Ψηφιακή Σχεδίαση

# Ελαχιστοποίηση σε επίπεδο πυλών

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΚΟΣΜΑΣ

ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2019-2020 | ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

# Περίληψη

σήμερα...

- θα συζητήσουμε για τη μέθοδο ελαχιστοποίησης σε επίπεδο πυλών, με χρήση του χάρτη Καρνό
- θα μελετήσουμε τον τρόπο υλοποίησης ψηφιακών κυκλωμάτων με συγκεκριμένο είδος πυλών
- θα μελετήσουμε τον τρόπο υλοποίησης συναρτήσεων συγκεκριμένης μορφής
- θα συζητήσουμε τη χρησιμότητα της συνάρτησης XOR

# Ελαχιστοποίηση σε επίπεδο πυλών

ζητούμενο: η εύρεση της βέλτιστης υλοποίησης με πύλες, μίας συνάρτησης Boole **F** που περιγράφει ένα ψηφιακό κύκλωμα

- ✍ η πολυπλοκότητα των ψηφιακών λογικών πυλών που υλοποιούν την **F** σχετίζεται άμεσα με: την πολυπλοκότητα της αλγεβρικής έκφρασης της **F**
  - η παράσταση της **F** με πίνακα αληθείας είναι μοναδική
  - μπορεί να υπάρχουν πολλές διαφορετικές (αλλά ισοδύναμες) αλγεβρικές εκφράσεις της **F**

- ☞ μπορούμε να **απλοποιήσουμε** την **F**
  1. με **αλγεβρικό τρόπο**
     - ✗ η διαδικασία ελαχιστοποίησης δεν είναι απλή
     - ✗ στερείται συγκεκριμένων κανόνων καθορισμού των διαδοχικών βημάτων
  2. με χρήση της μεθόδου του **χάρτη Καρνό** (Karnaugh)
     - χρησιμοποιούμε μια γραφική μορφή του πίνακα αληθείας
     - ✓ απλή και εύκολη διαδικασία

# Ελαχιστοποίηση σε επίπεδο πυλών

## Χάρτης Καρνό

ένα γράφημα που αποτελείται από τετράγωνα, καθένα από τα οποία αναπαριστά έναν ελαχιστόρο της συνάρτησης που απλοποιείται

- οποιαδήποτε συνάρτηση **F** μπορεί να παρασταθεί ως άρθοισμα ελαχιστόρων
- η **F** παριστάνεται γραφικά στο χάρτη → περιοχή που εσωκλείει τα τετράγωνα που αντιστιχούν στους ελαχιστόρους της **F**

*ο χάρτης δίνει μια οπτική παράσταση όλων των πιθανών τρόπων έκφρασης μια συνάρτησης σε τυπική μορφή*

- με την αναγνώριση συγκεκριμένων διατάξεων τετραγώνων στο χάρτη, μπορούμε
  1. να παράγουμε εναλλακτικές αλγεβρικές εκφράσεις
  2. να επιλέξουμε την απλούστερη από αυτές

# Ελαχιστοποίηση σε επίπεδο πυλών

## Χάρτης Καρνό (II)

- οι απλοποιημένες εκφράσεις που προκύπτουν, είναι σε πρότυπη μορφή
  - δηλαδή, άθροισμα γινομένων ή γινόμενο αθροισμάτων

- απλούστερη έκφραση:
  - είναι αυτή που έχει
    1. τον **ελάχιστο** αριθμό όρων και
    2. τον **μικρότερο** αριθμο παραγόντων
  - δεν είναι απαραίτητα και μοναδική

οδηγεί σε λογικό κύκλωμα με τον ελάχιστο αριθμό

1. **πυλών** και
2. **εισόδων** κάθε πύλης

# Χάρτης Καρνό
## Δύο μεταβλητών

- υπάρχουν **4** ελαχιστόροι των δύο μεταβλητών → ο χάρτης αποτελείται από **4** τετράγωνα

| | |
|---|---|
| $m_0$ | $m_1$ |
| $m_2$ | $m_3$ |

χάρτης Καρνό **2** μεταβλητών

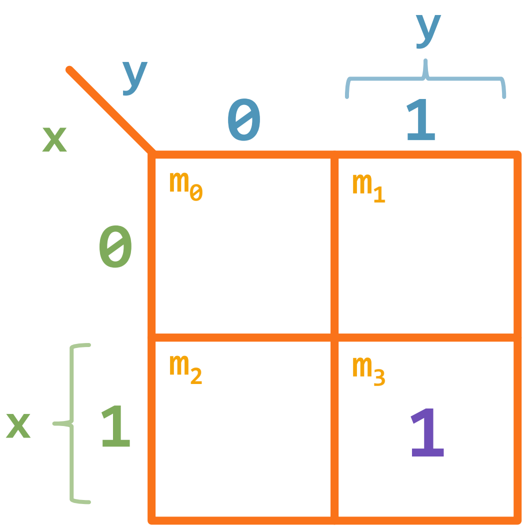
| x \ y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $m_0$ $x'y'$ | $m_1$ $x'y$ |
| 1 | $m_2$ $xy'$ | $m_3$ $xy$ |

παρουσιάζεται η σχέση μεταξύ των τετραγώνων και των δύο μεταβλητών **x** και **y**

# Χάρτης Καρνό

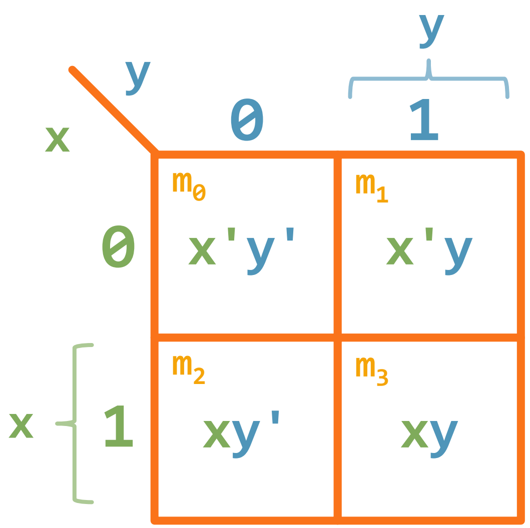
## Δύο μεταβλητών - Παράσταση συνάρτησης - 1ο Παράδειγμα

- αρκεί να συμαδέψουμε (με **1**) τα τετράγωνα των ελαχιστόρων μιας συνάρτησης




χάρτης Καρνό της συνάρτησης:

**F = xy**

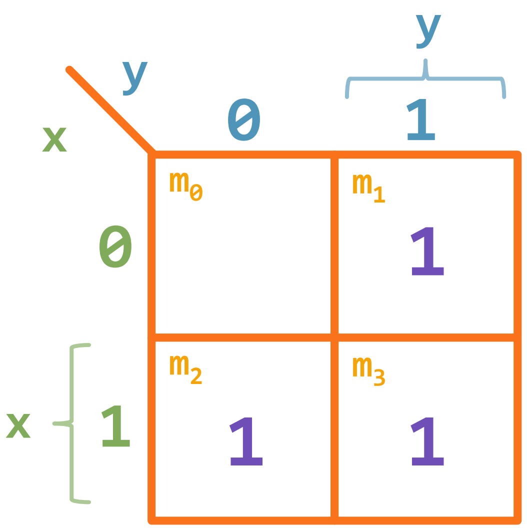



παρουσιάζεται η σχέση μεταξύ των τετραγώνων και των δύο μεταβλητών **x** και **y**

# Χάρτης Καρνό

## Δύο μεταβλητών - Παράσταση συνάρτησης - 2ο Παράδειγμα

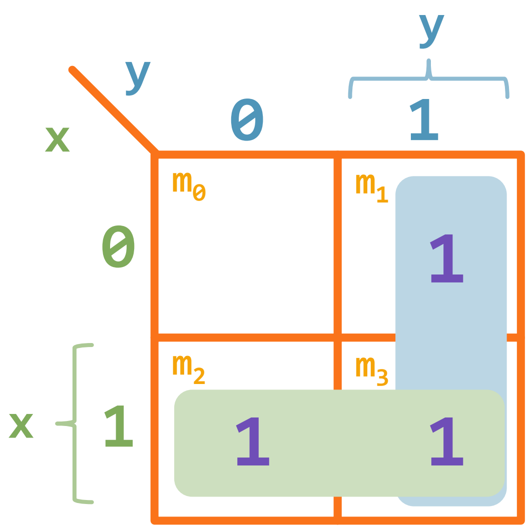
- αρκεί να συμαδέψουμε (με **1**) τα τετράγωνα των ελαχιστόρων μιας συνάρτησης




χάρτης Καρνό της συνάρτησης:

$$F = x + y$$
$$= x(y + y') + y(x + x')$$
$$= \boxed{xy} + xy' + \cancel{\boxed{xy}} + x'y +$$
$$= xy + xy' + x'y$$

**1η μέθοδος**
εύρεση τετραγώνων από τους ελαχιστόρους




**2η μέθοδος**
εύρεση τετραγώνων από την ένωση των περιοχών των όρων της συνάρτησης (δηλαδή των μεταβλητών x και y)

χάρτης Καρνό της συνάρτησης:

$$F = x + y$$

# Χάρτης Καρνό

## Τριών μεταβλητών

# Χάρτης Καρνό
## Τριών μεταβλητών

- υπάρχουν **8** ελαχιστόροι των τριών μεταβλητών → ο χάρτης αποτελείται από **8** τετράγωνα

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m_0$ | $m_1$ | $m_3$ | $m_2$ |
| $m_4$ | $m_5$ | $m_7$ | $m_6$ |

χάρτης Καρνό **3** μεταβλητών

| x \ yz | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $m_0$ x'y'z' | $m_1$ x'y'z | $m_3$ x'yz | $m_2$ x'yz' |
| 1 | $m_4$ xy'z' | $m_5$ xy'z | $m_7$ xyz | $m_6$ xyz' |

y (στήλες 11, 10)

x (γραμμή 1)

z (στήλες 01, 11)

παρατηρήστε ότι οι δυαδικοί αριθμοί δεν τοποθετούνται σε αύξουσα σειρά

παρουσιάζεται η σχέση μεταξύ των τετραγώνων των τριών μεταβλητών **x**, **y** και **z**

# Χάρτης Καρνό
## Τριών μεταβλητών (ΙΙ)

- οι ελαχιστόροι διατάσσονται στο χάρτη κατά τη σειρά που ορίζει ο κώδικας gray
- δύο γειτονικά τετράγωνα στο χάρτη διαφέρουν κατά μία μόνο **μεταβλητή**, η οποία
  - **έχει** τόνο στον έναν ελαχιστόρο
  - **δεν** έχει τόνο στον άλλο ελαχιστόρο

  π.χ. οι $m_5$ και $m_7$ διαφέρουν μόνο στη μεταβλητή y
- **<u>χρησιμότητα χάρτη Καρνό</u>**:
  το άρθοισμα δύο ελαχιστόρων που αντιστοιχούν σε γειτονικά (είτε οριζοντίως είτε καθέτως) τετράγωνα μπορεί να απλοποιηθεί σε έναν όρο γινομένου που έχει μόνο δύο μεταβλητές

