s)$ που με την σειρά του δημιουργεί την εντολή προς την εγκατάσταση. Η εντολή δεν είναι το μόνο αίτιο που επηρεάζει την εγκατάσταση. Σχεδόν πάντα η τελευταία υπόκειται σε εξωτερικές επιρροές ή και εσωτερικές μεταβολές που επίσης την επηρεάζουν. Και τα δύο ονομάζονται, στα πλαίσια των συστημάτων ελέγχου, διαταραχές (disturbances). Τα παραπάνω εμφανίζονται ποσοτικά στην παρακάτω εξίσωση :

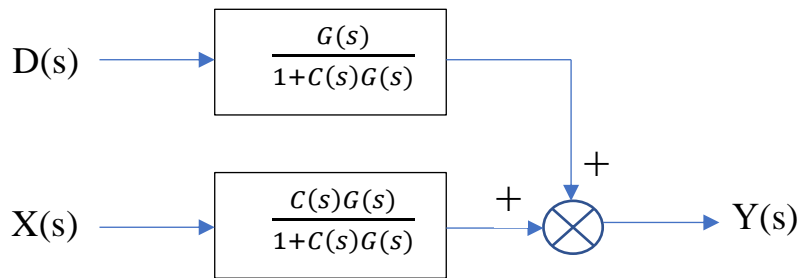
$$[(X - Y)C + D]G = Y$$

...στην οποία δεν εμφανίζεται, για λόγους απλότητας, η μεταβλητή s . Από την εξίσωση αυτή, με απλές πράξεις παίρνομαι :

$$Y = \left(\frac{CG}{1 + CG}\right)X + \left(\frac{G}{1 + CG}\right)D \quad (1)$$

...μια εξίσωση που δείχνει ποσοτικά πως επηρεάζεται η έξοδος του συστήματος τόσο από την επιθυμητή τιμή όσο και από τις διαταραχές.

Το σύστημα μπορεί κανείς να το δει και στην μορφή του σχήματος που ακολουθεί : Τόσο η είσοδος $X(s)$, όσο και η διαταραχή $D(s)$, επηρεάζουν την έξοδο με την δική της συνάρτηση μεταφοράς που θα την ονομάζομε **συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου, $G_c(s)$** .



Επίδραση του ελέγχου κλειστού βρόχου στην δυναμική συμπεριφορά του συστήματος

Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου, χαρακτηρίζει πλήρως την «δυναμική συμπεριφορά» του συστήματος, και βλέπουμε ήδη ότι είναι διαφορετική από την συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου $G(s)$.

Για ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα, η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ είναι κλάσμα της μορφής :

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)}$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή ονομάζονται μηδενιστές ενώ οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή ονομάζονται πόλοι της εγκατάστασης.

Οι ελεγκτές που συνήθως χρησιμοποιούνται, έχουν επίσης αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς :

$$C(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου για την είσοδο $X(s)$, γράφεται τότε :

$$G_c(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{\frac{n_c(s)n_G(s)}{d_c(s)d_G(s)}}{1 + \frac{n_c(s)n_G(s)}{d_c(s)d_G(s)}} = \frac{n_c(s)n_G(s)}{d_c(s)d_G(s) + n_c(s)n_G(s)} \quad (3.a)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου με είσοδο την διαταραχή $D(s)$, γράφεται :

$$G_c(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{\frac{n_G(s)}{d_G(s)}}{1 + \frac{n_c(s)n_G(s)}{d_c(s)d_G(s)}} = \frac{d_c(s)n_G(s)}{d_c(s)d_G(s) + n_c(s)n_G(s)} \quad (3.b)$$

Παρατηρούμε τα εξής :

- Οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου και για τις δύο περιπτώσεις, από τους οποίους κυρίως εξαρτάται η δυναμική συμπεριφορά του, έχουν αλλάξει. Μάλιστα δε αλλάζει και η τάξη του συστήματος, κατά την τάξη του ελεγκτή : Ένας ελεγκτής με συνάρτηση μεταφοράς πρώτης τάξης, αυξάνει κατά ένα την τάξη του συστήματος και επιδεινώνει κατά κανόνα την δυναμική του συμπεριφορά.
- Οι μηδενιστές του συστήματος κλειστού βρόχου, έχουν επίσης αλλάξει.

Επίδραση του ελέγχου κλειστού βρόχου στο σφάλμα μόνιμης κατάστασης

Το σφάλμα υπολογίζεται με απλές πράξεις :

$$e = X - Y = \left(\frac{1}{1 + CG} \right) X - \left(\frac{G}{1 + CG} \right) D$$

Μας ενδιαφέρει συνήθως να βρούμε το σφάλμα μόνιμης κατάστασης, e_{ss} , το σφάλμα δηλαδή του συστήματος όταν αυτό «ηρεμήσει», όταν το μεταβατικό φαινόμενο έχει εξαφανισθεί :

- Είτε σε είσοδο βαθμίδας μεγέθους A , οπότε $X(s) = A/s$
- Είτε σε ξαφνική εμφάνιση διαταραχής μεγέθους D_0 , οπότε $D(s) = D_0/s$

Για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις, έχουμε :

A. Σφάλμα παρακολούθησης εντολής $X(s)$

$$e(s) = \left(\frac{1}{1 + C(s)G(s)} \right) X(s) = \left(\frac{1}{1 + \frac{n_c(s)n_G(s)}{d_c(s)d_G(s)}} \right) \frac{A}{s} = \left(\frac{d_c(s)d_G(s)}{d_c(s)d_G(s) + n_c(s)n_G(s)} \right) \frac{A}{s}$$

Για το σφάλμα μόνιμης κατάστασης ισχύει :

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [e(s)s]^5 \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\left(\frac{d_c(s)d_G(s)}{d_c(s)d_G(s) + n_c(s)n_G(s)} \right) \frac{A}{s} \right] = \left(\frac{d_c(0)d_G(0)}{d_c(0)d_G(0) + n_c(0)n_G(0)} \right) A \end{aligned} \quad (4)$$

Παρατηρούμε ότι, για να είναι το $e_{ss} = 0$, πρέπει είτε $d_c(0) = 0$ είτε $d_G(0) = 0$. Το τελευταίο ισχύει, όταν η εγκατάσταση έχει συνάρτηση μεταφοράς τής μορφής :

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} = \frac{n_G(s)}{s^k d_{G1}(s)}$$

Όταν δηλαδή διαθέτει όπως λέμε «ελεύθερους ολοκληρωτές», s . Τέτοια «εγκατάσταση» είναι π.χ. ο κινητήρας DC σε λειτουργία ελέγχου θέσης και το τετρακόπτερο κατά την περιστροφή περί τον κατακόρυφο άξονα όταν βρίσκεται σε οριζόντια θέση.

Αν η εγκατάσταση δεν διαθέτει ελεύθερους ολοκληρωτές, τότε θα πρέπει $d_c(0) = 0$, δηλαδή θα πρέπει ο ελεγκτής να είναι κατάλληλος ώστε να εξασφαλισθεί ότι το σφάλμα μόνιμης κατάστασης σε εντολή βαθμίδας θα είναι μηδέν.

B. Σφάλμα εξ αιτίας ξαφνικής εμφάνισης διαταραχής μεγέθους D_0

$$e(s) = - \left(\frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} \right) D(s) = - \left(\frac{\frac{n_G(s)}{d_G(s)}}{1 + \frac{n_c(s)n_G(s)}{d_c(s)d_G(s)}} \right) \frac{D_0}{s} = - \left(\frac{d_c(s)n_G(s)}{d_c(s)d_G(s) + n_c(s)n_G(s)} \right) \frac{D_0}{s}$$

Για το σφάλμα μόνιμης κατάστασης ισχύει :

⁵ Ιδιότητα μετασχηματισμού Laplace

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [e(s)s] \\ = \lim_{s \rightarrow 0} \left[- \left(\frac{d_c(s)n_G(s)}{d_c(s)d_G(s) + n_c(s)n_G(s)} \right) \frac{D_0}{s} \right] = - \left(\frac{d_c(0)n_G(0)}{d_c(0)d_G(0) + n_c(0)n_G(0)} \right) D_0 \quad (5)$$

Δεδομένου ότι, στις πραγματικές εγκαταστάσεις, $n_G(0) \neq 0$, το σφάλμα μόνιμης κατάστασης εξ αιτίας των διαταραχών απαλείφεται μόνο με «κατάλληλο» ελεγκτή!

Βασικές δράσεις ελέγχου

Αναλογικός Έλεγχος – Proportional Control

Πρόκειται για τον απλούστερο τύπο ελέγχου : Το σφάλμα πολλαπλασιάζεται επί μια σταθερά K_p και το αποτέλεσμα αποτελεί την εντολή προς την εγκατάσταση.

$$\text{Συνεπώς } \mathbf{C(s)} = K_p : \quad \mathbf{n_c(s)} = K_p, \mathbf{d_c(s)} = 1$$

Δράση του αναλογικού ελέγχου σε εγκατάσταση 1^{ης} τάξης

Κάθε εγκατάσταση 1^{ης} τάξης έχει συνάρτηση μεταφοράς της μορφής :

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$$

όπου K το λεγόμενο κέρδος και T η σταθερά χρόνου της εγκατάστασης. Όπως έχουμε ήδη δει, εγκαταστάσεις 1^{ης} τάξης είναι το σύστημα ελέγχου ταχύτητας κινητήρα συνεχούς ρεύματος και το απλό θερμικό σύστημα. Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου μετά την επιβολή αναλογικού ελέγχου, γίνεται :

$$\mathbf{G_c(s)} = \left(\frac{CG}{1 + CG} \right) = \left(\frac{K_p \frac{K}{Ts + 1}}{1 + K_p \frac{K}{Ts + 1}} \right) = \left(\frac{K_p K}{Ts + 1 + K_p K} \right) = \left(\frac{\left(\frac{K_p K}{1 + K_p K} \right)}{\left(\frac{T}{1 + K_p K} \right) s + 1} \right) = \frac{K'}{T's + 1}$$

Το σύστημα συνεπώς κλειστού βρόχου με αναλογικό έλεγχο, εξακολουθεί να είναι 1^{ης} τάξης, με διαφοροποιημένα όμως, τόσο το κέρδος του K' όσο και η σταθερά χρόνου του T' . Ειδικά για την τελευταία, παρατηρήστε ότι είναι πάντα μικρότερη από αυτή του αρχικού, άρα το σύστημα αντιδρά πιο γρήγορα. Δείτε επίσης ότι, όσο μεγαλύτερο είναι το K_p , τόσο μικρότερη γίνεται η σταθερά αυτή.

Ας δούμε τώρα το σφάλμα μόνιμης κατάστασης, e_{ss} , ενός τέτοιου συστήματος σε είσοδο βαθμίδας μεγέθους A , χωρίς παρουσία διαταραχών. Ισχύει δηλαδή :

$$X(s) = \frac{A}{s} \text{ και } D(s) = 0$$

Τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα (Σχέση 4) :

$$e_{ss} = \left(\frac{d_c(0)d_G(0)}{d_c(0)d_G(0) + n_c(0)n_G(0)} \right) A = \left(\frac{1(T * 0 + 1)}{1(T * 0 + 1) + K_p K} \right) A = \frac{A}{1 + K_p K}$$

Το αναπόφευκτο σε συστήματα 1^{ης} τάξης σφάλμα μόνιμης κατάστασης υπάρχει, αλλά μειώνεται δραστικά με αύξηση του K_p .

Το σφάλμα μόνιμης κατάστασης για «ξαφνική» (είσοδος βαθμίδας) διαταραχή, μεγέθους D_0 , σύμφωνα και πάλι με την προηγούμενη ανάλυση (Σχέση 5), είναι :

$$e_{ss} = - \left(\frac{d_c(0)n_G(0)}{d_c(0)d_G(0) + n_c(0)n_G(0)} \right) D_0 = - \left(\frac{1K}{1(T * 0 + 1) + K_p K} \right) D_0 = \frac{KD_0}{1 + K_p K}$$

Παρατηρούμε και πάλι την ευεργετική επίδραση του κλειστού βρόχου και του απλού αναλογικού ελέγχου : Το σφάλμα μεγέθους KD_0 , που θα επέφερε η διαταραχή μεγέθους D_0 , διαιρείται με το μέγεθος $(1+K_p K)$ που είναι πάντα μεγαλύτερο της μονάδας. Μειώνεται δηλαδή και μάλιστα τόσο περισσότερο, όσο αυξάνει το K_p του αναλογικού ελέγχου.

