

Ασκήσεις Μαθηματικά II

1) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$A) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(3x) \cos(4x) dx$$

$$B) \int \frac{2x+1}{x^2-3x-4} dx$$

$$Γ) \int \frac{x+1}{x^2+4} dx$$

$$Δ) \int \sqrt{1-x^2} dx$$

2) Υπολογίστε την επιφάνεια της περιοχής που φράσσεται από την ευθεία $y = x - 1$ και την παραβολή $y^2 = 2x + 6$.

3) Αποδείξτε ότι ο όγκος της σφαίρας είναι $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

4) Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που προκύπτει αν περιστρέψουμε την περιοχή μεταξύ της καμπύλης $y = x - x^2$ και του άξονα των x , γύρω από τον άξονα των y .

5) Βρείτε το μήκος του υποκυκλοειδούς, που δίνεται παραμετρικά από την διανυσματική εξίσωση $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t \hat{i} + \sin^3 t \hat{j}$.

6) Λύστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$A) y(1+x^2) \frac{dy}{dx} + 1 = y^2,$$

$$B) \sin(x) \frac{dy}{dx} + 2y \cos(x) = \cos(x).$$

7) Ένα ντεπόζιτο $V \text{ cm}^3$ περιέχει αλατόνερο στο οποίο υπάρχουν $S_0 \text{ gr}$ αλατιού. Καθαρό νερό προστίθεται στο ντεπόζιτο με ρυθμό $u \text{ cm}^3/\text{sec}$, και συγχρόνως το αραιωμένο αλατόνερο αφαιρείται με ρυθμό $v \text{ cm}^3/\text{sec}$. Υποθέτοντας ότι ανά πάσα στιγμή το αλατόνερο είναι καλά αναμεμιγμένο με το νερό, γράψτε και λύστε την διαφορική εξίσωση για την ποσότητα $s \text{ gr}$ αλατιού που υπάρχει στο ντεπόζιτο την χρονική στιγμή t . Εξηγήστε ποιοτικά τι συμβαίνει όταν $u = v$.

8) Λύστε τις διαφορικές εξισώσεις:

$$A) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 2y = 0,$$

$$B) \frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 3y = x^3.$$

9) Έστω $f: R^2 \rightarrow R$ η συνάρτηση με τύπο $f(x, y) = x^2 + xy + 2$.

A) Αν $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$, βρείτε την κατευθυνόμενη παράγωγο στην διεύθυνση του \mathbf{v} , στο σημείο $(1, 1)$.

B) Βρείτε τις δεύτερες παραγώγους της συνάρτησης και επαληθεύστε την ισότητα των μικτών παραγώγων.

10) Βρείτε την επιφάνεια του τριγώνου στον τρισδιάστατο χώρο που δίνεται από τις κορυφές $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$, $R(1, -1, 1)$ με την χρήση εξωτερικού γινομένου.

11)Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $P(1,0,2)$, $Q(3,-1,6)$, $R(5,2,4)$. Δώστε ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο.

12)Βρείτε την διανυσματική εξίσωση της ευθείας στον τρισδιάστατο χώρο που περνάει από τα σημεία $P(-3,5,8)$ και $Q(4,2,-1)$. Γράψτε της παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που δίνει η διανυσματική εξίσωση. Απαλοίφοντας την παράμετρο δώστε την ευθεία σαν τομή δύο επιπέδων.

13)Βρείτε την καμπυλότητα της τρισδιάστατης καμπύλης twisted cubic που αποτελείται από τα σημεία (t, t^2, t^3) , σε κάθε σημείο της. Δίνεται ο τύπος της καμπυλότητας $\kappa(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$.

14)Να ευρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο $(1, \frac{\pi}{2}, 1)$ στην επιφάνεια $z = \sin(xy)$.

15)Έστω $a \neq 0$ και $b \neq 0$. Αν $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $f(x, y) = e^{ax^2+by^2}$, να βρεθούν τα μέγιστα, τα ελάχιστα και τα σαγματικά σημεία για τις διάφορες τιμές των a, b .

16)Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz + 4yz$ πάνω στην σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

17)Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_B x dx dy$, όπου B είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $(1/2, 0)$, $(1, 1/2)$, $(1/2, 1)$, $(0, 1/2)$.

18)Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_B e^{-(x-1)^2} dx dy$ στο τρίγωνο $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < y, 0 < y < 1\}$.

19)Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_B e^{(x^2+y^2)^2} (x^2 + y^2) dx dy$ στο χωρίο $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a < x^2 + y^2 < b\}$, αν $a > 0, b > 0$.

20)Να υπολογιστεί ο όγκος του συνόλου $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \text{ και } x^2 + y^2 \leq b^2\}$. Δίνεται ότι $0 < b < a$.