  π.χ. $m_5 + m_7 = xy'z + xyz = xz(y' + y) = xz$

| x \ yz | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $m_0$ x'y'z' | $m_1$ x'y'z | $m_3$ x'yz | $m_2$ x'yz' |
| 1 | $m_4$ xy'z' | $m_5$ xy'z | $m_7$ xyz | $m_6$ xyz' |

y: στήλες 11, 10 — z: στήλες 01, 11 — x: γραμμή 1

**παρατηρήστε ότι οι δυαδικοί αριθμοί δεν τοποθετούνται σε αύξουσα σειρά**

παρουσιάζεται η σχέση μεταξύ των τετραγώνων των τριών μεταβλητών x, y και z

# Χάρτης Καρνό

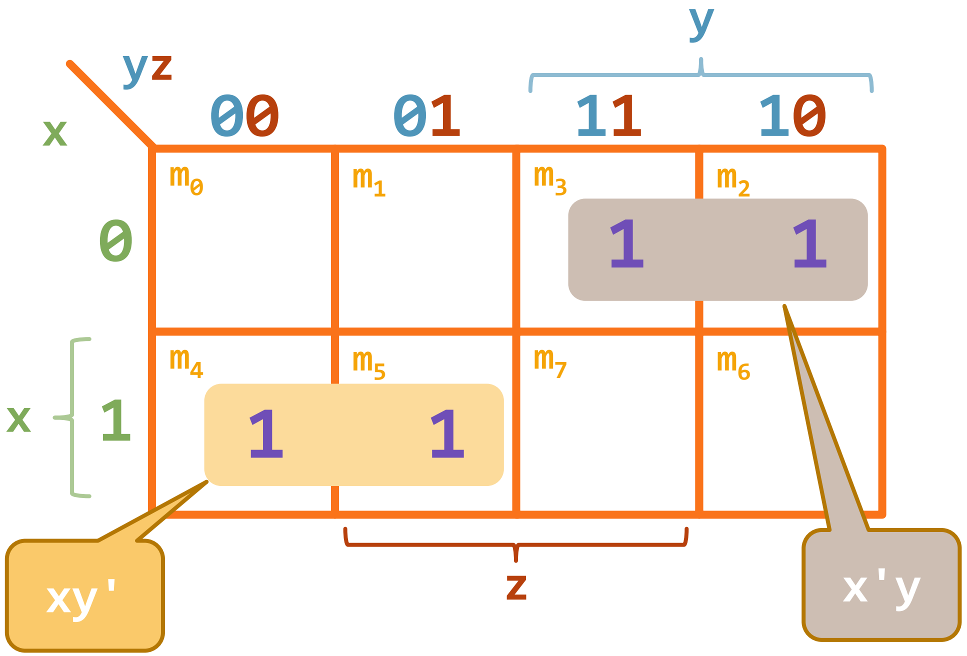
## Τριών μεταβλητών - Απλοποίηση συνάρτησης - 1ο παράδειγμα

απλοποιήστε την έκφραση: F(x,y,z) = Σ(2,3,4,5)

1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
2. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1**
   - **1η περιοχή**: είναι η τομή
     - της γραμμής **0** (→ **x'**) και
     - των δύο τελευταίων στηλών (→ **y**),

     **άρα**: **x'y**
   - **2η περιοχή**: είναι η τομή
     - της γραμμής **1** (→ **x**) και
     - των δύο πρώτων στηλών (→ **y'**),

     **άρα**: **xy'**
3. λογικό άθροισμα των δύο όρων γινομένου → απλοποιημένη έκφραση: $\boxed{F = x'y + xy'}$



# Χάρτης Καρνό

## Τριών μεταβλητών - Γειτονικά τετράγωνα

- σε κάποιες περιπτώσεις, δύο τετράγωνα του χάρτη θεωρούνται γειτονικά ακόμα και αν δεν εφάπτονται

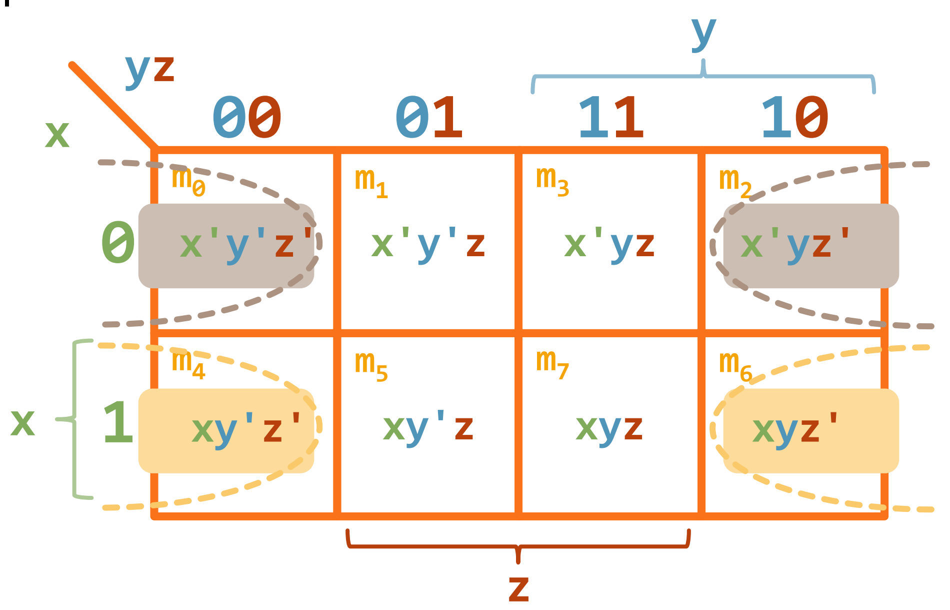
  π.χ. στο χάρτη Καρνό τριών μεταβλητών

  1. τα τετράγωνα του $m_0$ και του $m_2$, θεωρούνται γειτονικά
  2. τα τετράγωνα του $m_4$ και του $m_6$, θεωρούνται γειτονικά

  επειδή οι ελαχιστόροι διαφέρουν κατά μία μόνο μεταβλητή

- η ιδιότητα αυτή μπορεί να επαληθευτεί αλγεβρικά:

  1. $m_0 + m_2 = x'y'z' + x'yz' = x'z'(y + y') = x'z'$
  2. $m_4 + m_6 = xy'z' + xyz' = xz' + (y' + y) = xz'$



# Χάρτης Καρνό

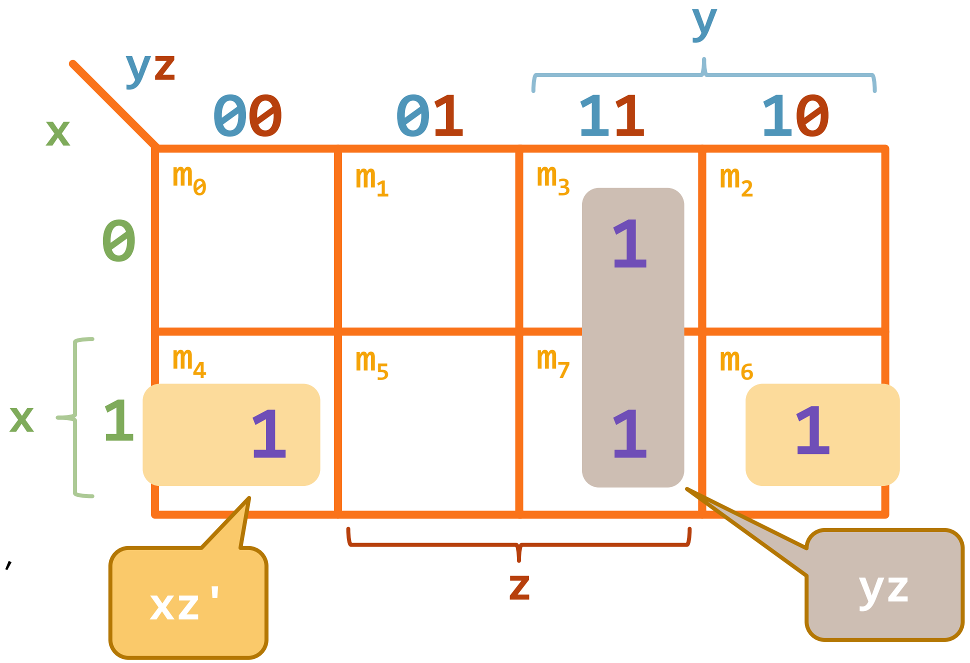
## Τριών μεταβλητών - Απλοποίηση συνάρτησης - 2ο παράδειγμα

απλοποιήστε την έκφραση: **F(x,y,z) = Σ(3,4,6,7)**

1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
2. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1**
   - **1η περιοχή**: είναι η τομή
     - της τρίτης στήλης (→ **y**) και
     - των δύο γραμμών (→ **z**),

     **άρα**: **yz**
   - **2η περιοχή**: είναι η τομή
     - της γραμμής **1** (→ **x**) και
     - της πρώτης στήλης και της τελευταίας στήλης (→ **z'**),

     **άρα**: **xz'**




3. λογικό άθροισμα των δύο όρων γινομένου → απλοποιημένη έκφραση: $\boxed{F = yz + xz'}$

# Χάρτης Καρνό

## Τριών μεταβλητών - Γειτονικά τετράγωνα - Συνδυασμοί

- στο χάρτη Καρνό τριών μεταβλητών, οποιοσδήποτε συνδυασμός τεσσάρων γειτονικών τετραγώνων
  - παριστάνει το λογικό άθροισμα τεσσάρων ελαχιστόρων
  - οδηγεί σε μία έκφραση με μία μόνο μεταβλητή

π.χ. το λογικό άθροισμα των γειτονικών τετραγώνων: **0**, **2**, **4**, **6** απλοποιείται:

$$m_0 + m_2 + m_4 + m_6 = x'y'z' + x'yz' + xy'z' + xyz'$$

$$= x'z'(y' + y) + xz'(y' + y)$$

$$= x'z' + xz' = z'(x' + x) = z'$$

σε ένα όρο με μοναδικό παράγοντα: **z'**

| x \ yz | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $m_0$ x'y'z' | $m_1$ x'y'z | $m_3$ x'yz | $m_2$ x'yz' |
| 1 | $m_4$ xy'z' | $m_5$ xy'z | $m_7$ xyz | $m_6$ xyz' |

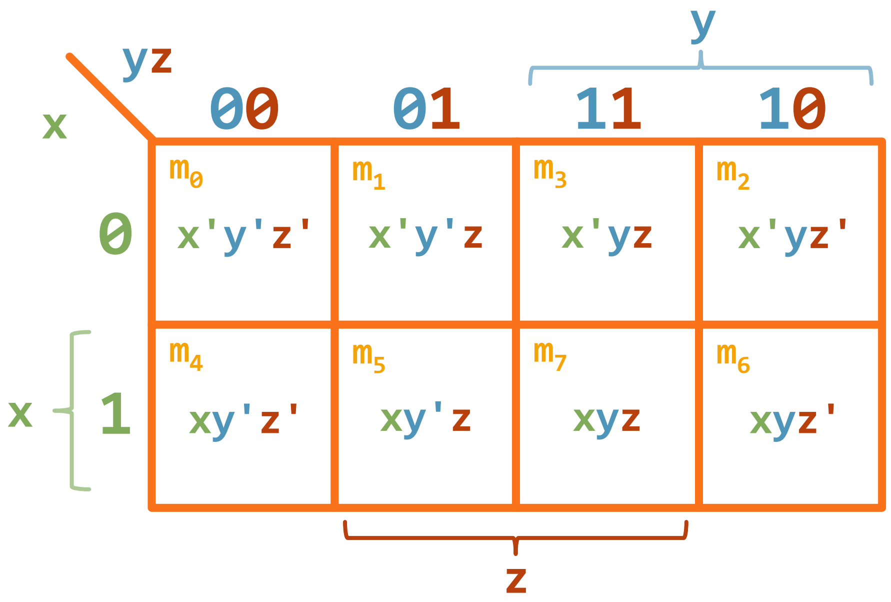
# Χάρτης Καρνό

## Τριών μεταβλητών - Γειτονικά τετράγωνα - Συνδυασμοί (ΙΙ)

- το πλήθος των γειτονικών τετραγώνων που μπορούν να συδυαστούν πρέπει να είναι δύναμη του **2**
  - π.χ. **1**, **2**, **4** και **8**
- όσο περισσότερα γειτονικά τετράγωνα συνδυαστούν → τόσο λιγότερες μεταβλητές παίρνουμε στον τελικό όρο γινομένου

  *π.χ. για το χάρτη Καρνό τριών μεταβλητών:*

  - **1** τετράγωνο → έναν ελαχιστόρο → έναν όρο με τρεις παράγοντες
  - **2** τετράγωνα → έναν όρο με δύο παράγοντες
  - **4** τετράγωνα → έναν όρο με έναν παράγοντα
  - **8** τετράγωνα → καλύπτουν το σύνολο της επιφάνειας του χάρτη → απλοποιημένη συνάρτηση πάντα ίση με **1**