Δράση του αναλογικού ελέγχου σε εγκατάσταση 2^{ης} τάξης

Οι εγκαταστάσεις 2^{ης} τάξης έχουν συνάρτηση μεταφοράς της μορφής :

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)}$$

Όπου το $d_G(s)$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Ας εξετάσουμε την ειδικότερη περίπτωση που η συνάρτηση μεταφοράς είναι τής μορφής :

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

Όπως έχουμε δει, αυτή τη μορφή έχει η συνάρτηση μεταφοράς του κινητήρα DC σε λειτουργία ελέγχου θέσης. Σύμφωνα με τα προηγούμενα (σχέση 3), η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου γίνεται :

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{n_c(s)n_G(s)}{d_c(s)d_G(s) + n_c(s)n_G(s)} = \frac{K_p K}{(1)[s(Ts + 1)] + K_p K} = \frac{K_p K}{Ts^2 + s + K_p K} \\ &= \frac{K_p K / T}{s^2 + (1/T)s + K_p K / T} \end{aligned}$$

Πρόκειται για ένα τυπικό σύστημα 2^{ης} τάξης, με κυκλική συχνότητα ω_n και απόσβεση ζ , για τα οποία μεγέθη ισχύει :

$$\omega_n^2 = \frac{K_p K}{T} \quad \text{και} \quad 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}$$

Παρατηρούμε ότι, όταν μεταβάλλεται το K_p (η σταθερά του αναλογικού ελέγχου δηλαδή), αλλάζει η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος (κλειστού βρόχου) : Αλλάζει δηλαδή, τόσο η κυκλική συχνότητα όσο και η απόσβεση. Αυξανόμενου του K_p , αυξάνει η κυκλική συχνότητα, άρα και η ταχύτητα με την οποία αντιδρά το σύστημα, όμως ταυτόχρονα μειώνεται η απόσβεση και το σύστημα κινδυνεύει! Δεν μπορεί κανείς επιλέγοντας κάποια τιμή του K_p να ελέγξει ταυτόχρονα και τα δύο αυτά μεγέθη.

Σφάλμα μόνιμης κατάστασης για εντολή βαθμίδας μεγέθους A.

Όπως έχουμε αναλύσει γενικότερα, αφού η εγκατάσταση έχει ελεύθερο ολοκληρωτή, το σφάλμα αυτό θα είναι μηδέν. Επιβεβαιώνουμε απλώς εδώ. Ισχύει (σχέση 4) :

$$e_{ss} = \left(\frac{d_c(0)d_G(0)}{d_c(0)d_G(0) + n_c(0)n_G(0)} \right) A = \left(\frac{(1)[0(T * 0 + 1)]}{(1)[0(T * 0 + 1)] + K_p K} \right) A = \left(\frac{0}{0 + K_p K} \right) A = 0$$

Σφάλμα εξ αιτίας ξαφνικής εμφάνισης διαταραχής μεγέθους D_0

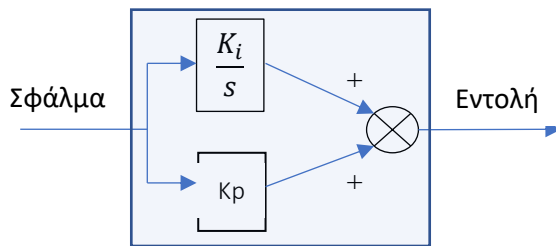
Γνωρίζουμε από την γενικότερη ανάλυση, ότι το σφάλμα αυτό δεν εξαλείφεται με αναλογικό έλεγχο. Επιβεβαιώνουμε εδώ. Από την σχέση (5) :

$$e_{ss} = - \left(\frac{d_c(0)n_G(0)}{d_c(0)d_G(0) + n_c(0)n_G(0)} \right) D_0 = - \left(\frac{1K}{0 + K_p K} \right) D_0 = - \frac{D_0}{K_p}$$

Που επιβεβαιώνει και το γενικότερο γνώρισμα του αναλογικού ελέγχου : Ότι δηλαδή αυξανόμενου του K_p μειώνεται το σφάλμα μόνιμης κατάστασης.

Αναλογικός + Ολοκληρωτικός Έλεγχος (Proportional + Integral, PI Control)

Στον απλό αναλογικό έλεγχο, προστίθεται τώρα μια νέα «δράση» : Το σφάλμα ολοκληρώνεται στο χρόνο, το ολοκλήρωμα πολλαπλασιάζεται επί μια σταθερά K_i και το αποτέλεσμα δημιουργεί μια εντολή προς την εγκατάσταση, επί πλέον αυτής του αναλογικού ελέγχου.



Η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή είναι :

$$C(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s}$$

$$n_c(s) = K_p s + K_i, \quad d_c(s) = s$$

Επίδραση της Αναλογικής – Ολοκληρωτικής δράσης ελέγχου στην δυναμική συμπεριφορά του συστήματος κλειστού βρόχου.

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου, γίνεται τώρα (Σχέση 3) :

$$G_c(s) = \frac{n_c(s)n_G(s)}{d_c(s)d_G(s) + n_c(s)n_G(s)} = \frac{(K_p s + K_i)n_G(s)}{s d_G(s) + (K_p s + K_i)n_G(s)}$$

Παρατηρούμε, ότι ο βαθμός του πολυώνυμου του παρονομαστή έχει αυξηθεί, σε σχέση με αυτό του ανοικτού βρόχου, κατά ένα – εξ αιτίας του όρου $s d_G(s)$. Αυτό σημαίνει, ότι η δυναμική συμπεριφορά έχει «δυσκολέψει». Ένα σύστημα π.χ. 1^{ης} τάξης, το οποίο δεν εμφανίζει ποτέ ταλαντωτική συμπεριφορά, θα γίνει τώρα 2^{ης} τάξης και άρα μπορεί, με κακή επιλογή των παραμέτρων K_p και K_i του ελεγκτή, να οδηγηθεί σε αστάθεια.

Έχει επίσης προσθεθεί ένας μηδενιστής στο σύστημα, στην θέση $-\frac{K_i}{K_p}$, ο οποίος επηρεάζει επίσης δευτερευόντως την δυναμική συμπεριφορά του συστήματος κλειστού βρόχου.

Επίδραση της Αναλογικής – Ολοκληρωτικής δράσης ελέγχου στα σφάλματα μόνιμης κατάστασης. Τόσο το σφάλμα μόνιμης κατάστασης για την παρακολούθηση εισόδου $X(s)=A/s$, (Σχέση 4) :

$$\left(\frac{d_c(\mathbf{0})d_G(\mathbf{0})}{d_c(\mathbf{0})d_G(\mathbf{0}) + n_c(\mathbf{0})n_G(\mathbf{0})} \right) A$$

όσο και αυτό λόγω ξαφνικής διαταραχής μεγέθους D_0 , (Σχέση 5) :

$$- \left(\frac{d_c(\mathbf{0})n_G(\mathbf{0})}{d_c(\mathbf{0})d_G(\mathbf{0}) + n_c(\mathbf{0})n_G(\mathbf{0})} \right) D_0$$

έχουν τον όρο $d_c(\mathbf{0})$ στον αριθμητή, που για την περίπτωση μας όμως, δεδομένου ότι $d_c(s) = s$, είναι μηδέν. Άρα τα σφάλματα αυτά μηδενίζονται! Ο ολοκληρωτικός όρος εξαλείφει τα σφάλματα μόνιμης κατάστασης.

Δράση του PI ελέγχου σε εγκατάσταση 1^{ης} τάξης

Κάθε εγκατάσταση 1^{ης} τάξης έχει συνάρτηση μεταφοράς της μορφής :

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$$

Οπότε, η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου θα γίνει :

$$G_c(s) = \frac{(K_p s + K_i) n_G(s)}{s d_G(s) + (K_p s + K_i) n_G(s)} = \frac{(K_p s + K_i) K}{s(Ts + 1) + (K_p s + K_i) K} = \frac{\frac{(K_p s + K_i) K}{T}}{s^2 + \left(\frac{K_p K + 1}{T}\right) s + \frac{K_i K}{T}}$$

Το σύστημα είναι τώρα 2^{ης} τάξης, οπότε ενδέχεται να ταλαντώνεται ή ακόμη και να οδηγηθεί σε αστάθεια αν δεν επιλεγούν κατάλληλες τιμές για τα K_p και K_i . Η επιλογή των εν λόγω παραμέτρων («κερδών»), μπορεί να γίνει αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα συμπεριφέρεται όπως περίπου ένα αντίστοιχο τυπικό σύστημα 2^{ης} τάξης χωρίς τον μηδενιστή – κάτι που ισχύει γενικά. Μπορούμε τότε να θεωρήσουμε ότι για την κυκλική του συχνότητα ω_n και την απόσβεση ζ , ισχύει :

$$\omega_n^2 = \frac{K_i K}{T} \quad \text{και} \quad 2\zeta\omega_n = \frac{K_p K + 1}{T}$$

Οπότε, μπορούμε από τις παραπάνω σχέσεις να επιλέξουμε K_i και K_p τέτοια που το σύστημά μας να έχει επιθυμητή τόσο «ταχύτητα αντίδρασης, ω_n » όσο και απόσβεση ζ . Στην συνέχεια, έχοντας την τελική συνάρτηση μεταφοράς, πρέπει κανείς να δει πως πραγματικά συμπεριφέρεται το σύστημα βρίσκοντας την απόκρισή του σε είσοδο βαθμίδας – είτε αναλυτικά είτε με την βοήθεια του Simulink.

Δράση του PI ελέγχου σε εγκατάσταση 2^{ης} τάξης

Όπως αναφέρθηκε στις γενικές παρατηρήσεις για την δράση του PI ελεγκτή, η τάξη της εγκατάστασης γίνεται 3. Ο παρονομαστής δηλαδή είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Προστίθεται επίσης ένας μηδενιστής στη συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται κατά βάση από τους πόλους του, τις ρίζες δηλαδή του πολυωνύμου του παρονομαστή. Στην προκειμένη περίπτωση δεν μπορεί κανείς να «τοποθετήσει» όπου θέλει τους τρεις πόλους ρυθμίζοντας μόνο δύο παραμέτρους – τα K_i και K_p δηλαδή. Αυτό σημαίνει ότι ενδέχεται το σύστημα να μην μπορεί να ρυθμισθεί σωστά.

Ας δούμε ως παράδειγμα, ένα συγκεκριμένο σύστημα δεύτερης τάξης, το σύστημα ελέγχου γωνίας στροφής κινητήρα συνεχούς ρεύματος. Η συνάρτηση μεταφοράς του είναι :

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

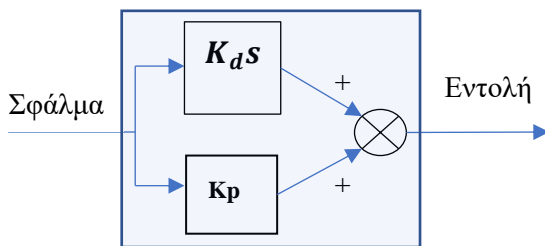
Οπότε, η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου θα γίνει :

$$G_c(s) = \frac{(K_p s + K_i) n_G(s)}{s d_G(s) + (K_p s + K_i) n_G(s)} = \frac{(K_p s + K_i) K}{s^2 (Ts + 1) + (K_p s + K_i) K} = \frac{K_p K s + K_i K}{Ts^3 + s^2 + K_p K s + K_i K}$$

Αναλογικός + Διαφορικός Έλεγχος (Proportional + Derivative, PD Control)

Στον απλό αναλογικό έλεγχο, προστίθεται τώρα μια νέα «δράση» : Υπολογίζεται η πρώτη παράγωγος του σφάλματος στο χρόνο, η παράγωγος πολλαπλασιάζεται επί μια σταθερά K_d και το αποτέλεσμα δημιουργεί μια εντολή προς την εγκατάσταση, επί πλέον αυτής του αναλογικού ελέγχου.

Η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή είναι :



$$C(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)} = K_p + K_d s$$

$$n_c(s) = K_p + K_d s, \quad d_c(s) = 1$$

Ο διαφορικός έλεγχος βοηθά γενικά στην ευστάθεια των συστημάτων. Η παράγωγος του σφάλματος δείχνει τον ρυθμό μεταβολής του και άρα είναι ένα μέτρο του κατά πόσο το σύστημα τείνει να εκτραπεί από την επιθυμητή θέση. Η αντίστοιχη εντολή : $K_d \frac{de}{dt}$ προσπαθεί να επαναφέρει το σύστημα όταν αυτό τείνει να εκτραπεί άρα το κάνει πιο ευσταθές.

Επίδραση της Αναλογικής – Διαφορικής δράσης ελέγχου στην δυναμική συμπεριφορά του συστήματος κλειστού βρόχου.

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου, γίνεται τώρα (Σχέση 3) :

$$G_c(s) = \frac{n_c(s) n_G(s)}{d_c(s) d_G(s) + n_c(s) n_G(s)} = \frac{(K_p + K_d s) n_G(s)}{1 d_G(s) + (K_p + K_d s) n_G(s)}$$

Παρατηρούμε ότι η τάξη του συστήματος, ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή δηλαδή, δεν αλλάζει. Προστίθεται απλώς ένας μηδενιστής στο σύστημα στην θέση : $-\frac{K_p}{K_d}$.

Επίδραση της Αναλογικής – Διαφορικής δράσης ελέγχου σε εγκατάσταση 1^{ης} τάξης

Όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει, μια εγκατάσταση 1^{ης} τάξης, ρυθμίζεται επαρκώς με κατάλληλο PI ελεγκτή. Συνεπώς δεν απαιτεί διαφορική δράση ελέγχου.

Επίδραση της Αναλογικής – Διαφορικής δράσης ελέγχου σε εγκατάσταση 2^{ης} τάξης

Ας εξετάσουμε την ειδικότερη περίπτωση που η συνάρτηση μεταφοράς είναι τής μορφής :

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

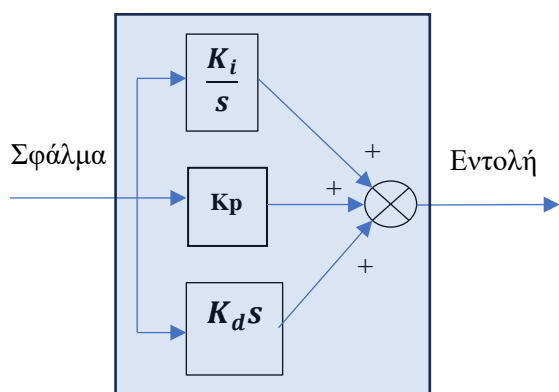
Όπως έχουμε δει, αυτή τη μορφή έχει η συνάρτηση μεταφοράς του κινητήρα DC σε λειτουργία ελέγχου θέσης. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου γίνεται :

$$G_c(s) = \frac{(K_p + K_d s)n_G(s)}{1d_G(s) + (K_p + K_d s)n_G(s)} = \frac{(K_p + K_d s)K}{s(Ts + 1) + (K_p + K_d s)K} = \frac{\frac{(K_p + K_d s)K}{T}}{s^2 + \left(\frac{K_d K + 1}{T}\right)s + \frac{K_p K}{T}}$$

Κατά ακριβή αντιστοιχία με την δράση του PI ελεγκτή σε εγκατάσταση 1^{ης} τάξης (παρατηρήστε πόσο μοιάζουν οι αντίστοιχες συναρτήσεις μεταφοράς κλειστού βρόχου), μπορούμε από τις παραπάνω σχέσεις να επιλέξουμε K_p και K_d τέτοια που το σύστημά μας να έχει επιθυμητή τόσο «ταχύτητα αντίδρασης, ω_n » όσο και απόσβεση ζ . Στην συνέχεια, έχοντας την τελική συνάρτηση μεταφοράς, πρέπει κανείς να δει πως πραγματικά συμπεριφέρεται το σύστημα, βρίσκοντας την απόκρισή του σε είσοδο βαθμίδας : είτε αναλυτικά είτε με την βοήθεια του Simulink.

Αναλογικός + Ολοκληρωτικός + Διαφορικός Έλεγχος (Proportional + Integral + Derivative, PID Control)

Στις προηγούμενες παραγράφους αναλύθηκε η δράση των βασικών ελεγκτών και η επίδρασή τους στην δυναμική συμπεριφορά και τα σφάλματα μόνιμης κατάστασης. Ειδικότερα, για τον ολοκληρωτικό έλεγχο βρέθηκε ότι εξαλείφει τα σφάλματα μόνιμης κατάστασης σε κάθε περίπτωση. Είναι συνεπώς πολύ σπουδαία η συνεισφορά του. Είδαμε όμως επίσης, ότι αυξάνει κατά ένα την τάξη του συστήματος, οπότε κατά κανόνα χειροτερεύει την δυναμική του συμπεριφορά. Είδαμε π.χ., ότι στην περίπτωση συστήματος 2^{ης} τάξης, η προσθήκη του ολοκληρωτικού ελέγχου έχει κάνει το σύστημα 3^{ης} τάξης. Ένα τέτοιο σύστημα έχει τρεις πόλους. Με επιλογή δύο μόνο παραμέτρων, των κερδών δηλαδή K_p και K_i , που εμφανίζονται στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, είναι αδύνατον να επιλέξουμε αυθαίρετα τις τρεις ρίζες του, δηλαδή τους πόλους του συστήματος, δηλαδή να ελέγξουμε πλήρως την δυναμική του συμπεριφορά. Το σύστημα μπορεί να γίνει ταλαντωτικό ή και τελείως ασταθές. Ειδικά στην περίπτωση του συστήματος 2^{ης} τάξης, μια επιπλέον παράμετρος θα αρκούσε.



Η προσθήκη διαφορικού όρου στον έλεγχο, δηλαδή ο συνδυασμός και των τριών δράσεων πλέον, προσφέρει αυτή την δυνατότητα. Ο ελεγκτής είναι ελεγκτής «τριών όρων», ονομάζεται «PID ελεγκτής» και συνάρτηση μεταφοράς του είναι :

$$C(s) = \frac{n_C(s)}{d_C(s)} = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

$$n_C(s) = K_d s^2 + K_p s + K_i, \quad d_C(s) = s$$

Ας δούμε τώρα την επίδραση του ελεγκτή αυτού στον έλεγχο του συστήματος ελέγχου γωνιακής θέσης, του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς είναι :

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου γίνεται τότε :

$$G_c(s) = \frac{(K_d s^2 + K_p s + K_i)n_G(s)}{s d_G(s) + (K_d s^2 + K_p s + K_i)n_G(s)} = \frac{(K_d s^2 + K_p s + K_i)K}{s[s(Ts + 1)] + (K_d s^2 + K_p s + K_i)K}$$

$$= \frac{(K_d s^2 + K_p s + K_i)K}{Ts^3 + (KK_d + 1)s^2 + (KK_p)s + (KK_i)}$$

Παρατηρούμε ότι με «κατάλληλη» επιλογή τριών αριθμών K_p , K_i και K_d , που εμφανίζονται ως παράμετροι στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο τρίτου βαθμού, μπορεί κανείς να το κάνει να έχει οποιεσδήποτε επιθυμητές ρίζες. Με άλλα λόγια να «τοποθετήσει» όπως λέμε τους πόλους σε επιθυμητές θέσεις και άρα να κάνει το σύστημα να συμπεριφέρεται «σωστά». Να το τιθασεύσει!

Μορφές χαρακτηριστικού πολυωνύμου για «καλή» δυναμική συμπεριφορά

A. Μορφή Butterworth

$$s^3 + 2\omega_n s^2 + 2\omega_n^2 s + \omega_n^3$$

B. Μορφή κριτηρίου ITAE

$$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3$$

B. Μορφή ελαχίστου χρόνου αποκατάστασης

$$s^3 + 1.55\omega_n s^2 + 2.10\omega_n^2 s + \omega_n^3$$

Σε περιπτώσεις συστημάτων ανώτερης τάξης, ενδέχεται κάτι τέτοιο να μην είναι πάντα εφικτό. Στις δύσκολες αυτές περιπτώσεις απαιτούνται πιο προχωρημένες τεχνικές ελέγχου, όπως ανάδραση κατάστασης.

2. ΕΛΕΓΧΟΣ ΜΕ ΠΡΟΣΩ ΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ (Feed Forward Control)

Θεωρητικά σκεπτόμενος κανείς, θα μπορούσε να πει ότι μια εγκατάσταση με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ θα μπορούσε να ελεγχθεί «τέλεια» από ένα ελεγκτή με συνάρτηση μεταφοράς $C(s) = 1/G(s)$ σε συνδεσμολογία ανοικτού βρόχου (Σχήμα). Να υλοποιήσει δηλαδή κανείς ένα ελεγκτή «πρόσω τροφοδότησης» (feed forward).



Πράγματι, η συνάρτηση μεταφοράς όλου του συστήματος γίνεται τότε :

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = C(s)G(s) = 1$$

Οπότε, το ελεγχόμενο μέγεθος $Y(s)$ παίρνει ακριβώς την τιμή $X(s)$ που θέλουμε και μάλιστα ακαριαία!

Η σκέψη αυτή, είναι από τεχνολογικής άποψης «αφελής» για τρεις τουλάχιστον λόγους :

- Δεν μπορεί κανείς να βρει «ακριβώς» την συνάρτηση μεταφοράς μιας εγκατάστασης. Μικρές έστω αποκλίσεις από το πραγματικό, θα οδηγήσουν σε απρόβλεπτα αποτελέσματα το σύστημα ελέγχου ανοικτού βρόχου.
- Δεν λαμβάνονται υπ όψη οι διαταραχές
- Δεν λαμβάνονται υπ' όψη οι περιορισμοί ισχύος που έχει το σύστημα

Η ιδέα πάντως της πρόσω τροφοδότησης, βρίσκει εφαρμογή σε ένα τουλάχιστον, πολύ διάσημο, σύστημα ελέγχου : Τον σερβομηχανισμό ελέγχου γωνιακής θέσης. Όταν ο μηχανισμός αυτός υλοποιείται με ηλεκτρικό κινητήρα συνεχούς ρεύματος, η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου είναι :

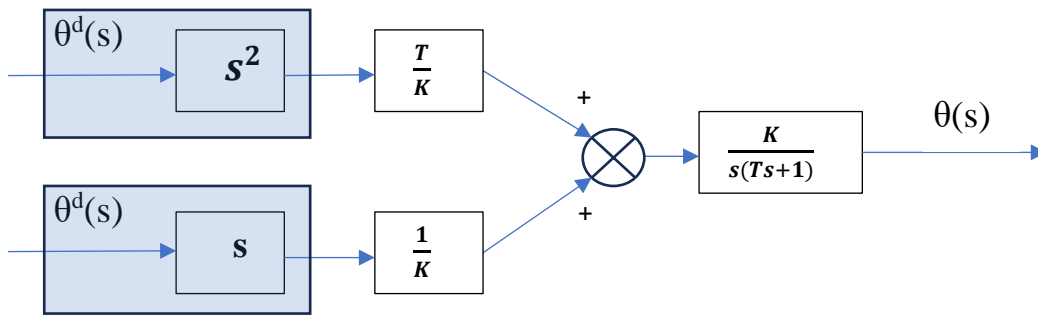
$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

Οπότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο ελεγκτής πρόσω τροφοδότησης θα πρέπει να έχει συνάρτηση μεταφοράς :

$$C(s) = \frac{s(Ts + 1)}{K} = \frac{T}{K}s^2 + \frac{1}{K}s$$

Και το σύστημα συνολικά θα γίνει :



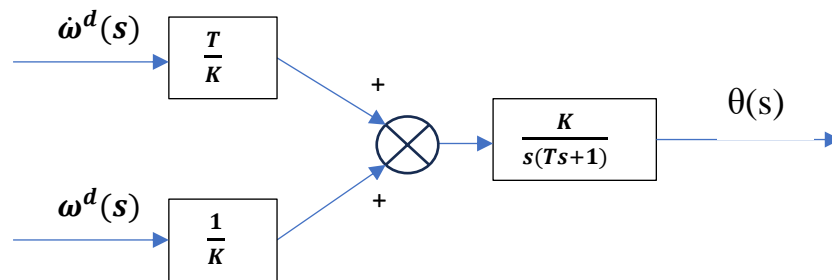


Παρατηρούμε ότι :

$\theta^d(s)s = \omega^d(s)$, δηλαδή η επιθυμητή γωνιακή ταχύτητα κίνησης και

$\theta^d(s)s^2 = \dot{\omega}^d(s)$, δηλαδή η επιθυμητή γωνιακή επιτάχυνση κίνησης

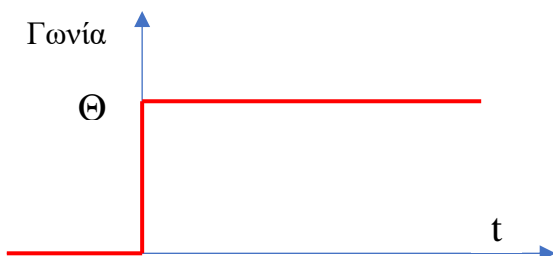
Οπότε το σύστημα ελέγχου γίνεται τώρα :



Για να οδηγήσουμε δηλαδή τον μηχανισμό σε κάποια επιθυμητή θέση $\theta(s)$, αρκεί να δώσουμε στο σύστημα εντολή της επιθυμητής ταχύτητας και επιτάχυνσης με την οποία θέλουμε να κινηθεί και ο μηχανισμός να διαθέτει την ισχύ να ακολουθήσει τις εντολές αυτές!

Ας εξετάσουμε τρεις διαφορετικούς τρόπους για να κινήσουμε τον μηχανισμό από μια θέση (έστω την γωνία 0) στην γωνία Θ .