# Χάρτης Καρνό

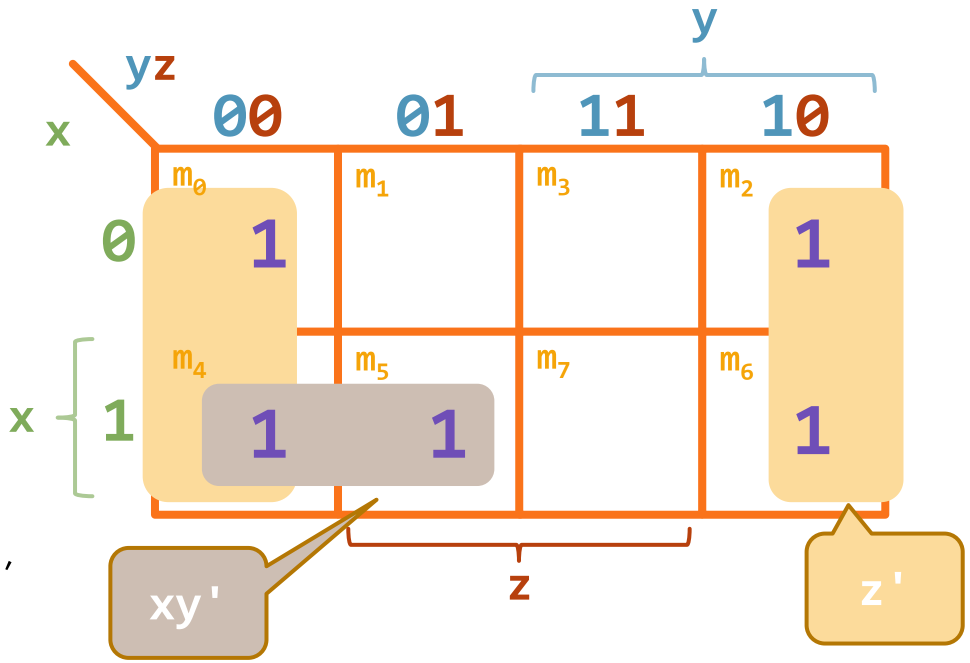
## Τριών μεταβλητών - Απλοποίηση συνάρτησης - 3ο παράδειγμα

απλοποιήστε την έκφραση: **F(x,y,z) = Σ(0,2,4,5,6)**

1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
2. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1**
   - **1η περιοχή**: είναι η τομή
     - της γραμμής **1** (→ **x**) και
     - των δύο πρώτων στηλών (→ **y'**),

     **άρα**: **xy'**
   - **2η περιοχή**: είναι η τομή
     - τών δύο πρώτων γραμμών και
     - της πρώτης στήλης και της τελευταίας στήλης (→ **z'**),

     **άρα**: **z'**
3. λογικό άθροισμα των δύο όρων γινομένου → απλοποιημένη έκφραση: $\boxed{F = xy' + z'}$



# Χάρτης Καρνό

## Τριών μεταβλητών - Απλοποίηση συνάρτησης - 4$^{ο}$ παράδειγμα

απλοποιήστε την έκφραση: $F = x'z + x'y + xy'z + yz$

1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
   - επειδή η **F** δίδεται σε τυπική μορφή (άθροισμα γινομένενων), μπορούμε να επιλέξουμε μία από τις παρακάτω λύσεις:
     a. <u>1$^{η}$ μέθοδος</u>: εύρεση τετραγώνων από τους ελαχιστόρους (πρέπει να τους υπολογίσουμε με αλγεβρικό τρόπο)
     b. **<u>2$^{η}$ μέθοδος</u>**: εύρεση τετραγώνων από την ένωση των περιοχών των όρων της συνάρτησης
        - καθένας από τους (τρεις) όρους με δύο μόνο παράγοντες → παριστάνεται στο χάρτη (των τριών μεταβλητών) από δύο γειτονικά τετράγωνα
          - ο όρος $x'z$ παριστάνεται από τα γειτονικά τετράγωνα: $x'yz$ και $x'y'z$ → $m_3$ και $m_1$
          - ο όρος $x'y$ παριστάνεται από τα γειτονικά τετράγωνα: $x'yz$ και $x'yz'$ → $m_3$ και $m_2$
          - ο όρος $yz$ παριστάνεται από τα γειτονικά τετράγωνα: $xyz$ και $x'yz$ → $m_7$ και $m_3$

| x \ yz | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $m_0$ | $m_1$ 1 | $m_3$ 1 | $m_2$ 1 |
| 1 | $m_4$ | $m_5$ 1 | $m_7$ 1 | $m_6$ |

# Χάρτης Καρνό

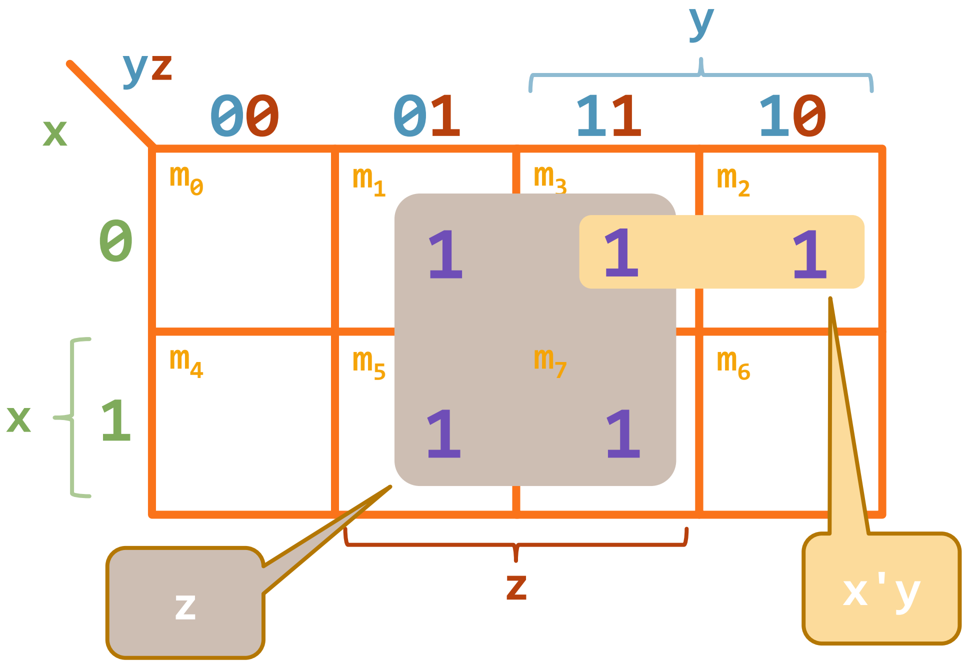
## Τριών μεταβλητών - Απλοποίηση συνάρτησης - 4ο παράδειγμα

απλοποιήστε την έκφραση: **F = x'z + x'y + xy'z + yz**

1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
2. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1**
   - **1η περιοχή**: είναι η τομή
     - των δύο πρώτων γραμμών και
     - της δεύτερης στήλης και της τρίτης στήλης (→ **z**),

     **άρα**: **z**
   - **2η περιοχή**: είναι η τομή
     - της γραμής **0** (→ **x'**) και
     - των δύο τελευταίων στηλών (→ **y'**),

     **άρα**: **x'y**




3. λογικό άθροισμα των δύο όρων γινομένου → απλοποιημένη έκφραση: **F = z + x'y**

# Χάρτης Καρνό

## Τεσσάρων μεταβλητών

# Χάρτης Καρνό

## Τεσσάρων μεταβλητών

- υπάρχουν **16** ελαχιστόροι των τεσσάρων μεταβλητών → ο χάρτης αποτελείται από **16** τετράγωνα

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m_0$ | $m_1$ | $m_3$ | $m_2$ |
| $m_4$ | $m_5$ | $m_7$ | $m_6$ |
| $m_{12}$ | $m_{13}$ | $m_{15}$ | $m_{14}$ |
| $m_8$ | $m_9$ | $m_{11}$ | $m_{10}$ |

χάρτης Καρνό **4** μεταβλητών

παρατηρήστε ότι οι δυαδικοί αριθμοί δεν τοποθετούνται σε αύξουσα σειρά

| wx \ yz | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_0$ w'x'y'z' | $m_1$ w'x'y'z | $m_3$ w'x'yz | $m_2$ w'x'yz' |
| 01 | $m_4$ w'xy'z' | $m_5$ w'xy'z | $m_7$ w'xyz | $m_6$ w'xyz' |
| 11 | $m_{12}$ wxy'z' | $m_{13}$ wxy'z | $m_{15}$ wxyz | $m_{14}$ wxyz' |
| 10 | $m_8$ wx'y'z' | $m_9$ wx'y'z | $m_{11}$ wx'yz | $m_{10}$ wx'yz' |

y

x

w

z

παρατηρήστε ότι οι δυαδικοί αριθμοί δεν τοποθετούνται σε αύξουσα σειρά

παρουσιάζεται η σχέση μεταξύ των τετραγώνων των τεσσάρων μεταβλητών **w**, **x**, **y** και **z**

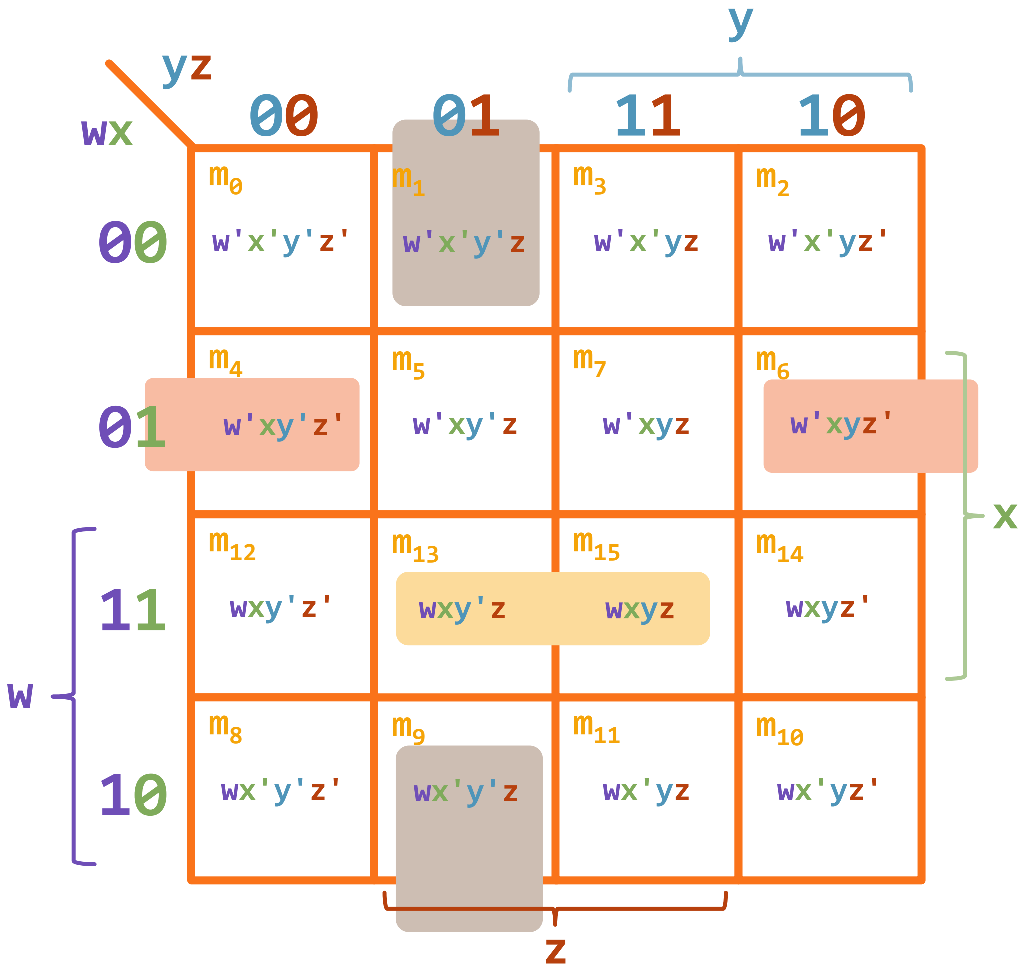
# Χάρτης Καρνό
## Τεσσάρων μεταβλητών - Γειτονικά τετράγωνα