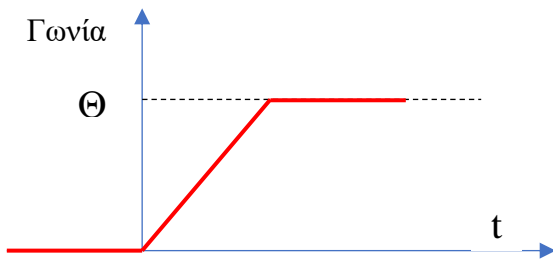
1. Με εντολή βαθμίδας



Ζητούμε από τον μηχανισμό να κινηθεί ακαριαία από την γωνία 0 στην γωνία Θ . Η ταχύτητά του τότε την χρονική στιγμή 0 πρέπει να είναι άπειρη. Άρα στο σύστημά μας πρέπει να δώσουμε μια άπειρη εντολή, που προφανώς δεν μπορεί να ακολουθήσει λόγω περιορισμού ισχύος.

Η «μετάβαση» αυτή είναι αδύνατη!

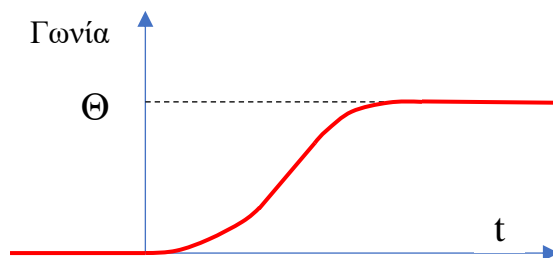
2. Με «σταδιακή» μετάβαση - εντολή ράμπας



Η «μετάβαση» είναι και πάλι αδύνατη!

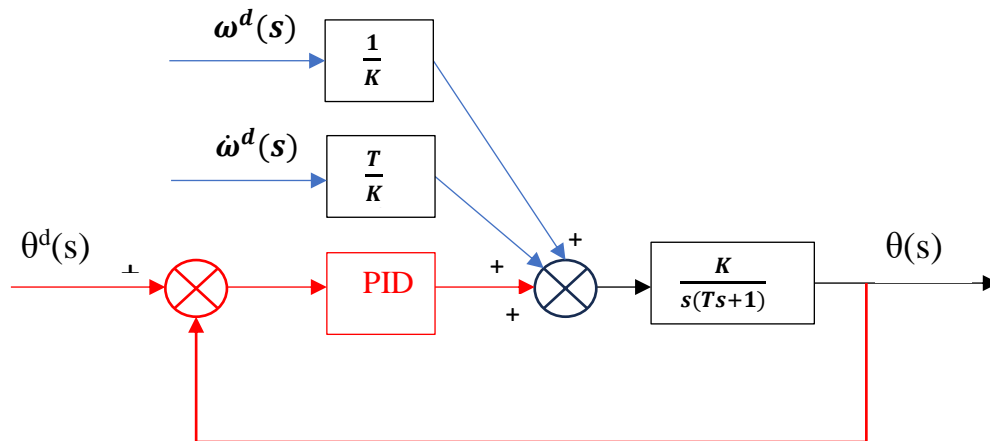
Ζητούμε από τον μηχανισμό να κινηθεί από την γωνία 0 στην γωνία Θ με ορισμένη ταχύτητα ω^d - σχήμα. Αν ζητηθεί από το σύστημα να αποκτήσει την παραπάνω ταχύτητα ακαριαία την χρονική στιγμή 0, τότε είναι σαν να ζητούμε από αυτό άπειρη επιτάχυνση τη στιγμή εκείνη, δηλαδή πρέπει να δώσουμε μια άπειρη εντολή, που προφανώς και πάλι δεν μπορεί να ακολουθήσει λόγω περιορισμού ισχύος.

3. «Σταδιακή» μετάβαση με πιο έξυπνο τρόπο



Ζητούμε από τον μηχανισμό να κινηθεί από την γωνία 0 στην γωνία Θ με συγκεκριμένη γωνιακή ταχύτητα ω^d και συγκεκριμένη γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}^d$ - σχήμα. Αν ο κινητήρας διαθέτει την απαιτούμενη ισχύ για μια τέτοια κίνηση, τότε η κίνηση είναι εφικτή !

Ο έλεγχος με πρόσω τροφοδότηση, όπως έχει ήδη αναφερθεί, δεν πρέπει σε καμία περίπτωση να είναι ο μοναδικός τρόπος ελέγχου. Στην περίπτωση του σερβομηχανισμού θέσης που εξετάζουμε, συνδυάζεται περίφημα με τον κλασικό έλεγχο με ανάδραση. Το συνολικό σύστημα ελέγχου έχει τότε την μορφή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Στην ουσία της, η πρόσω τροφοδότηση βοηθά το σύστημα κατά το ότι του στέλνει προκαταβολικά την απαραίτητη ροπή για να επιταχύνει και να διατηρήσει συγκεκριμένη ταχύτητα κίνησης. Ο βρόχος με την ανάδραση και τον PID ελεγκτή αναλαμβάνει όλα τα υπόλοιπα.

Εκτός από πρόσω τροφοδότηση επιθυμητής ταχύτητας και επιτάχυνσης, μπορεί κανείς να κάνει πρόσω τροφοδότηση και ροπής που αντιμετωπίζει ο μηχανισμός.

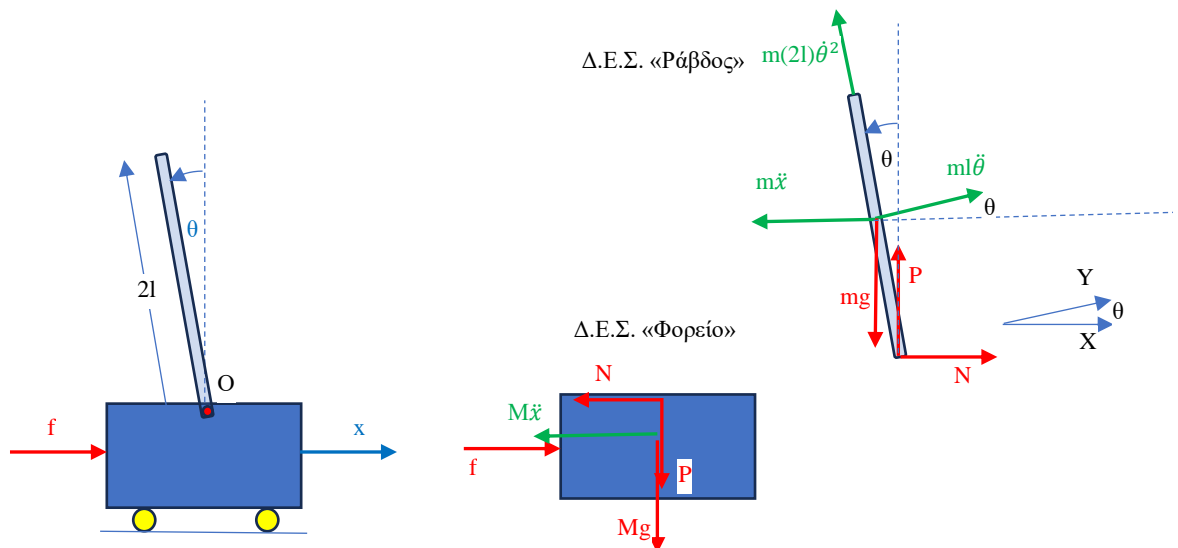
Η πρόσω τροφοδότηση επιθυμητής ταχύτητας και επιτάχυνσης καθώς και ροπής, βρίσκει σπουδαία εφαρμογή στον έλεγχο των ρομποτικών χειριστών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΑΝΕΣΤΡΑΜΜΕΝΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ Inverted Pendulum

Ένα από τα πλέον εμφατικά παραδείγματα συστημάτων στα οποία ο αυτόματος έλεγχος βρίσκει σπουδαία εφαρμογή, είναι το ανεστραμμένο εκκρεμές. Η δυναμική του είναι ίδια σχεδόν με την δυναμική ενός πυραύλου ή ενός «πατινιού» τύπου Segway. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται μια τυπική τέτοια διάταξη : Μια λεπτή και μακριά ράβδος είναι αρθρωμένη σε φορείο το οποίο μπορεί να κινηθεί χωρίς τριβές σε οριζόντια διεύθυνση υπό την επενέργεια της δύναμης f . Πως πρέπει να ελεγχθεί η δύναμη αυτή ώστε η ράβδος να ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση;



Διαισθητικά καταλαβαίνει κανείς ότι ένας τέτοιος έλεγχος δεν είναι εύκολος : Θα πρέπει απαραίτητως να προσδιορισθεί το δυναμικό μοντέλο του συστήματος και στη συνέχεια να αναζητηθεί κατάλληλος ελεγκτής σε ένα σύστημα κλειστού βρόχου.

Δυναμικό μοντέλο

Θα πρέπει να βρούμε μια σχέση ανάμεσα στην επιβαλλόμενη δύναμη και στην γωνία θ της ράβδου με την κατακόρυφο. Για να γίνει αυτό θεωρούμε ως «ελεύθερα» σώματα το φορείο και την ράβδο και εξετάζουμε την ισορροπία των δυνάμεων που ενεργούν σ' αυτά. Στο Σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις αυτές. Θεωρούμε παρατηρητή κινούμενο με τα σώματα, οπότε πρέπει να λάβουμε υπ' όψη τις αδρανειακές δυνάμεις που δέχονται τα σώματα εξ αιτίας των επιταχύνσεων που έχουν. Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις αυτές χρωματισμένες με πράσινο.

$2l$: Μήκος ράβδου, M : μάζα φορείου, m : μάζα ράβδου, J : Ροπή αδράνειας ράβδου περί άξονα διερχόμενο από το κέντρο βάρους

Ισορροπία ελευθέρου σώματος «φορείο»

Στο σώμα εκτός από την δύναμη f επενεργούν οι δυνάμεις P , N από την άρθρωση, το βάρος Mg και η αδρανειακή δύναμη $M\ddot{x}$ εξ αιτίας της επιτάχυνσης του κατά τον άξονα x .

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f - M\ddot{x} - N = 0 \quad (1)$$

Ισορροπία ελευθέρου σώματος «Ράβδος»

Στο σώμα εκτός από τις δυνάμεις P , N από την άρθρωση και το βάρος mg , επενεργούν οι αδρανειακές δυνάμεις. Το σώμα εκτελεί συγχρόνως μεταφορική κίνηση κατά τον άξονα x με γραμμική επιτάχυνση \ddot{x} και περιστροφική κίνηση με γωνιακή επιτάχυνση $\ddot{\theta}$.

- $m\ddot{x}$: Αδρανειακή δύναμη εξ αιτίας επιτάχυνσης
- $ml\ddot{\theta}$: Αδρανειακή δύναμη εξ αιτίας επιτροχίου επιταχύνσεως
- $m(2l)\dot{\theta}^2$: Φυγόκεντρος δύναμη εξ αιτίας περιστροφής περί το O

Ισορροπία δυνάμεων – ανάλυση ως προς το μη ορθογώνιο σύστημα XY του σχήματος:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N + (ml\ddot{\theta})\cos\theta - m\ddot{x} - (2ml\dot{\theta}^2)\sin\theta = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\theta + P\sin\theta + ml\ddot{\theta} - (m\ddot{x})\cos\theta - (mg)\sin\theta = 0 \quad (3)$$

Θεωρούμε τώρα την περιστροφή της ράβδου περί το κέντρο μάζας της υπό την επενέργεια των ροπών που δημιουργούν οι δυνάμεις P και N :

$$\sum M = J\ddot{\theta} \Rightarrow (N\cos\theta)l + (P\sin\theta)l = J\ddot{\theta} \quad (4)$$

Γραμμικοποίηση

Το σύνολο των διαφορικών εξισώσεων 1 .. 4 αποτελεί το δυναμικό μοντέλο του συστήματος. Αν κανείς απαλείψει τις εσωτερικές δυνάμεις P και N καθώς και την γραμμική επιτάχυνση \ddot{x} μπορεί να βρει μια σχέση που συνδέει την επιβαλλόμενη δύναμη f με την γωνία στροφής θ της ράβδου. Παρατηρούμε ότι οι διαφορικές εξισώσεις είναι μη γραμμικές. Πριν προχωρήσει κανείς στην εν λόγω απαλειφή, μπορεί να γραμμικοποιήσει τις εξισώσεις «γύρω» από την θέση ισορροπίας $\theta=0$. Όταν η εν λόγω γωνία είναι μικρή, ισχύει:

$$\theta \cong 0 \Rightarrow \cos\theta = 1, \quad \sin\theta = \theta \quad (\theta: rad)$$

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε την γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$ περίπου μηδέν. Οπότε:

$$f - M\ddot{x} - N = 0$$

$$N + (ml\ddot{\theta}) - m\ddot{x} = 0$$

$$N + P\theta + ml\ddot{\theta} - (m\ddot{x}) - (mg)\theta = 0$$

$$Nl + P\theta l = J\ddot{\theta}$$

Μετά την ως άνω απαλειφή, προκύπτει το ζητούμενο δυναμικό μοντέλο:

$$\left[\left(\frac{M+m}{m} \right) \left(\frac{J}{l} \right) + (M+m)l - ml \right] \ddot{\theta}(t) - [(M+m)g]\theta(t) = f(t)$$

Μετασχηματίζουμε κατά Laplace και έχουμε (μετά από πράξεις) την συνάρτηση μεταφοράς :

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{f(s)} = \frac{ml}{[(M+m)J + Mml^2]s^2 - (M+m)g}$$

Οι πόλοι του συστήματος είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή :

$$p_{1,2} = \mp \sqrt{\frac{(M+m)g}{(M+m)J + Mml^2}}$$

Ένας εξ αυτών είναι θετικός πραγματικός αριθμός, συνεπώς το σύστημα, όπως αναμενόταν, είναι ασταθές.