I. τετράγωνα που εφάπτονται
   - π.χ. τα $m_{13}$ και $m_{15}$

II. τετράγωνα της 1ης γραμμής με τετράγωνα της 4ης γραμμής που ανήκουν στην ίδια στήλη
   - π.χ. τα $m_1$ και $m_9$

III. τετράγωνα της 1ης στήλης με τετράγωνα της 4ης στήλης που ανήκουν στην ίδια γραμμή
   - π.χ. τα $m_4$ και $m_6$

- όσο περισσότερα γειτονικά τετράγωνα συνδυαστούν → τόσο λιγότερες μεταβλητές παίρνουμε στον τελικό όρο γινομένου, *π.χ. για το χάρτη Καρνό τεσσάρων μεταβλητών:*
  - **1** τετράγωνο → έναν ελαχιστόρο → έναν όρο με τέσσερις παράγοντες
  - **2** τετράγωνα → έναν όρο με τρεις παράγοντες
  - **4** τετράγωνα → έναν όρο με δύο παράγοντες
  - **8** τετράγωνα → έναν όρο με έναν παράγοντα
  - **16** τετράγωνα → καλύπτουν το σύνολο της επιφάνειας του χάρτη → απλοποιημένη συνάρτηση πάντα ίση με **1**



# Χάρτης Καρνό

## Τεσσάρων μεταβλητών - Απλοποίηση συνάρτησης - 1ο παράδειγμα

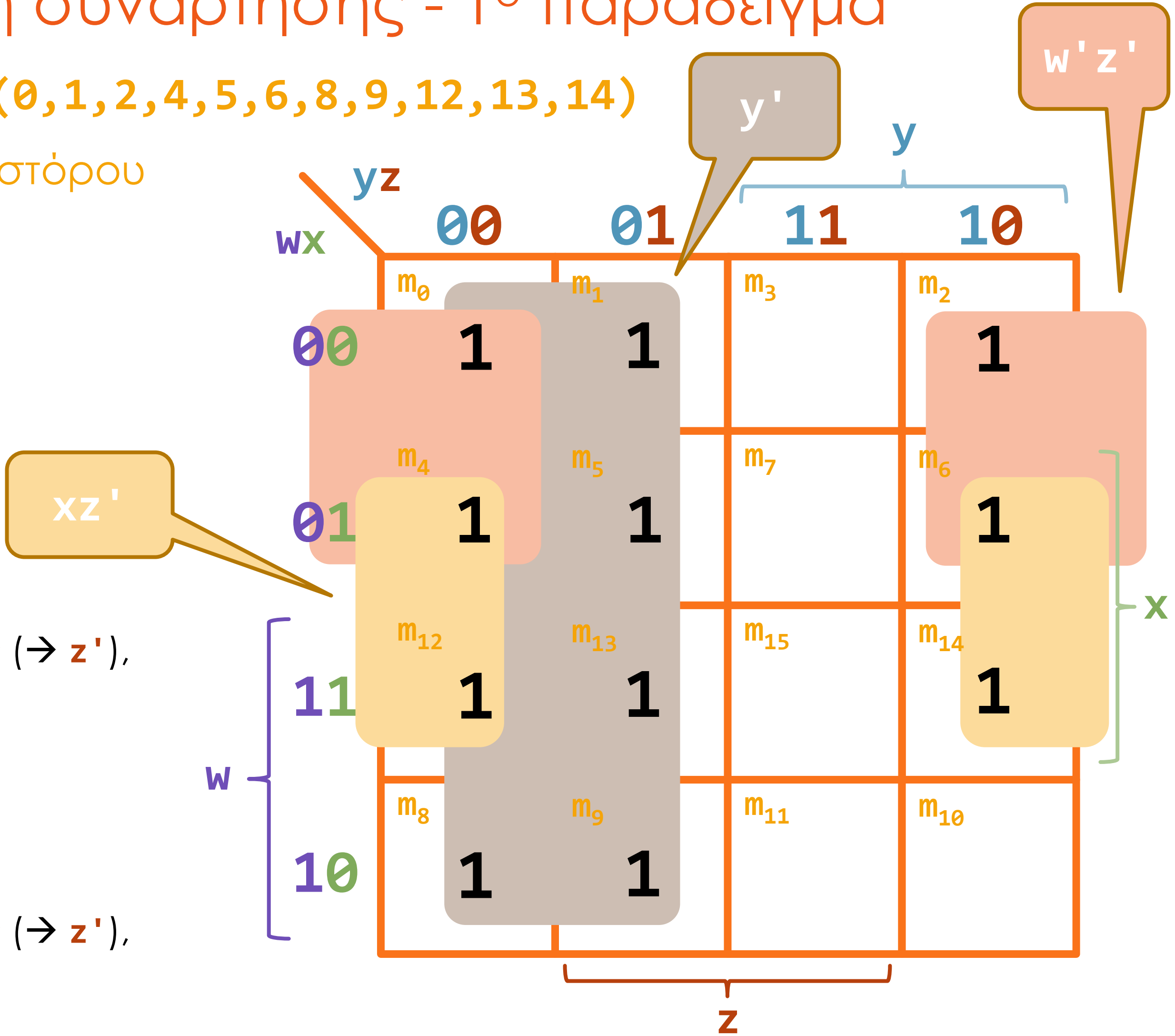
απλοποιήστε την έκφραση: `F(w,x,y,z) = Σ(0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14)`

1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
2. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1**
   - **1η περιοχή**: οι δύο πρώτες στήλες (→ `y'`)

     **άρα**: `y'`
   - **2η περιοχή**: είναι η τομή
     - των δύο πρώτων γραμμών (→ `w'`) και
     - της πρώτης στήλης και της τελευταίας στήλης (→ `z'`),

     **άρα**: `w'z'`
   - **3η περιοχή**: είναι η τομή
     - της δεύτερης και τρίτης γραμμής (→ `x`) και
     - της πρώτης στήλης και της τελευταίας στήλης (→ `z'`),

     **άρα**: `xz'`



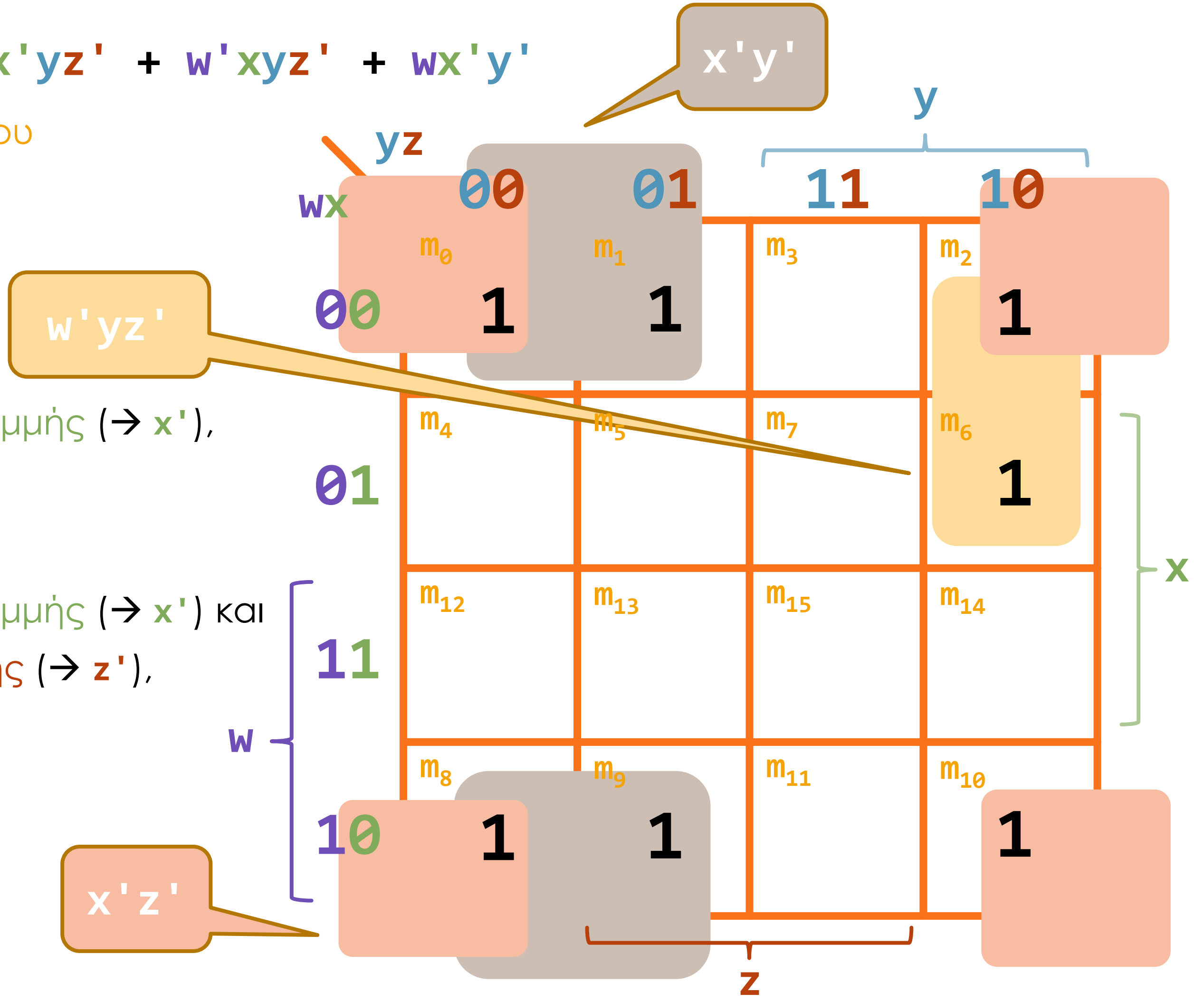

3. λογικό άθροισμα των τριών όρων γινομένου → απλοποιημένη έκφραση: $\boxed{F = y' + w'z' + xz'}$

# Χάρτης Καρνό

## Τεσσάρων μεταβλητών - Απλοποίηση συνάρτησης - 2ο παράδειγμα

απλοποιήστε την έκφραση: $F = w'x'y' + x'yz' + w'xyz' + wx'y'$

1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
2. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1**
   - **1η περιοχή**: είναι η τομή
     - των δύο πρώτων στηλών (→ $y'$) και
     - της πρώτης γραμμής και της τελευταίας γραμμής (→ $x'$),
   
   άρα: $x'y'$
   - **2η περιοχή**: είναι η τομή
     - της πρώτης γραμμής και της τελευταίας γραμμής (→ $x'$) και
     - της πρώτης στήλης και της τελευταίας στήλης (→ $z'$),
   
   άρα: $x'z'$
   - **3η περιοχή**: είναι η τομή
     - των δύο πρώτων γραμμών (→ $w'$) και
     - της τελευταίας στήλης (→ $yz'$),
   
   άρα: $w'yz'$




3. λογικό άθροισμα των τριών όρων γινομένου → απλοποιημένη έκφραση: $F = x'y' + x'z' + w'yz'$

# Χάρτης Καρνό
## Τεσσάρων μεταβλητών - Σύνοψη

- κατά την επιλογή γειτονικών τετραγώνων πρέπει να εξασφαλίσουμε:
  1. όλοι οι ελαχιστόροι της συνάρτησης καλύπτονται από τις επιλεγείσες περιοχές
  2. ο αριθμός παραγόντων στην απλοποιημένη έκφραση είναι ο ελάχιστος
  3. δεν υπάρχουν περιττοί όροι
     - δηλαδή όροι που προκύπτουν από ελαχιστόρους που καλύπτονται ήδη από άλλους όρους