Έλεγχος κλειστού βρόχου με Αναλογικό – Διαφορικό (PD) ελεγκτή.

Ο Αναλογικός – Διαφορικός έλεγχος διατηρεί την τάξη του συστήματος και μας δίδει την δυνατότητα, με την ρύθμιση των δύο ανεξάρτητων κερδών του (K_p, K_d), να τοποθετήσουμε τους δύο πόλους του συστήματος κλειστού βρόχου σε επιθυμητές θέσεις. Να το ελέγξουμε πλήρως δηλαδή.

Μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου της εγκατάστασης ως εξής :

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} = \frac{A}{s^2 - B} \quad \left(\frac{rad}{N} \right)$$

Όπου :

$$A = \frac{ml}{[(M+m)J + Mml^2]} \quad \text{και} \quad B = \frac{(M+m)g}{[(M+m)J + Mml^2]}$$

Με έλεγχο PD η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου θα είναι (βλέπε σχετικό κεφάλαιο θεωρίας) :

$$G_c(s) = \frac{(K_p + K_d s)n_G(s)}{1d_G(s) + (K_p + K_d s)n_G(s)} = \frac{(K_p + K_d s)A}{(s^2 - B) + (K_p + K_d s)A} = \frac{(K_p + K_d s)A}{s^2 + (K_d A)s + (AK_p - B)}$$

Παράδειγμα

Έστω σύστημα με : $M = 0.5 \text{ kgr}, m = 0.2 \text{ Kgr}, l = 0.3 \text{ m}, J = 0.006 \text{ Kgr m}^2$

Είναι τότε : $A = 4.55$ και $B = 530$. Για καλή δυναμική συμπεριφορά, θα θεωρήσουμε και πάλι ότι το σύστημα συμπεριφέρεται όπως ένα τυπικό δευτεροτάξιο σύστημα χωρίς μηδενιστή – παρ' όλο που το δικό μας έχει ένα μηδενιστή. Χρησιμοποιούμε συνεπώς τις γνωστές σχέσεις :

$$2\zeta\omega_n = AK_d \quad \text{και} \quad \omega_n^2 = AK_p - B \quad T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Θέτουμε ως προδιαγραφή καλής συμπεριφοράς του συστήματος : $T_p = 0.15 \text{ s}$ και $\zeta = 0.7$.

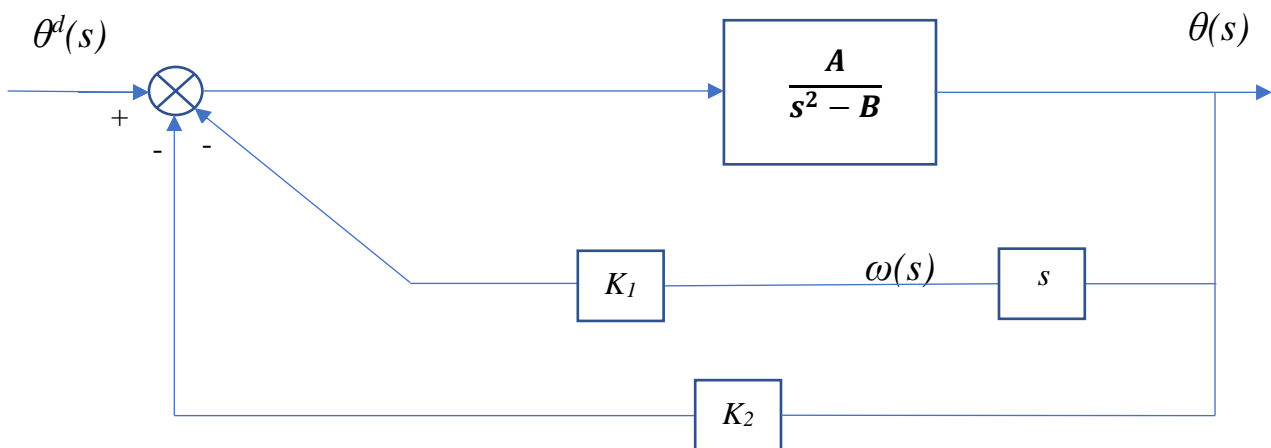
Από τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει τότε : $K_p = 305$ και $K_d = 9$

Έλεγχος με ανάδραση μεταβλητών κατάστασης

Ο Διαφορικός όρος στον ελεγκτή μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα : Ενισχύει τον θόρυβο των μετρήσεων και μπορεί να οδηγήσει το σύστημα σε αστάθεια αν δεν προστεθούν τα κατάλληλα φίλτρα.

Θα επιχειρήσουμε να ελέγξουμε/σταθεροποιήσουμε το σύστημα με ανάδραση μεταβλητών κατάστασης. Η αναπαράσταση ενός συστήματος στον χώρο κατάστασης (state space) και η μεθοδολογία για την ανάδραση μεταβλητών κατάστασης, μπορεί να γίνει με πολύ συστηματικό τρόπο, που ξεφεύγει όμως από τα πλαίσια ενός εισαγωγικού μαθήματος Αυτομάτου Ελέγχου.

Για το σύστημα που μελετούμε, ας επιχειρήσουμε να κάνουμε αρνητική ανάδραση τόσο της γωνίας όσο και της γωνιακής ταχύτητας του εκκρεμούς όπως δείχνει το σχήμα που ακολουθεί. Η γωνιακή ταχύτητα μπορεί είτε να υπολογισθεί με αριθμητική διαφώριση της θέσης, μέθοδος όμως που έχει αντίστοιχα προβλήματα με τον διαφορικό έλεγχο, είτε να μετρηθεί με την βοήθεια γυροσκοπίου τοποθετημένου πάνω στο εκκρεμές.



Για να βρούμε την συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος γράφουμε :

$$[\theta^d(s) - K_2\theta(s) - K_1s\theta(s)]\left(\frac{A}{s^2 - B}\right) = \theta(s) \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\frac{\theta(s)}{\theta^d(s)} = \mathbf{G}_c(s) = \frac{A}{s^2 + (AK_1)s + (AK_2 - B)}$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα μετά την ανάδραση των μεταβλητών κατάστασης εξακολουθεί να είναι δευτέρης τάξης, μάλιστα δε χωρίς μηδενιστή. Με ρύθμιση των κερδών K_1 και K_2 , κατά εντελώς αντίστοιχο τρόπο με αυτό που ακολουθήθηκε για τον PD ελεγκτή, μπορεί κανείς να σταθεροποιήσει το σύστημα.

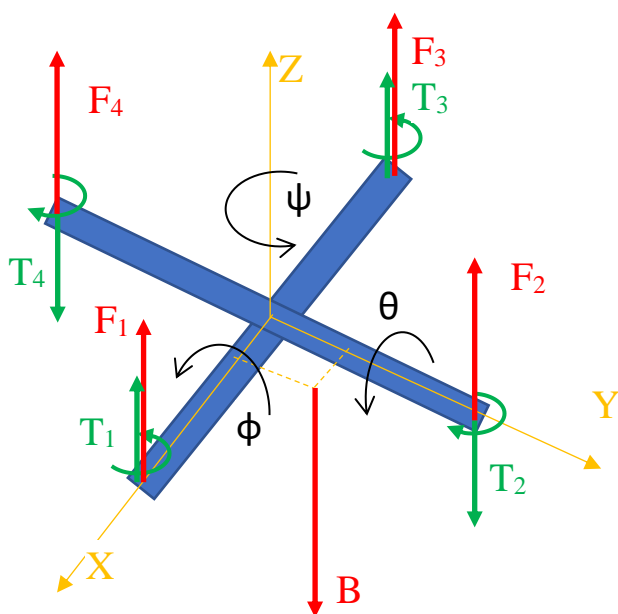
Μικρά ιπτάμενα οχήματα (drones)



Τα μικρού μεγέθους ιπτάμενα οχήματα και ειδικά η κατηγορία των τετρακόπτερων (quadcopters) έχουν γίνει πολύ φθηνά και αξιόπιστα τα τελευταία χρόνια. Η «άνθηση» αυτή οφείλεται αφ' ενός στις καλύτερες μπαταρίες που απαιτούνται για την κίνηση των ηλεκτρικών κινητήρων και αφ' ετέρου στα γυροσκόπια χαμηλού κόστους και καλής αξιοπιστίας που υπάρχουν διαθέσιμα. Οι ίδιες ως άνω τεχνολογίες ωθούν και την ανάπτυξη μεγαλύτερων ιπτάμενων οχημάτων μεγέθους

μικρού αυτοκινήτου που δεν έχουν απαγορευτικό κόστος.

Το σύστημα κίνησης ενός τετρακόπτερου



Ένα τέτοιο ιπτάμενο όχημα, διαθέτει τέσσερις ίδιους ηλεκτρικούς κινητήρες τοποθετημένους εντελώς συμμετρικά ως προς τον άξονα συμμετρίας του – άξονας Z στο σχήμα. Οι κινητήρες κινούν έλικες που παράγουν δυνάμεις F_i (ωθήσεις προς τα άνω) ικανές να εξισορροπήσουν το βάρος της κατασκευής και να ανυψώσουν το όχημα όταν κάτι τέτοιο απαιτείται. Το βάρος, γενικά, δεν διέρχεται από τον άξονα συμμετρίας του τετρακόπτερου, πράγμα που σημαίνει ότι οι δυνάμεις F_i που απαιτούνται για να ισορροπή η κατασκευή σε οριζόντιο επίπεδο, δεν είναι ίσες. Για να περιστραφεί κάθε έλικα απαιτεί από τον κινητήρα να της εξασκήσει ροπή. Ο τελευταίος «μεταβιβάζει» την ροπή

αυτή στο σώμα του τετρακόπτερου με αντίθετο πρόσημο (δράση – αντίδραση). Στο διπλανό σχήμα, φαίνεται σχεδιασμένο το διάγραμμα του ελεύθερου σώματος «σώμα τετρακόπτερου». Οι τέσσερις ροπές, ως διανύσματα, είναι παράλληλες στον άξονα Z. Οι δυνάμεις, δημιουργούν ροπές που δεν έχουν συνιστώσα κατά τον άξονα αυτό⁶. Άρα για να ισορροπούν οι ροπές κατά τον άξονα Z, πρέπει κάποιες από τις T_i να είναι θετικές και κάποιες αρνητικές. Για λόγους απλότητας, δύο απέναντι κινητήρες περιστρέφονται κατά μια φορά και οι άλλοι δύο κατά την αντίθετη, που σημαίνει ότι οι ροπές των δύο κινητήρων έχουν αντίθετο πρόσημο από τις ροπές των άλλων δύο. Με τον τρόπο αυτό είναι αρκετά εύκολο το συνολικό άθροισμα να γίνει μηδέν.

⁶ Θυμηθείτε από την Μηχανική, ότι η ροπή μιας δύναμης F παράλληλης στον άξονα Z είναι: $\vec{T} = (r_y F)\vec{i} - (r_x F)\vec{j}$.

Το τετρακόπτερο, ως στερεό σώμα, έχει 6 βαθμούς ελευθερίας. Τρεις περιστροφές και τρεις μετατοπίσεις. Σε σχέση με το σύστημα αξόνων του σχήματος, οι τρεις περιστροφές, μπορούν να θεωρηθούν ως αυτές περί τους άξονες X, Y και Z και να μετρηθούν με τις γωνίες ϕ, θ, ψ αντίστοιχα. Οι τρεις μετατοπίσεις, μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως οι μετατοπίσεις κατά μήκος των αξόνων X, Y, Z.