- ωστόσο, είναι δυνατόν να υπάρχουν δύο ή περισσότερες απλοποιημένες εκφράσεις που ικανοποιούν τα κριτήρια απλοποίησης

- τότε, η διαδικασία απλοποίησης μπορεί να γίνει με πιο συστηματικό τρόπο, με χρήση των ειδικών όρων
  - πρωτεύοντες και θεμελιώδεις πρωτεύοντες

# Χάρτης Καρνό

## Τεσσάρων μεταβλητών - Πρωτεύοντες όροι

- **πρωτεύων** όρος: ο απλοποιημένος όρος γινομένου που παίρνουμε αν συνδυάσουμε το μέγιστο αριθμό γειτονικών τετραγώνων του χάρτη
  - ένα **1** σε ένα χάρτη αποτελεί πρωτεύοντα όρο, μόνο εάν δε γειτνιάζει με άλλα **1**
  - δύο γειτονικά **1** αποτελούν πρωτεύοντα όρο, μόνο εφόνον δεν ανήκουν σε μια ομάδα τεσσάρων γειτονικών **1**
  - τέσσερα γειτονικά **1** αποτελούν πρωτεύοντα όρο, μόνο εφόνον δεν ανήκουν σε μια ομάδα οκτώ γειτονικών **1**

- **θεμελιώδης** πρωτεύων όρος: ένας πρωτεύων όρος που περιλαμβάνει ελαχιστόρο που καλύπτεται μόνο από αυτόν τον πρωτεύοντα όρο

# Χάρτης Καρνό

## Τεσσάρων μεταβλητών - Πρωτεύοντες όροι - Παράδειγμα

έστω η έκφραση: **F(w,x,y,z) = Σ(0,2,3,5,7,8,9,10,11,13,15)**

1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
2. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1**

- **1η περιοχή**: είναι η τομή
  - της πρώτης γραμμής και της τελευταίας γραμμής (→ **x'**) και
  - της πρώτης στήλης και της τελευταίας στήλης (→ **z'**),

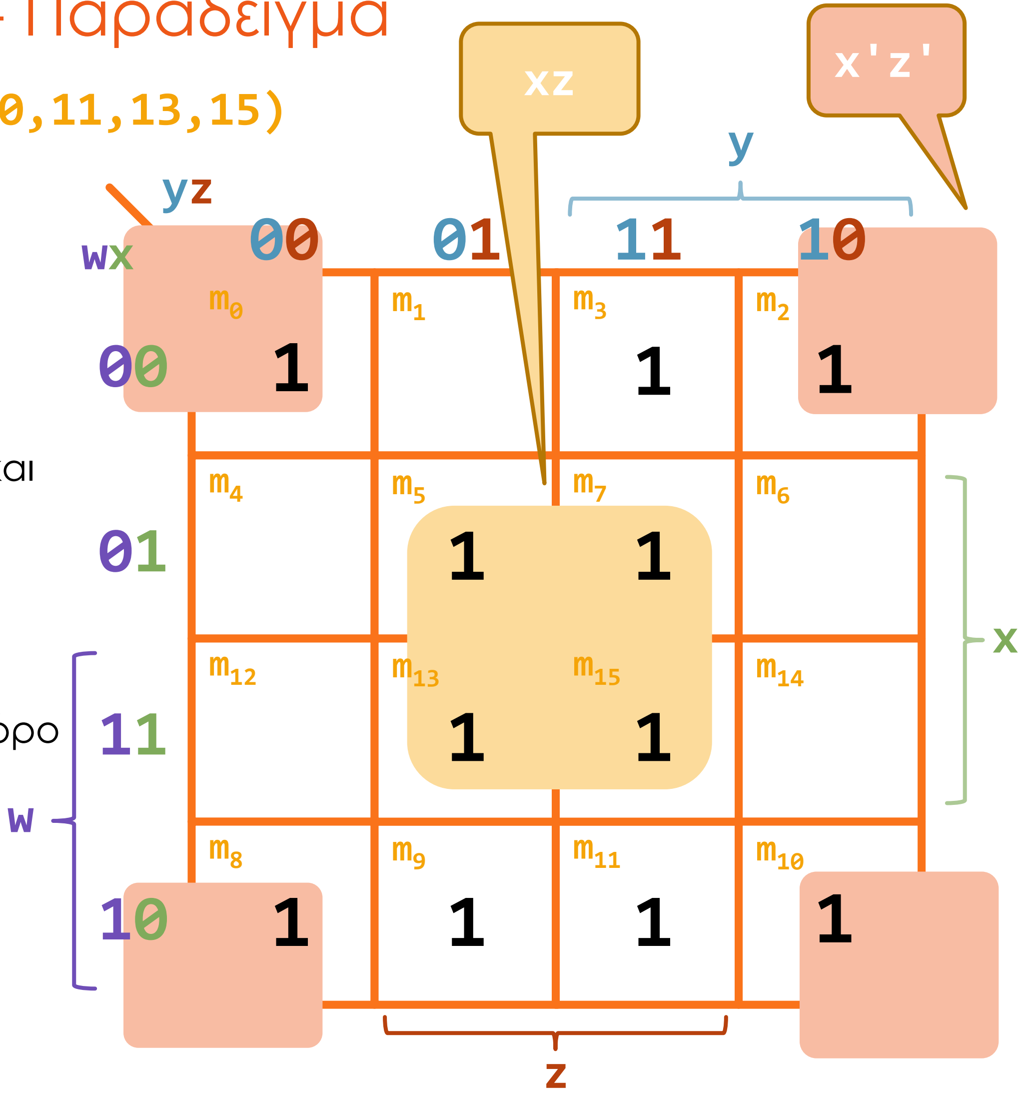
  άρα: **x'z'**

  ☞ ο οποίος είναι και **θεμελιώδης** πρωτεύον όρος, καθώς ο ελαχιστόρος $m_0$ δεν καλύπτεται από άλλον πρωτεύοντα όρο

- **2η περιοχή**: είναι η τομή
  - της δεύτερης και τρίτης γραμμής (→ **x**) και
  - της δεύτερης και τρίτης στήλης (→ **z**),

  άρα: **xz**

  ☞ ο οποίος είναι και **θεμελιώδης** πρωτεύον όρος, καθώς ο ελαχιστόρος $m_5$ δεν καλύπτεται από άλλον πρωτεύοντα όρο

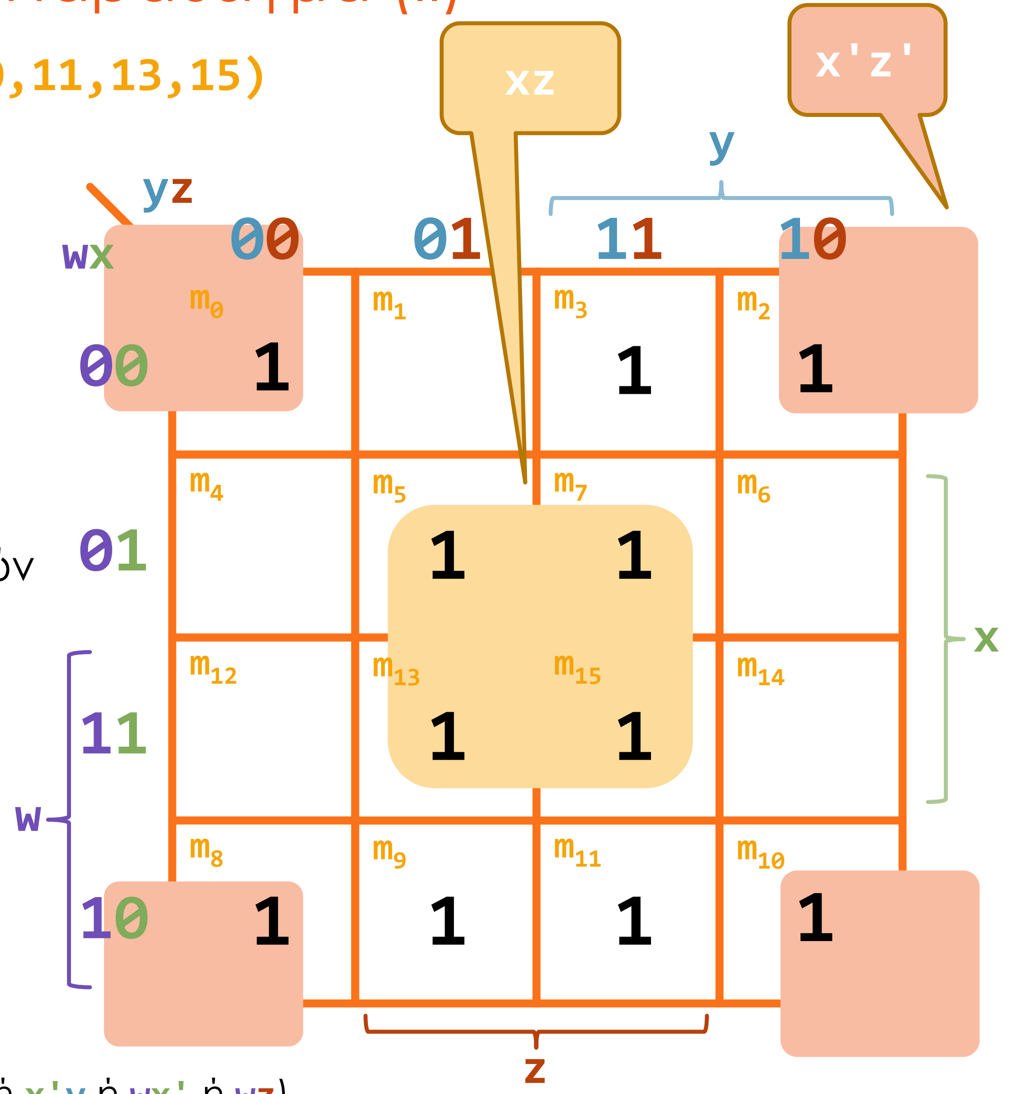


# Χάρτης Καρνό

## Τεσσάρων μεταβλητών - Πρωτεύοντες όροι - Παράδειγμα (ΙΙ)

έστω η έκφραση: **F(w,x,y,z) = Σ(0,2,3,5,7,8,9,10,11,13,15)**

1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
2. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1** που παράγουν θεμελιώδεις πρωτεύοντες όρους
   - **1η περιοχή**: x'z'
   - **2η περιοχή**: xz
3. έχουν απομείνει οι ελαχιστόροι $m_3$, $m_9$ και $m_{11}$ οι οποίοι μπορούν να καλυφθούν με τις παρακάτω (μη μοναδικές) περιοχές:
   - $m_3$:
     - 3η στήλη (→ yz) ή
     - τομή 1ης & 4ης γραμμής με δύο τελευταίες στήλες (→x'y)
   - $m_9$:
     - 4η γραμμή (→ wx') ή
     - τομή 3ης & 4ης γραμμής με 2η & 3η στήλη (→wz)
   - $m_{11}$:
     - οποιαδήποτε από τις προηγούμενες τέσσερις περιοχές (yz ή x'y ή wx' ή wz)