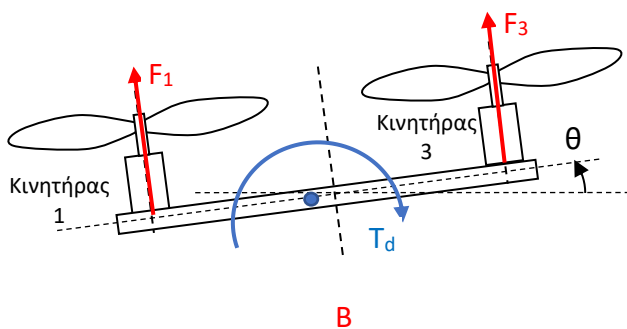
Για να περιστραφεί το τετρακόπτερο κατά μια από τις γωνίες ϕ και θ , αρκεί το να διαφοροποιηθούν δύο «απέναντι» δυνάμεις. Π.χ. για να αυξηθεί η γωνία ϕ , αρκεί να αυξηθεί κατά ΔF η δύναμη F_2 και να μειωθεί κατά το αντίστοιχο ποσό η F_4 . Αντίστοιχα για την θ . Ο «τρόπος» για να αλλάξει η γωνία ψ είναι διαφορετικός: Για να αυξηθεί, αρκεί να αυξηθούν οι στροφές, άρα και οι ροπές T_1 και T_3 κατά ΔT και να μειωθούν οι ροπές T_2 και T_4 κατά ΔT . Έτσι δημιουργείται θετική ροπή κατά τον άξονα Z που περιστρέφει το τετρακόπτερο γύρω από αυτόν.

Για να κινηθεί το όχημα κατά τον άξονα X, αρκεί να πάρει μια μικρή γωνία κλίσης θ . Τότε η συνισταμένη των F_1, F_3 και του βάρους, δημιουργούν μια δύναμη παράλληλη στον άξονα X που επιταχύνει το σώμα – δεξ σχήμα που ακολουθεί. Αντίστοιχα για κίνηση κατά μήκος του άξονα Y. Για κίνηση κατά τον άξονα Z, αρκεί να διαφοροποιηθούν συνολικά και οι τέσσερις δυνάμεις κατά το ίδιο ποσό.

Είναι φανερό από την παραπάνω ανάλυση, ότι αν ελέγξει κανείς «σωστά» τις 4 δυνάμεις F_i μπορεί να κινήσει το όχημα κατά οποιονδήποτε τρόπο. Οι δυνάμεις F_i εξαρτώνται (και μάλιστα σχεδόν γραμμικά) από τις γωνιακές ταχύτητες των αντίστοιχων ελίκων. Συνεπώς αν ελέγξει κανείς σωστά τις γωνιακές ταχύτητες των τεσσάρων ηλεκτρικών κινητήρων που κινούν τις έλικες, μπορεί να κινήσει το όχημα όπως επιθυμεί.

Σύστημα ελέγχου γωνίας θ

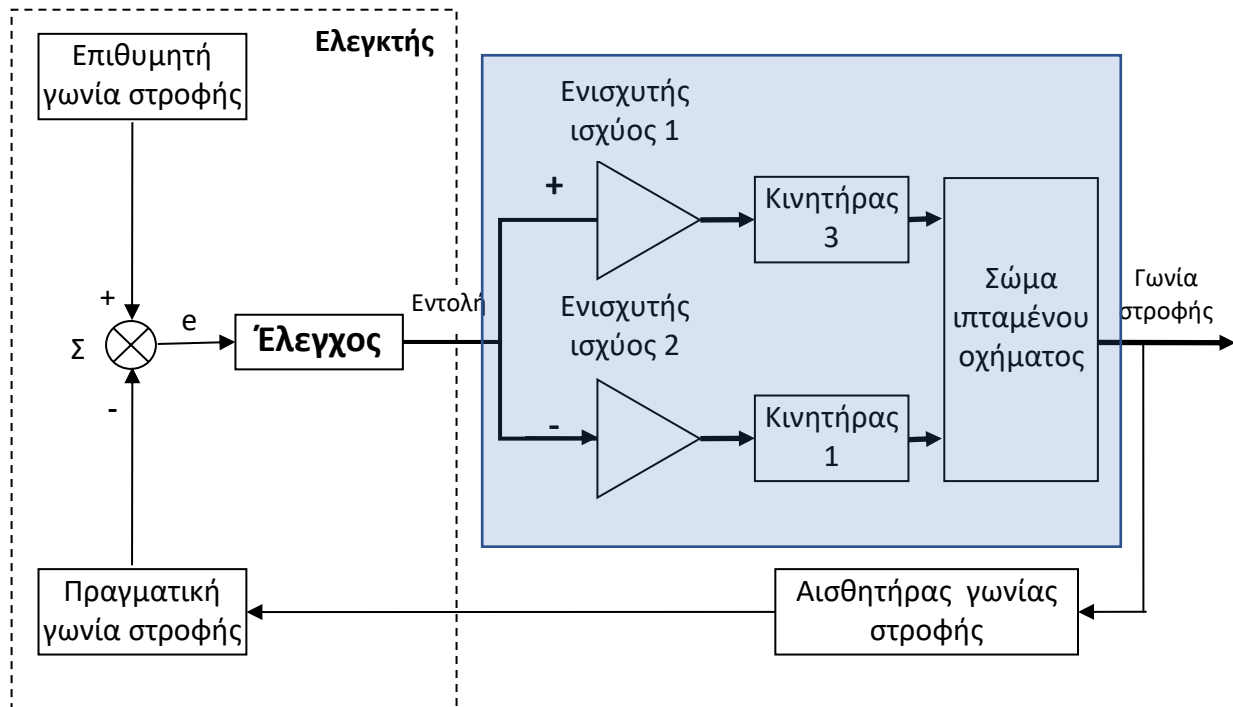
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μόνο το ζευγάρι εκείνο των κινητήρων που είναι ικανό να επηρεάσει την γωνία θ , οι κινητήρες δηλαδή 1 και 3. Εύκολα καταλαβαίνει κανείς, ότι αν ο κινητήρας 3 κινηθεί με μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα από τον 1, τότε η γωνία θα αυξηθεί.



Στο σχήμα 9, φαίνεται ένα σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου και για τους δύο κινητήρες το οποίο είναι σε θέση να ελέγξει την γωνία στροφής θ . Η εν λόγω γωνία πρέπει να μετρείται συνεχώς και για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται κατάλληλη μονάδα “μέτρησης αδρανειακών μεγεθών» (Inertia Measurement Unit, IMU). Οι εν λόγω μονάδες διατίθενται σήμερα σε μορφή ολοκληρωμένων κυκλωμάτων και διαθέτουν συνήθως επιταχυνσιόμετρο 3 αξόνων, γυροσκόπιο 3 αξόνων καθώς και

μαγνητόμετρο.

Ο ελεγκτής (σχήμα που ακολουθεί) υλοποιεί την απαραίτητη μέθοδο ελέγχου και «παράγει» την εντολή προς τους κινητήρες. Παρατηρείστε εδώ, ότι πρόκειται για μια «διαφορική εντολή». Ένα σχήμα δηλαδή που όσο αυξάνει την εντολή στον ένα κινητήρα, τόσο την μειώνει στον άλλο.



Απλό δυναμικό μοντέλο για τον έλεγχο της γωνίας θ .

Όταν οι δυνάμεις F_3 και F_1 γίνουν $(F_3 + \Delta F)$ και $(F_1 - \Delta F)$, τότε δημιουργείται το ζεύγος δυνάμεων $+\Delta F - \Delta F$ το οποίο δημιουργεί ροπή ($L \cdot \Delta F$), όπου L η απόσταση των κινητήρων. Υπό την επενέργεια της εν λόγω ροπής αλλά και της ροπής T_d των πιθανών διαταραχών (άνεμος ...), το όχημα θα αρχίσει να περιστρέφεται κατά γωνία θ .

Ισχύει :

$$L(\Delta F) - T_d = J_y \ddot{\theta}$$

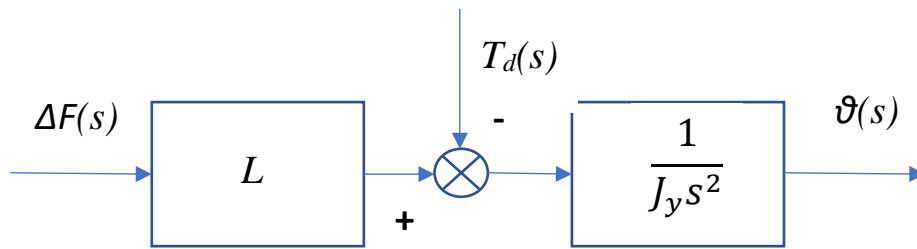
όπου J_y : η ροπή αδράνειας του οχήματος ως προς τον άξονα Y .

Στην παραπάνω σχέση αγνοήθηκαν οι αεροδυναμικές δυνάμεις που είναι εξαιρετικά μικρές λόγω της χαμηλής ταχύτητας κίνησης. Αν πάρουμε τον μετ/μό Laplace της παραπάνω εξίσωσης, έχουμε :

$$L\Delta F(s) - T_d(s) = J_y \theta(s) s^2 \Rightarrow \theta(s) = \frac{L\Delta F(s) - T_d(s)}{J_y s^2}$$

Ο έλεγχος της γωνίας στροφής με την παραπάνω μέθοδο είναι ένα σύστημα 2^{ης} τάξης.

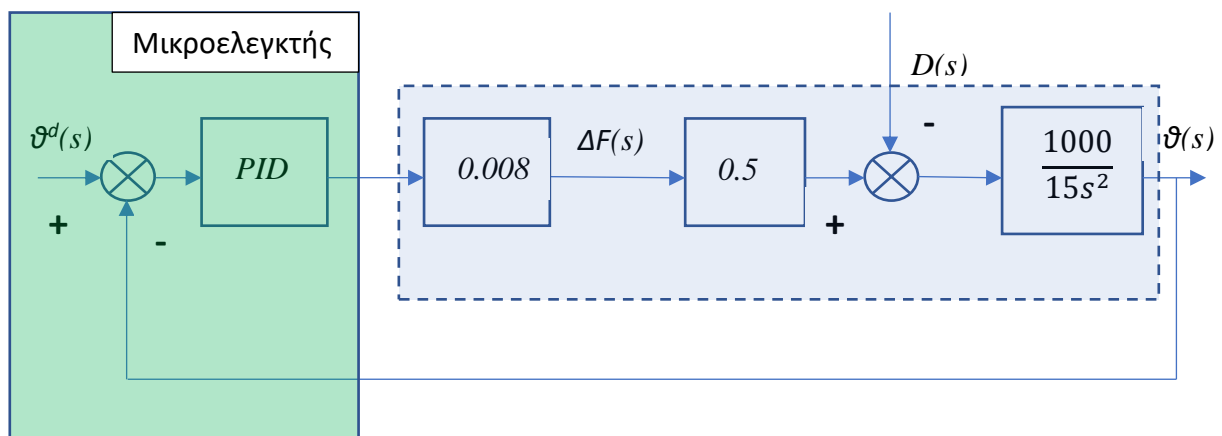
Η τελευταία αυτή εξίσωση, φαίνεται παρακάτω σε μορφή «μπλόκ διαγράμματος».



Υλοποίηση ελέγχου για το τετρακόπτερο του εργαστηρίου.

Το τετρακόπτερο του εργαστηρίου διαθέτει μικρούς ηλεκτρικούς κινητήρες. Οι κινητήρες «οδηγούνται» από μικρούς ενισχυτές ισχύος, που με την σειρά τους μπορούν να ελεγχθούν από ένα μικροελεγκτή με την βοήθεια σήματος PWM. Το υποσύστημα «ενισχυτής ισχύος – κινητήρας – έλικα» αποδίδει περίπου $8 \cdot 10^{-3}$ N ώθηση ανά μονάδα εντολής από τον μικροελεγκτή. (Η μεταβολή της δύναμης ώθησης με τις στροφές είναι σχεδόν γραμμική, εδώ την θεωρούμε γραμμική). Θα θεωρήσουμε επίσης, ότι το εν λόγω υποσύστημα αποκρίνεται «ακαριαία» στις εντολές του μικροελεγκτή.

Για τα υπόλοιπα στοιχεία του τετρακόπτερου που μας ενδιαφέρουν, ισχύει ότι :
 $L=0.5$ m και $J_y = 15 \cdot 10^{-3}$ Kgr*m²



Έλεγχος κλειστού βρόχου με Αναλογικό – Διαφορικό (PD) ελεγκτή.

Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου της εγκατάστασης, με είσοδο την εντολή από τον μικροελεγκτή και έξοδο την γωνία στροφής, είναι :

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} = \frac{4}{15s^2} \quad \left(\frac{\text{rad}}{\text{μονάδα εντολής}} \right)$$

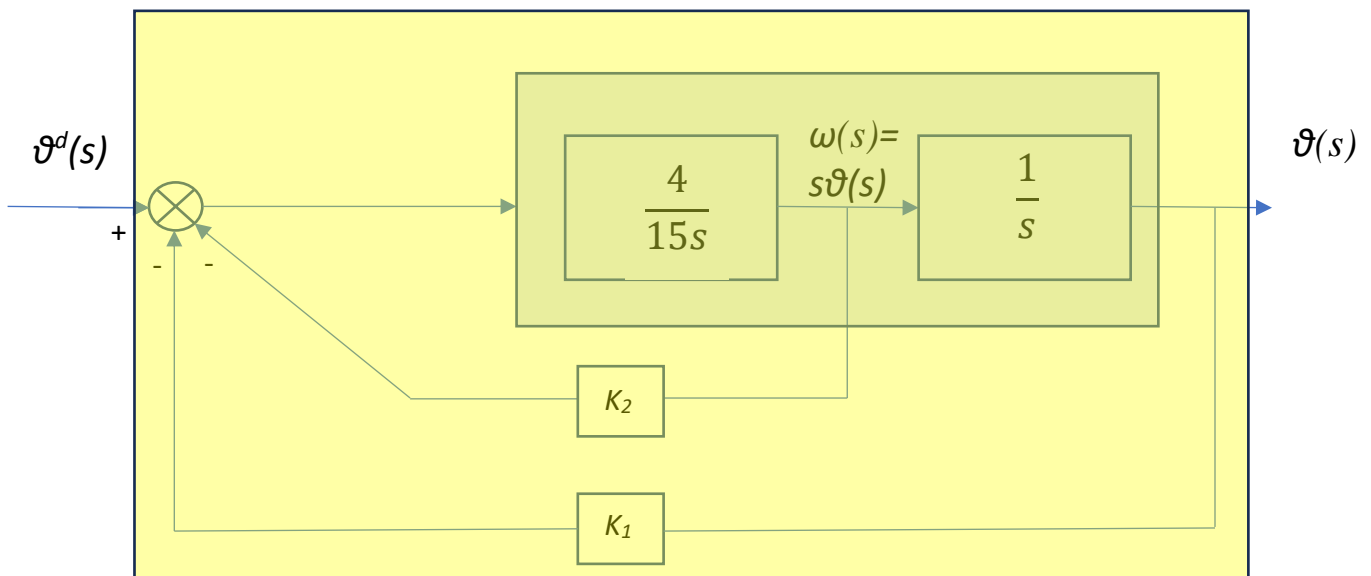
Με έλεγχο PD η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου θα είναι (βλέπε σχετικό κεφάλαιο θεωρίας) :

$$G_c(s) = \frac{(K_p + K_d s)n_G(s)}{1d_G(s) + (K_p + K_d s)n_G(s)} = \frac{(K_p + K_d s)4}{15s^2 + (K_p + K_d s)4} = \frac{4/15(K_p + K_d s)}{s^2 + (4/15 K_d)s + 4/15 K_p}$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημά μας εξακολουθεί να είναι δεύτερης τάξης, όμως τώρα επιλέγοντας κατάλληλες τιμές για τα «κέρδη» K_p και K_d του ελέγχου, μπορούμε να «τοποθετήσουμε» κατά επιθυμητό τρόπο τους πόλους του συστήματος (τις ρίζες δηλαδή του πολωνύμου του παρονομαστή) και έτσι να πετύχουμε την επιθυμητή δυναμική συμπεριφορά του συστήματος.

Έλεγχος με ανάδραση και της γωνιακής ταχύτητάς περιστροφής (Έλεγχος με ανάδραση «κατάστασης»)

Υλοποιούμε το παρακάτω σύστημα ελέγχου : Υλοποιούμε δηλαδή αρνητική ανάδραση τόσο της γωνίας στροφής όσο και της γωνιακής ταχύτητας με αντίστοιχα «κέρδη» K_1 και K_2 και αφαιρούμε οποιονδήποτε «ελεγκτή»!



Για να βρούμε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος ελέγχου που υλοποιήσαμε, γράφουμε :

$$[\theta^d(s) - \theta(s)K_1 - s\theta(s)K_2] \frac{4}{15s^2} = \theta(s) \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\frac{\theta(s)}{\theta^d(s)} = G_c(s) = \frac{4/15}{s^2 + (4/15 K_2)s + (4/15 K_1)}$$

Παρατηρούμε, ότι το σύστημα κλειστού βρόχου είναι και πάλι σύστημα δεύτερης τάξης το οποίο «μοιάζει» αρκετά με αυτό που υλοποιήσαμε με PD έλεγχο. Εδώ τον ρόλο του κέρδους K_d παίζει το κέρδος K_2 του βρόχου γωνιακής ταχύτητας. Στο σύστημα τώρα, δεν χρειάζεται να υλοποιήσουμε διαφορικό έλεγχο με όλα τα προβλήματα του (ενίσχυση θορύβου ...). Πρέπει όμως να μετρήσουμε την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, μέγεθος όμως που είναι άμεσα διαθέσιμο στα σύγχρονα συστήματα IMU.

Το παραπάνω σύστημα κλειστού βρόχου είναι ένα τυπικό δευτεροβάθμιο σύστημα για το οποίο ισχύει :

$$2\zeta\omega_n = 4/15 K_2 \quad \text{και} \quad \omega_n^2 = 4/15 K_1$$

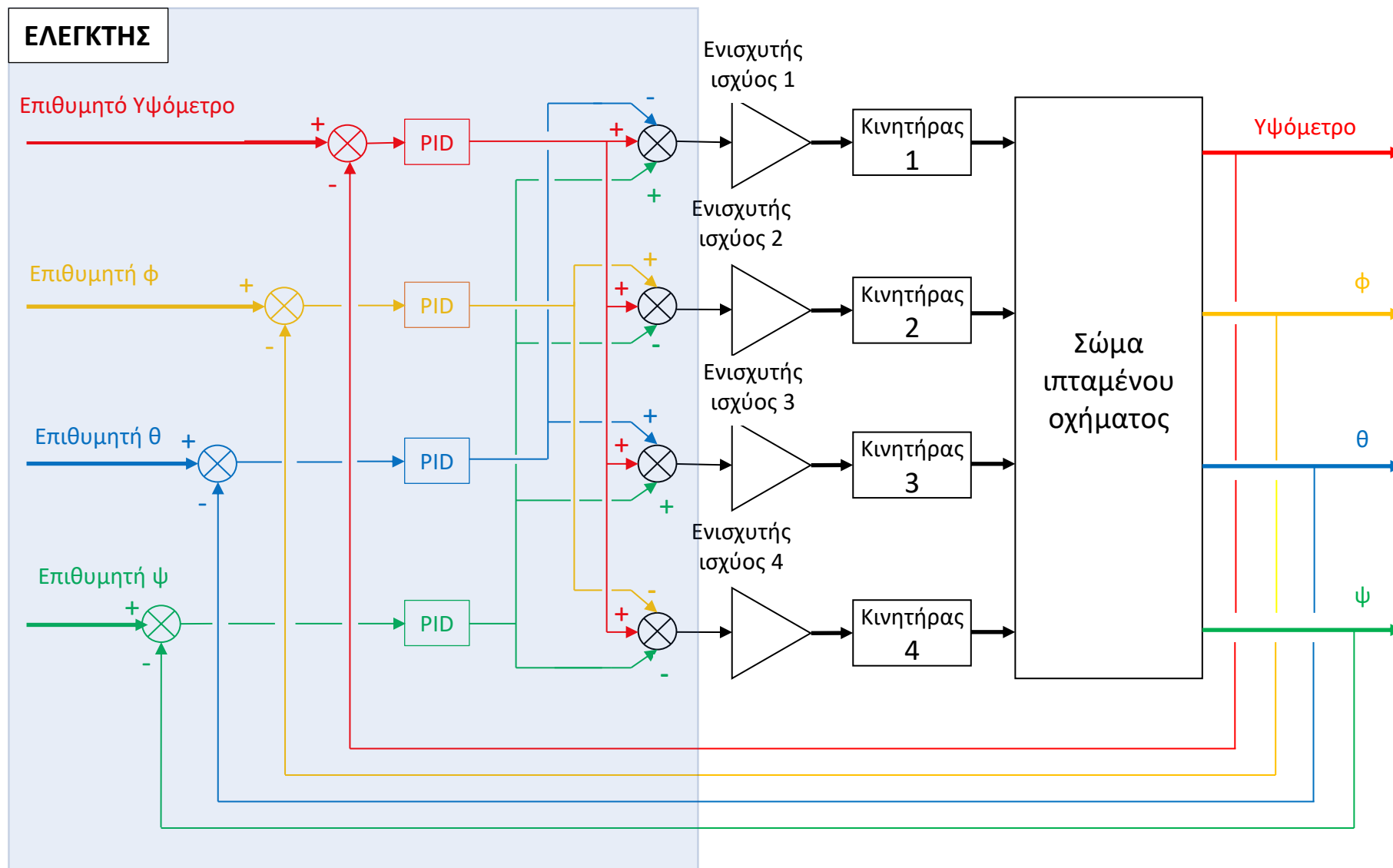
Στο τυπικό δευτεροβάθμιο σύστημα, ισχύει ακόμη για τον «χρόνο κορυφής, T_p », που αποτελεί ένα μέτρο για το πόσο γρήγορα αντιδρά το σύστημα :

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Θέτουμε ως προδιαγραφή καλής συμπεριφοράς του συστήματος : $T_p=0.5$ s και $\zeta=0.7$. Από τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει τότε :

$$K_1 = 290 \quad \text{και} \quad K_2 = 46$$

ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΤΕΤΡΑΚΟΠΤΕΡΟΥ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΜΕ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Η αναπαράσταση ενός συστήματος στον χώρο κατάστασης μας δίνει την δυνατότητα να σχεδιάσουμε αποτελεσματικότερους ελεγκτές σε σχέση με τον κλασικό PID. Κάτι τέτοιο είναι εντελώς απαραίτητο σε συστήματα τάξης 3 κα άνω, αλλά έχει πλεονεκτήματα και σε συστήματα μικρότερης τάξης. Μας δίνει επί πλέον την δυνατότητα να αναλύσουμε και να ελέγξουμε συστήματα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων.

Ας θεωρήσουμε το απλό δυναμικό μοντέλο περιστροφής ενός τετρακόπτερου κατά μια γωνία. Ισχύει:

$$L(\Delta F) - T_d = J\ddot{\theta}$$

όπου :

J : η ροπή αδράνειας του οχήματος ως προς τον άξονα περιστροφής,

L : Η απόσταση των κινητήρων

ΔF : Η διαφορά δύναμης που αναπτύσσουν η έλικες για να πετύχουν την περιστροφή

Αν θεωρήσουμε ως είσοδο την εντολή ταχύτητας περιστροφής των κινητήρων θ^d , και ότι η σχέση εντολής με την παραγόμενη δύναμη είναι γραμμική με συντελεστή K_f , δηλαδή $\Delta F = K_f \theta^d$, και αν επί πλέον αγνοήσουμε για την ώρα τις διαταραχές, τότε το παραπάνω απλό μοντέλο γίνεται :

$$\theta^d(LK_f) = J\ddot{\theta}$$

Ας θεωρήσουμε το εξής διάνυσμα :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Η πρώτη παράγωγος του διανύσματος αυτού ως προς τον χρόνο είναι :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε το δυναμικό μοντέλο του συστήματος, υπό μορφή εξίσωσης πινάκων, ως εξής :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{LK_f}{J} \end{bmatrix} \theta^d \Rightarrow$$

$$\dot{\underline{x}} = \mathbf{A}\underline{x} + \mathbf{b}u \quad (1)$$

όπου $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{LK_f}{J} \end{bmatrix}$, $u = \theta^d$ u : είσοδος στο σύστημα

Το διάνυσμα \underline{x} θα το ονομάζουμε διάνυσμα κατάστασης (state vector), οι συνιστώσες του ονομάζονται μεταβλητές κατάστασης (state variables), τον πίνακα \mathbf{A} πίνακα κατάστασης, την δε εξίσωση πινάκων (1) εξίσωση κατάστασης.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε διαφορική εξίσωση (ή σύστημα διαφορικών εξισώσεων) μπορεί να γραφεί σε μορφή εξίσωσης κατάστασης. Ακόμη μπορεί να αποδειχθεί ότι οι μεταβλητές κατάστασης (που εδώ επιλέχθηκαν αυθαίρετα), μπορούν να επιλεγούν με άπειρους τρόπους. Η τάξη της διαφορικής εξίσωσης είναι ίδια με την τάξη του πίνακα κατάστασης.

Στην νέα αυτή μορφή αναπαράστασης ενός συστήματος στον χώρο κατάστασης, ο πίνακας A περιέχει/περιγράφει πλήρως την δυναμική του συστήματος.