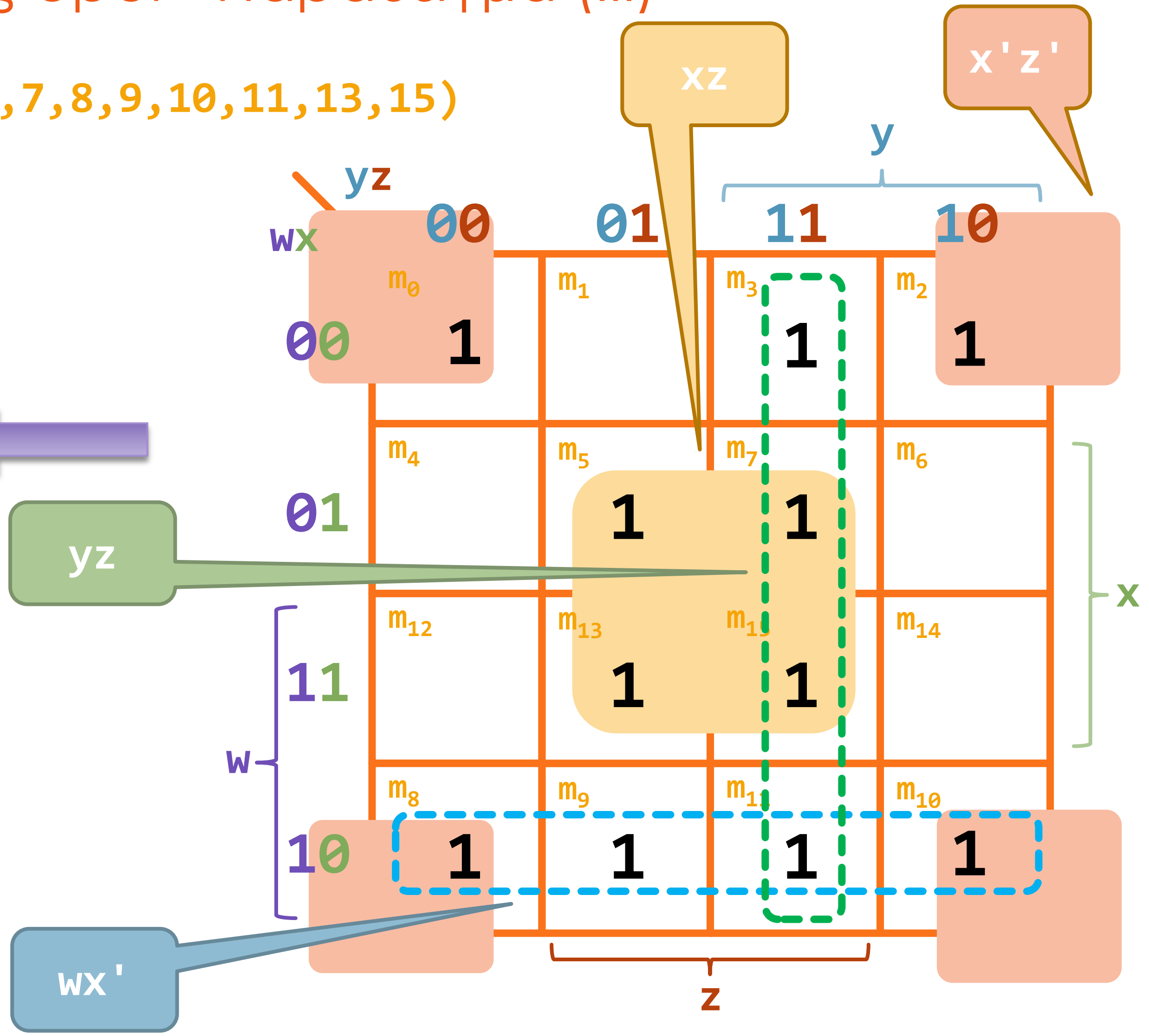
# Χάρτης Καρνό

## Τεσσάρων μεταβλητών - Πρωτεύοντες όροι - Παράδειγμα (III)

οπότε η έκφραση: `F(w,x,y,z) = Σ(0,2,3,5,7,8,9,10,11,13,15)`

- μπορεί να απλοποιηθεί σε οποιαδήποτε από τις παρακάτω εκφράσεις:

1. `F(w,x,y,z) = x'z' + xz + yz + wz`
2. `F(w,x,y,z) = x'z' + xz + yz + wx'`
3. `F(w,x,y,z) = x'z' + xz + x'y + wz`
4. `F(w,x,y,z) = x'z' + xz + x'y + wx'`



# Χάρτης Καρνό

## Πέντε μεταβλητών

# Χάρτης Καρνό
## Πέντε μεταβλητών

- υπάρχουν **32** ελαχιστόροι των τεσσάρων μεταβλητών → ο χάρτης αποτελείται από **32** τετράγωνα

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m_0$ | $m_1$ | $m_3$ | $m_2$ |
| $m_4$ | $m_5$ | $m_7$ | $m_6$ |
| $m_{12}$ | $m_{13}$ | $m_{15}$ | $m_{14}$ |
| $m_8$ | $m_9$ | $m_{11}$ | $m_{10}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m_{16}$ | $m_{17}$ | $m_{19}$ | $m_{18}$ |
| $m_{20}$ | $m_{21}$ | $m_{23}$ | $m_{22}$ |
| $m_{28}$ | $m_{29}$ | $m_{31}$ | $m_{30}$ |
| $m_{24}$ | $m_{25}$ | $m_{27}$ | $m_{260}$ |

# Χάρτης Καρνό

## Πέντε μεταβλητών

- υπάρχουν **32 ελαχιστόροι** των τεσσάρων μεταβλητών → ο χάρτης αποτελείται από **32 τετράγωνα**

**A = 0**

| BC \ DE | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_0$ A'B'C'D'E' | $m_1$ A'B'C'D'E | $m_3$ A'B'C'DE | $m_2$ A'B'C'DE' |
| 01 | $m_4$ A'B'CD'E' | $m_5$ A'B'CD'E | $m_7$ 'AB'CDE | $m_6$ A'B'CDE' |
| 11 | $m_{12}$ A'BCD'E' | $m_{13}$ A'BCD'E | $m_{15}$ A'BCDE | $m_{14}$ A'BCDE' |
| 10 | $m_8$ A'BC'D'E' | $m_9$ A'BC'D'E | $m_{11}$ A'BC'DE | $m_{10}$ A'BC'DE' |

D, C, B, E

**A = 1**

| BC \ DE | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_{16}$ AB'C'D'E' | $m_{17}$ AB'C'D'E | $m_{19}$ AB'C'DE | $m_{18}$ AB'C'DE' |
| 01 | $m_{20}$ AB'CD'E' | $m_{21}$ AB'CD'E | $m_{23}$ AB'CDE | $m_{22}$ AB'CDE' |
| 11 | $m_{28}$ ABCD'E' | $m_{29}$ ABCD'E | $m_{31}$ ABCDE | $m_{30}$ ABCDE' |
| 10 | $m_{24}$ ABC'D'E' | $m_{25}$ ABC'D'E | $m_{27}$ ABC'DE | $m_{26}$ ABC'DE' |

D, C, B, E

# Χάρτης Καρνό

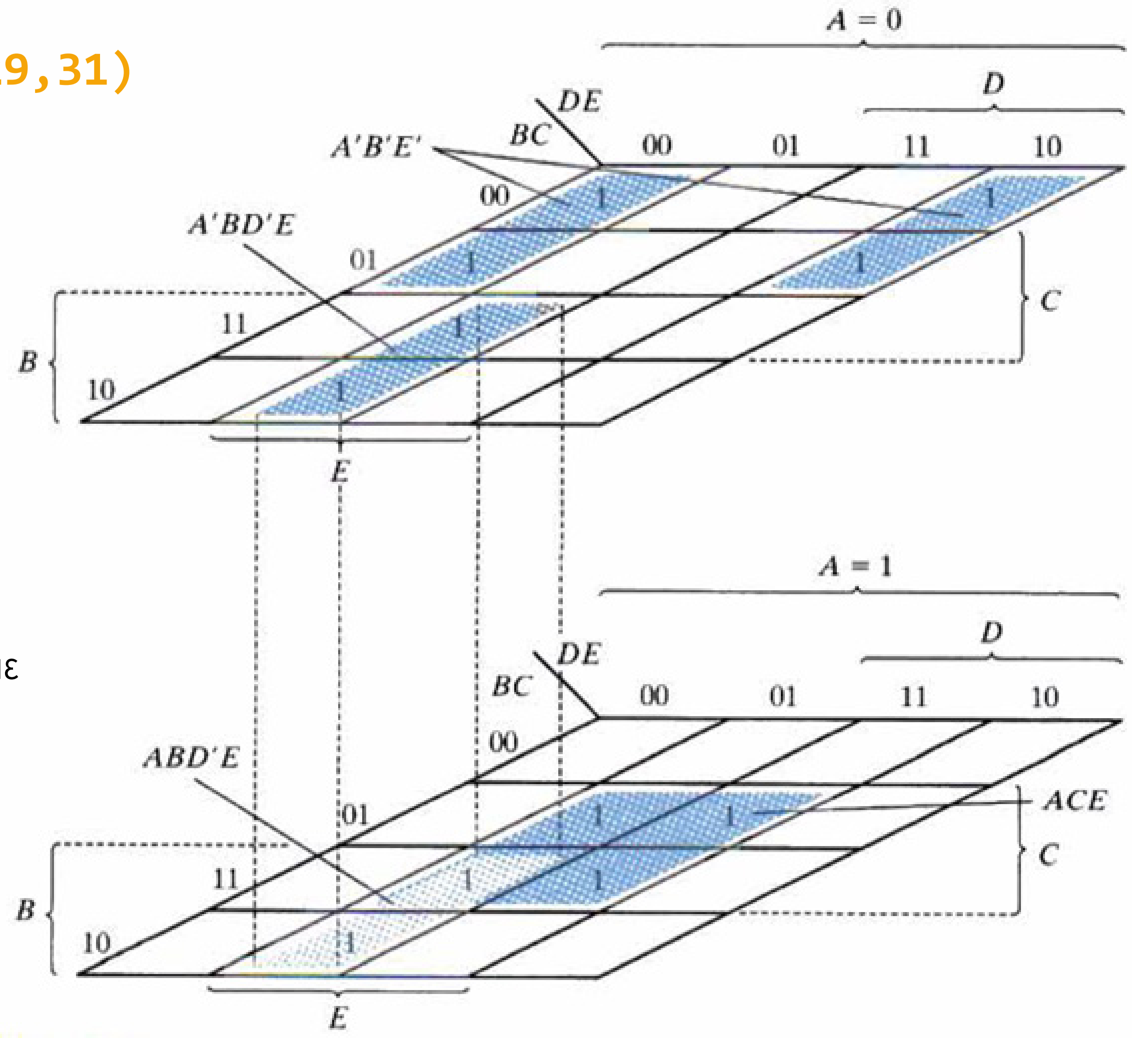
## Πέντε μεταβλητών - Απλοποίηση συνάρτησης - Παράδειγμα

απλοποιήστε την έκφραση:

`F(A,B,C,Y,Z) = Σ(0,2,4,6,9,13,21,23,25,29,31)`

1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
2. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1**
   - τοποθετούμε το μισό χάρτη πάνω από τον άλλο μισό
   - δύο τετράγωνα είναι γειτονικά εάν
     a) είτε γειτνιάζουν σε κάποιο από τα μισά του χάρτη (βάσει των κανόνων που γνωρίζουμε για το χάρτη Καρνό τεσσάρων μεταβλητών)
     b) είτε συμπίπτουν κατά την επίθεση των δύο μισών του χάρτη
3. λογικό άθροισμα των όρων γινομένου → απλοποιημένη έκφραση:

`F = A'B'E' + BD'E + ACE`



# Χάρτης Καρνό
## Σύνοψη

- η χρήση χαρτών με περισσότερες από τέσσερις μεταβλητές δεν είναι το ίδιο απλή με αυτή των τεσσάρων ή λιγότερων μεταβλητών

- καθώς ο αριθμός μεταβλητών μεγαλώνει
  - ο αριθμός τετραγώνων μεγαλώνει εκθετικά
  - ο γεωμερικός συνδυασμός γειτονικών τετραγώνων γίνεται πολύ πολύπλοκος

<u>εναλλακτική λύση</u>:

- χρήση ειδικών προγραμμάτων υπολογιστών για την απλοποίηση των συναρτήσεων Boole με μεγάλο αριθμό μεταβλητών

# Χάρτης Καρνό

## Σύνοψη - Σχέση Γειτονικών τετραγώνων με αριθμό παραγόντων

| | αριθμός γειτονικών τετραγώνων | αριθμός παραγόντων στον αντίστοιχο απλοποιημένο όρο του χάρτη Καρνό n μεταβλητών | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| k | $2^k$ | n = 2 | n = 3 | n = 4 | n = 5 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 8 | | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 16 | | | 0 | 1 |
| 5 | 32 | | | | 0 |

# Χάρτης Καρνό

## Απλοποίηση γινομένου αθροισμάτων

# Χάρτης Καρνό

## Απλοποίηση γινομένου αθροισμάτων

- ☞ έως τώρα, οι απλοποιημένες συναρτήσεις Boole που προέκυπταν από την ελαχιστοποίηση με τη μέθοδο του χάρτη → ήταν σε μορφή αθροίσματος γινομένων

- με μια μικρή τροποποίηση της διαδικασίας μπορούμε να παράγουμε γινόμενα αθροισμάτων
  - τα **1** που τοποθετούνται στα τετράγωνα → παριστάνουν ελαχιστόρους
  - οι ελαχιστόροι που δεν περιλαμβάνονται σε μία συνάρτηση **F** → προσδιορίζουν το συμπλήρωμα της συνάρτησης (**F'**)
  - εάν θέσουμε **0** στα κενά τετράγωνα & συνδυάσουμε τα γειτονικά τετράγωνα με **0** → παίρνουμε μια απλοποιημένη έκφραση της **F'**
  - καθώς ισχύει **(F')' = F**, εφαρμόζοντας το θεώρημα DeMorgan → παίρνουμε την απλοποιημένη **F** σε μορφή γινομένου αθροισμάτων

# Χάρτης Καρνό

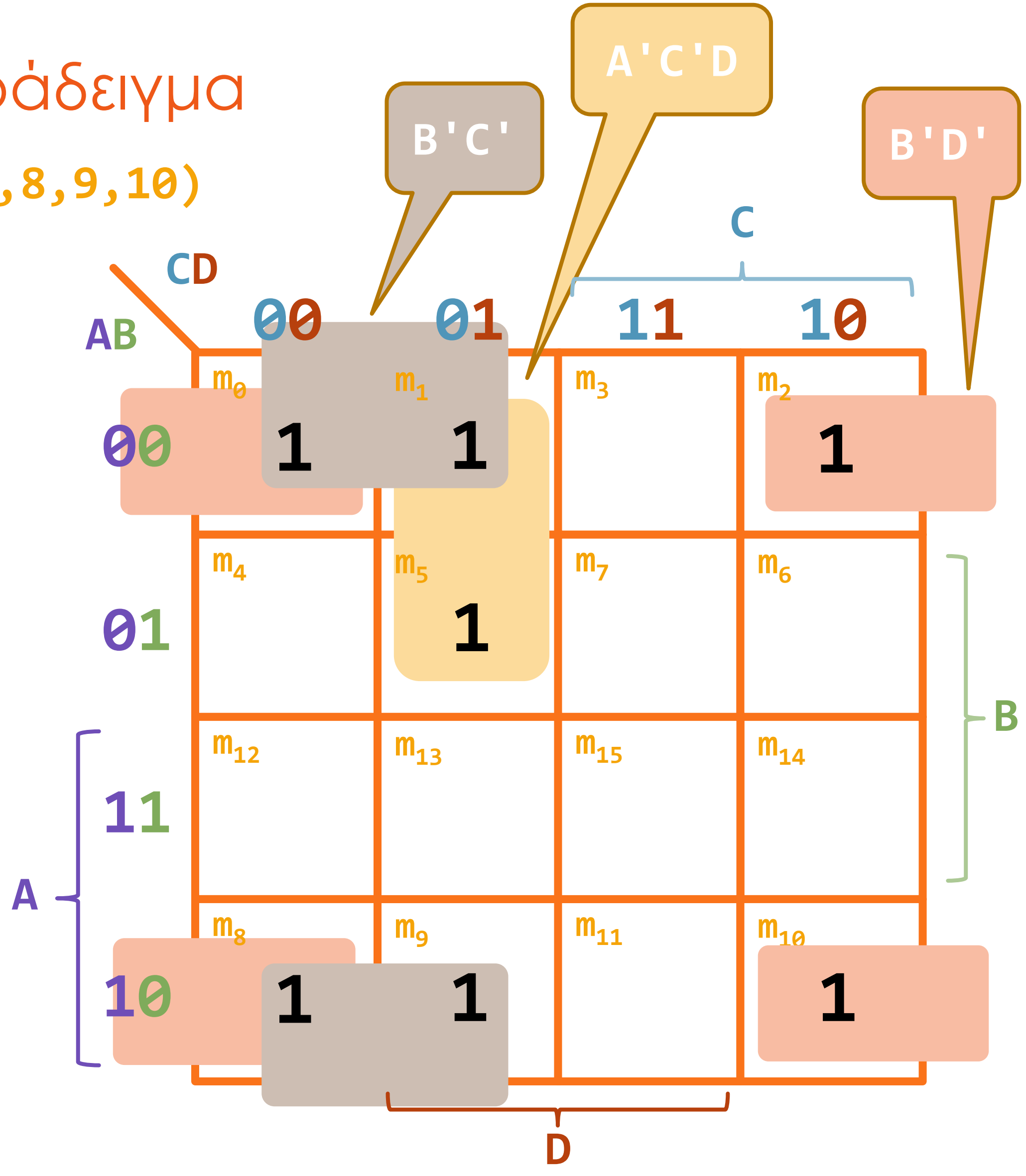
## Απλοποίηση γινομένου αθροισμάτων - Παράδειγμα

απλοποιήστε την έκφραση: $F(A,B,C,D) = \Sigma(0,1,2,5,8,9,10)$
ώστε να τεθεί σε μορφή

a) αθροίσματος γινομένων

1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
2. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1**
3. λογικό άθροισμα των τριών όρων γινομένου → απλοποιημένη έκφραση:

$\boxed{F = B'D' + B'C' + A'C'D}$



# Χάρτης Καρνό

## Απλοποίηση γινομένου αθροισμάτων - Παράδειγμα (II)

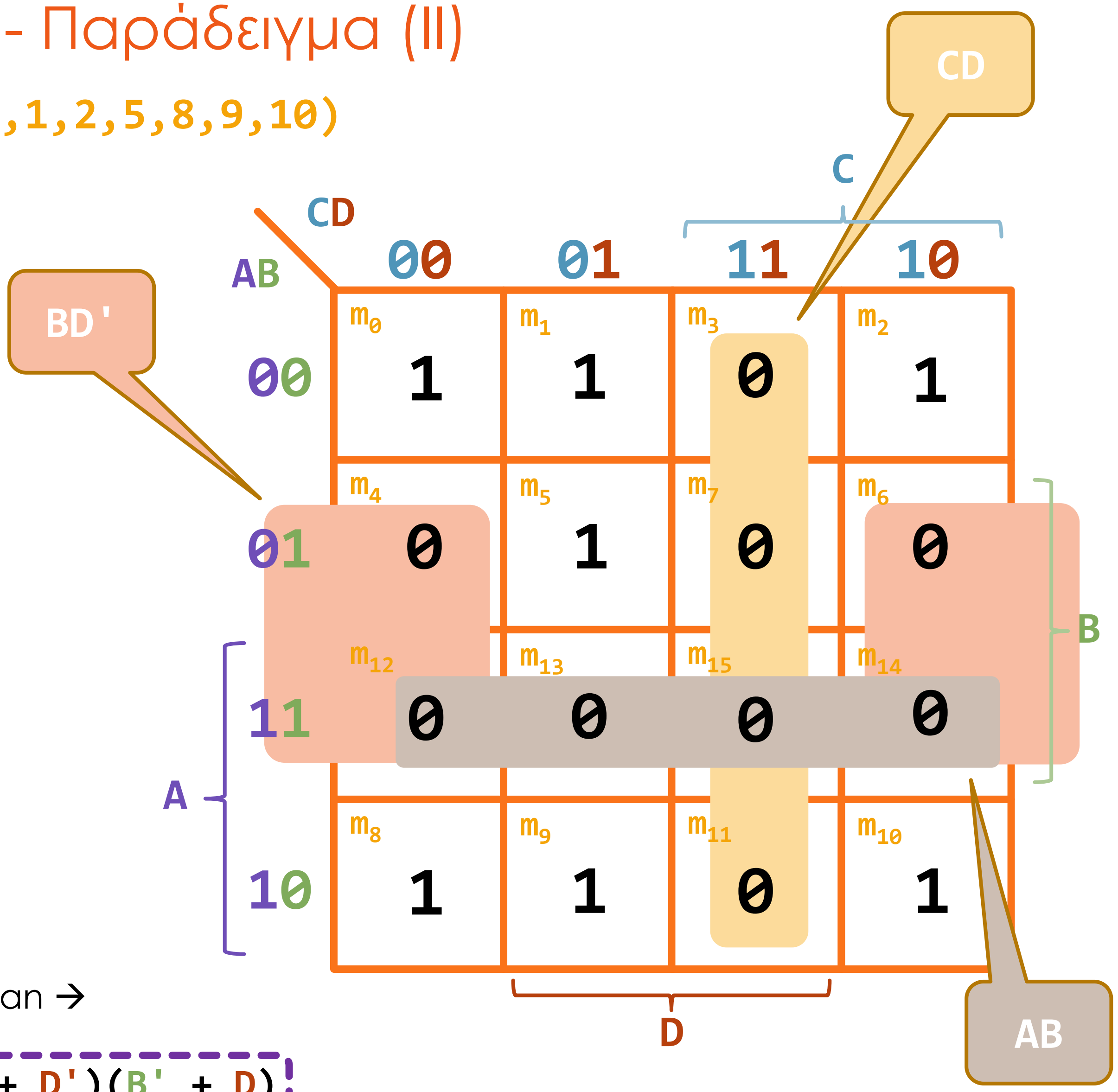
απλοποιήστε την έκφραση: `F(A,B,C,D) = Σ(0,1,2,5,8,9,10)`
ώστε να τεθεί σε μορφή

a) αθροίσματος γινομένων

1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
2. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1**
3. λογικό άθροισμα των τριών όρων γινομένου → απλοποιημένη έκφραση:
   `F = B'D' + B'C' + A'C'D`

b) γινόμενο αθροισμάτων

1. τοποθετούμε την τιμή **0** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που δεν ανήκει στη συνάρτηση
2. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **0**
3. απλοποιημένη έκφραση της `F'`:
   `F' = AB + CD + BD'`
4. υπολογίζουμε `F = (F')'` εφαρμόζοντας το DeMorgan → λογικό γινόμενο των τριών όρων αθροίσματος → απλοποιημένη έκφραση: `F = (A' + B')(C' + D')(B' + D)`



# Χάρτης Καρνό

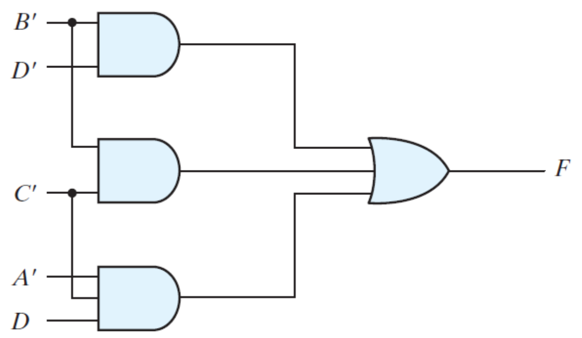
## Απλοποίηση γινομένου αθροισμάτων - Παράδειγμα - Λογικά διαγράμματα