Ειδικότερα, μπορεί να αποδειχθεί ότι τα χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της συνάρτησης μεταφοράς (για την περίπτωση συστημάτων μιας εισόδου και μιας εξόδου). Άρα οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα A, δηλαδή οι ιδιοτιμές του, ταυτίζονται με τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της συνάρτησης μεταφοράς, δηλαδή του πόλους του συστήματος.

Όπως πρέπει να έχει γίνει μέχρι τώρα κατανοητό, ο έλεγχος με ανάδραση (έλεγχος κλειστού βρόχου) αλλάζει την δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος. Για κάποια μάλιστα από αυτά (π.χ. ανεστραμμένο εκκρεμές, τετρακόπτερο) είναι και ο μόνος τρόπος να σταθεροποιηθούν, αφού από την φύση τους είναι ασταθή. Για συστήματα μέχρι δεύτερης τάξης, αρκεί ένας PID ελεγκτής για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο. Τι γίνεται όμως με συστήματα ανώτερης τάξης;

ΕΛΕΓΧΟΣ ΜΕ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Η παραπάνω ανάλυση μας παρακινεί να σκεφτούμε ως εξής : Αν τροποποιήσουμε την είσοδο στο σύστημα ως εξής :

$$u = ([-k_1 \quad -k_2]\underline{x} + \theta^d) = ([-k_1 \quad -k_2] \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \theta^d) = (-k_1\theta - k_2\dot{\theta}) + \theta^d$$

Αν υλοποιήσουμε δηλαδή, κατάλληλα σταθμισμένη με τους συντελεστές k_i , αρνητική ανάδραση κατάστασης. Τότε το σύστημα (κλειστού βρόχου πλέον) θα έχει την παρακάτω εξίσωση κατάστασης :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}u = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}([-k_1 \quad -k_2]\underline{x} + \theta^d) = \underline{A}\underline{x} + (\underline{b}[-k_1 \quad -k_2])\underline{x} + \underline{b}\theta^d \Rightarrow$$

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} - \underline{bK})\underline{x} + \underline{b}\theta^d \quad (2)$$

όπου \underline{K} : ο πίνακας (εν προκειμένω 1x2) κερδών ανάδρασης.

Το σύστημα κλειστού βρόχου, που περιγράφεται πλέον από την εξίσωση (2), έχει τώρα διαφορετικό χαρακτηριστικό πίνακα, τον

$$\underline{A}^* = (\underline{A} - \underline{bK})$$

Στην γενικότερη περίπτωση τουλάχιστον, μπορεί κανείς ρυθμίζοντας τα κέρδη K_i να «τοποθετήσει» τις ιδιοτιμές του πίνακα αυθαίρετα στο μιγαδικό επίπεδο, να ελέγξει δηλαδή σωστά, οποιοδήποτε σύστημα οποιασδήποτε τάξης!

Ας δούμε πως εφαρμόζονται τα παραπάνω στο παράδειγμα του ελέγχου μιας γωνίας στροφής του τετρακόπτερου.

Προσδιορίσαμε στα προηγούμενα την εξίσωση κατάστασης για το σύστημα ανοικτού βρόχου :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}u$$

$$\text{με } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{LK_f}{J} \end{bmatrix}, u = \theta^d$$

και μεταβλητές κατάστασης την γωνία στροφής θ και την αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$.
Ο χαρακτηριστικός πίνακας κλειστού βρόχου είναι :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* = (\mathbf{A} - \mathbf{bK}) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{LK_f}{J} \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \left(\frac{LK_f}{J}\right)k_1 & \left(\frac{LK_f}{J}\right)k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{LK_f}{J}\right)k_1 & -\left(\frac{LK_f}{J}\right)k_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

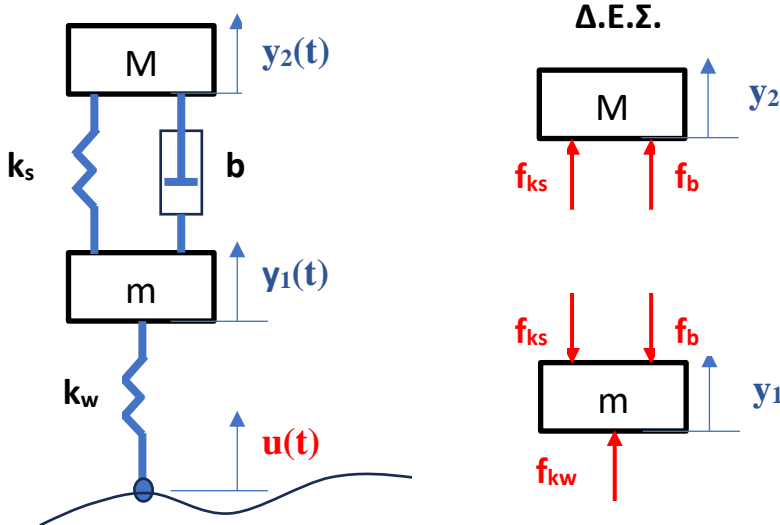
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα αυτού είναι :

$$\det(\mathbf{A}^* - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\left(\frac{LK_f}{J}\right)k_1 & -\left(\frac{LK_f}{J}\right)k_2 - \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda \left[\left(\frac{LK_f}{J}\right)k_2 + \lambda \right] + \left(\frac{LK_f}{J}\right)k_1 =$$

$$\lambda^2 + \left(\frac{LK_f}{J}\right)k_2\lambda + \left(\frac{LK_f}{J}\right)k_1$$

Επιλέγοντας κατάλληλα τα κέρδη k_1 και k_2 μπορούμε να τοποθετήσουμε αυθαίρετα τους δύο πόλους του συστήματος κλειστού βρόχου (με ανάδραση μεταβλητών κατάστασης πλέον) και άρα να ελέγξουμε πλήρως το σύστημα.

Παράδειγμα : Ένα μοντέλο ανάρτησης τροχού αυτοκινήτου



Σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ένα απλό μοντέλο για την ανάρτηση. Δεν είχαμε λάβει υπ' όψιν σε αυτό την ελαστικότητα του ίδιου του τροχού. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα μοντέλο το οποίο λαμβάνει υπ' όψιν την ελαστικότητα αυτή και την μοντελοποιεί ως γραμμικό ελατήριο σταθεράς K_w . Οι παραμορφώσεις $u(t)$ του οδοστρώματος θεωρούμε τώρα ότι συμπίεζουν πρώτα τον τροχό μάζας m , ο οποίος μετατοπίζεται κατακόρυφα κατά y_1 . Η μετατόπιση αυτή, μέσω της ανάρτησης,

μεταβιβάζεται στο αμάξωμα το οποίο μετατοπίζεται κατά y_2 .

Θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε το μαθηματικό μοντέλο της κίνησης του συστήματος κατά τον κατακόρυφο άξονα. Στο σχήμα φαίνονται σχεδιασμένα επίσης τα Δ.Ε.Σ. των μαζών M (μάζα οχήματος που αναλογεί στον τροχό) και m (ο ίδιος ο τροχός). Φαίνονται εκεί σχεδιασμένες τόσο οι δυνάμεις από τα ελατήρια όσο και η δύναμη του αποσβεστήρα. Θεωρούμε ότι τα ελατήρια έχουν συμπιεσθεί σε μια θέση ώστε να «παραλάβουν» τα βάρη, οπότε οι εξισώσεις που θα γράψουμε αφορούν μετακινήσεις των ελατηρίων γύρω από την θέση αυτή. Έτσι δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε με τα βάρη.

Για τις δυνάμεις των ελατηρίων και του αποσβεστήρα, ισχύει :

$$f_{k_w} = k_w(u - y_1), \quad f_{k_s} = k_s(y_1 - y_2), \quad f_b = b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$

(θεωρούμε τις δυνάμεις θετικές όταν τα ελατήρια συμπιέζονται).

Εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών κατά την κατακόρυφη διεύθυνση :

$$f_{k_w} - f_{k_s} - f_b = m\ddot{y}_1 \Rightarrow k_w(u - y_1) - k_s(y_1 - y_2) - b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = m\ddot{y}_1 \Rightarrow$$

$$\ddot{y}_1 = -\left(\frac{k_w + k_s}{m}\right)y_1 + \left(\frac{k_s}{m}\right)y_2 - \left(\frac{b}{m}\right)\dot{y}_1 + \left(\frac{b}{m}\right)\dot{y}_2 + \left(\frac{k_w}{m}\right)u \quad (1)$$

$$f_{k_s} + f_b = M\ddot{y}_2 \Rightarrow k_s(y_1 - y_2) + b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = M\ddot{y}_2 \Rightarrow$$

$$\ddot{y}_2 = \left(\frac{k_s}{M}\right)y_1 - \left(\frac{k_s}{M}\right)y_2 + \left(\frac{b}{M}\right)\dot{y}_1 - \left(\frac{b}{M}\right)\dot{y}_2 \quad (2)$$

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (1) και (2) αποτελούν το ζητούμενο μαθηματικό μοντέλο του συστήματος. Οι εξισώσεις αυτές, μπορούν να γραφούν ως μια εξίσωση πινάκων, ως εξής :

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_w + k_s}{m} & \left(\frac{k_s}{m}\right) & -\frac{b}{m} & \left(\frac{b}{m}\right) \\ \left(\frac{k_s}{M}\right) & -\left(\frac{k_s}{M}\right) & \left(\frac{b}{M}\right) & -\left(\frac{b}{M}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{k_w}{m}\right) \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Πρόκειται για μια εξίσωση της μορφής : $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}u$ με :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \quad \text{το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_w + k_s}{m} & \left(\frac{k_s}{m}\right) & -\frac{b}{m} & \left(\frac{b}{m}\right) \\ \left(\frac{k_s}{M}\right) & -\left(\frac{k_s}{M}\right) & \left(\frac{b}{M}\right) & -\left(\frac{b}{M}\right) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{k_w}{m}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα : Μοντέλο γωνίας στροφής τετρακόπτερου, στο οποίο λαμβάνεται υπ' όψιν και η δυναμική του κινητήρα.

Στο κεφάλαιο 5 είδαμε το παράδειγμα του τετρακόπτερου και βρήκαμε ένα απλό δυναμικό μοντέλο για την περιστροφή περί κάποια γωνία θ . Για να εξάγομε το απλό αυτό μοντέλο αγνοήσαμε την δυναμική του συστήματος «ενισχυτής ισχύος – ηλεκτρικός κινητήρας – έλικα». Θα προσπαθήσουμε τώρα να λάβομε υπ' όψιν την δυναμική αυτή και να δημιουργήσομε ένα πιο ακριβές μοντέλο και μάλιστα στο χώρο κατάστασης.

Για την περιστροφή του τετρακόπτερου περί την γωνία θ , ισχύει (Σελ 69) :

$$L\Delta F(t) = J_y \ddot{\theta}(t)$$

Όπου

J_y : η ροπή αδράνειας του οχήματος ως προς τον άξονα Y

L : η απόσταση των «απέναντι» κινητήρων

ΔF : η ωστική δύναμη της έλικας

(Αγνοούμε εδώ την διαταραχή ροπής Td)

Θεωρούμε και πάλι ότι η ωστική δύναμη της έλικας είναι ανάλογη της γωνιακής της ταχύτητας ω :

$$\Delta F(t) = K_f \omega(t)$$

Η έλικα κινείται από μικρό ηλεκτρικό κινητήρα DC. Στο κεφάλαιο 2 (σελ 39), προσδιορίσαμε το δυναμικό μοντέλο ενός τέτοιου “κινητήρα + τον ενισχυτή ισχύος” του :

$$e(t) = \left(\frac{T}{K_{tot}}\right) \dot{\omega}(t) + \left(\frac{1}{K_{tot}}\right) \omega(t)$$

(αγνοούμε εδώ την διαταραχή ροπής του κινητήρα)

Όπου

e : η είσοδος – σήμα στον ενισχυτή ισχύος

K_{tot} : το «συνολικό» κέρδος του συστήματος «ενισχυτής ισχύος – κινητήρας»

T : η σταθερά χρόνου του συστήματος

Τις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις, μπορούμε τώρα να γράψομε σε μορφή εξίσωσης πινάκων, ως εξής :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{LK_f}{J_y}\right) \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{T}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{K_{tot}}{T}\right) \end{bmatrix} e$$

Πρόκειται για μια εξίσωση της μορφής : $\dot{\underline{x}} = \underline{Ax} + \underline{bu}$ με :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \omega \end{bmatrix} \text{ το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{LK_f}{J_y}\right) \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{T}\right) \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{K_{tot}}{T}\right) \end{bmatrix}$$

Δύο από τις τρεις ιδιοτιμές του πίνακα A είναι μηδέν, συνεπώς το σύστημα, όπως αναμενόταν, είναι ασταθές.