η έκφραση F(A,B,C,D) = Σ(0,1,2,5,8,9,10) απλοποιείται σε

πρότυπη μορφή: → λογικό διάγραμμα δύο επιπέδων

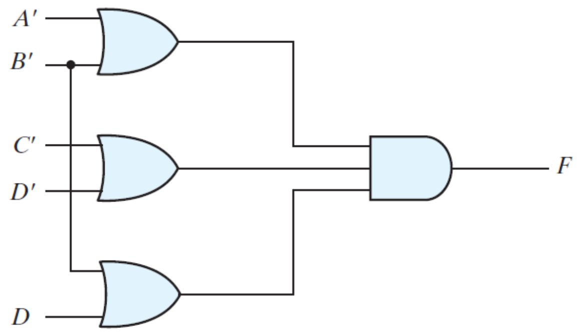
a) αθροίσματος γινομένων

F = B'D' + B'C' + A'C'D →




b) γινόμενο αθροισμάτων

F = (A' + B')(C' + D')(B' + D) →



# Χάρτης Καρνό

## Συνθήκες αδιαφόρου τιμής (ή συνθήκες αδιαφορίας)

# Ατελώς καθορισμένες συναρτήσεις

- έχουν μη καθορισμένες εξόδους για κάποιους συνδυασμούς τιμών εισόδων
  - δηλαδή, η συνάρτηση δεν προσδιορίζεται για αυτούς τους συνδυασμούς
- εμφανίζονται σε μερικές πρακτικές εφαρμογές
  - π.χ. κώδικας BCD → έχει έξι συνδυασμούς που δε χρησιμοποιούνται
  - στις περισσότερες εφαρμογές απλά αδιαφορούμε για την τιμή της συνάρτησης στους απροσδιόριστους ελαχιστόρους
- ✍ ονομάζουμε τους απροσδιόριστους ελαχιστόρους μιας συνάρτησης:
  - συνθήκες αδιαφόρου τιμής ή
  - συνθήκες αδιαφορίας
- ✍ συμβολίζουμε τους απροσδιόριστους ελαχιστόρους μιας συνάρτησης **F** σε ένα χάρτη Καρνό με το σύμβολο **X**
  - το **X** υποδεικνύει ότι αδιαφορούμε για την τιμή (`0` ή `1`) του αντίστοιχου ελαχιστόρου της **F**
  - όταν αναζητούμε γειτονικά τετράγωνα → επιτρέπεται να υποθέσουμε ότι το **X** είναι είτε `0` είτε `1`
    - αναλόγως τι μας εξυπηρετεί → δηλαδή παράγει τον απλούστερο όρο

# Χάρτης Καρνό

## Τεσσάρων μεταβλητών - Συνθήκες αδιαφορίας - Παράδειγμα

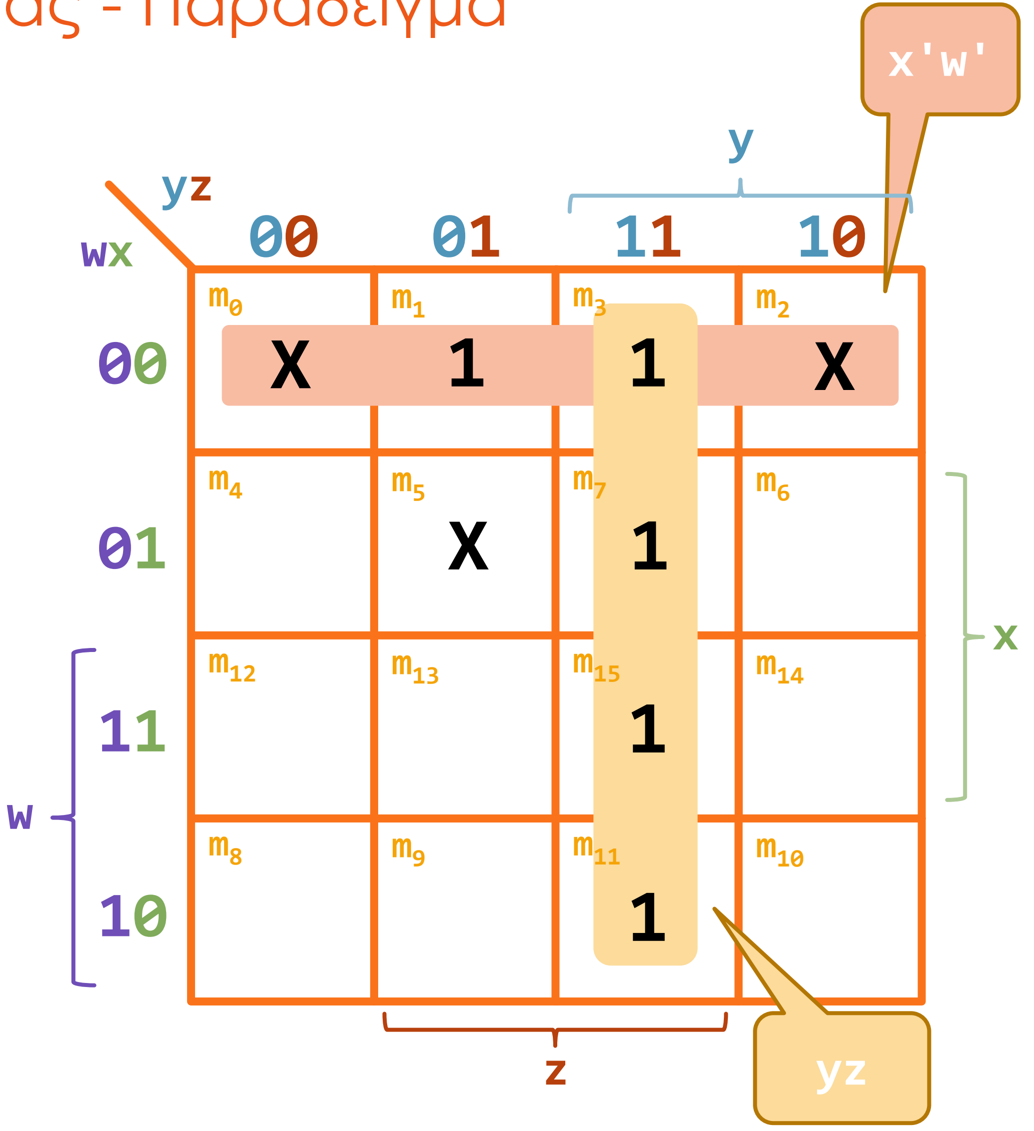
απλοποιήστε την έκφραση:

`F(w,x,y,z) = Σ(1,3,7,11,15)`

η οποία έχει τις συνθήκες αδιαφορίας:

`d(w,x,y,z) = Σ(0,2,5)`

1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
2. τοποθετούμε το σύμβολο **X** σε κάθε τετράγωνο που αντιστοιχεί σε ελαχιστόρο αδιαφορίας
3. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1**
   a) λογικό άθροισμα των δύο όρων γινομένου → απλοποιημένη έκφραση: `F = yz + w'x`



# Χάρτης Καρνό

## Τεσσάρων μεταβλητών - Συνθήκες αδιαφορίας - Παράδειγμα (II)

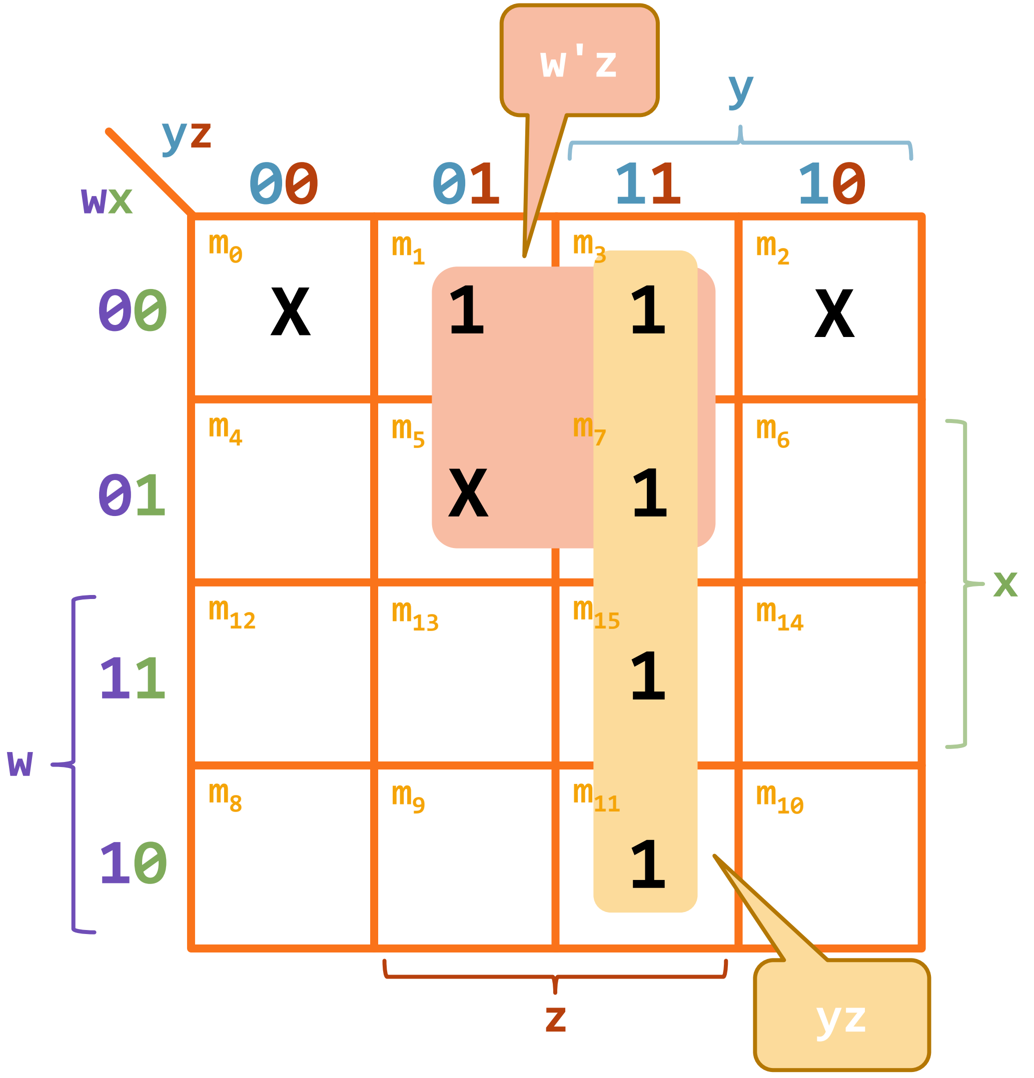
απλοποιήστε την έκφραση:

`F(w,x,y,z) = Σ(1,3,7,11,15)`

η οποία έχει τις συνθήκες αδιαφορίας:

`d(w,x,y,z) = Σ(0,2,5)`

1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
2. τοποθετούμε το σύμβολο **X** σε κάθε τετράγωνο που αντιστοιχεί σε ελαχιστόρο αδιαφορίας
3. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1**
   a) λογικό άθροισμα των δύο όρων γινομένου → απλοποιημένη έκφραση: `F = yz + w'x`
   b) λογικό άθροισμα των δύο όρων γινομένου → απλοποιημένη έκφραση: `F = yz + w'z`



# Χάρτης Καρνό

## Τεσσάρων μεταβλητών - Συνθήκες αδιαφορίας - Παράδειγμα (III)

απλοποιήστε την έκφραση:

`F(w,x,y,z) = Σ(1,3,7,11,15)`

η οποία έχει τις συνθήκες αδιαφορίας:

`d(w,x,y,z) = Σ(0,2,5)`

a) `F = yz + w'x` → `Σ(0,1,2,3,7,11,15)`

- οι ελαχιστόροι 0, 2 έχουν τιμή 1
- ο ελαχιστόρος 5 έχει τιμή 0

b) `F = yz + w'z` → `Σ(1,3,5,7,11,15)`

- οι ελαχιστόροι 0, 2 έχουν τιμή 0
- ο ελαχιστόρος 5 έχει τιμή 1

**οι δύο εκφράσεις:**

- **<u>περιέχουν</u> τους ελαχιστόρους 1,3,7,11,15 (της αρχικής F)**
- **αντιμετωπίζουν <u>διαφορετικά</u> τους ελαχιστόρους αδιαφορίας**

**όσον αφορά την απλοποίηση της ατελώς καθορισμένης συνάρτησης F <u>και οι δύο είναι αποδεκτές</u>!**

# Χάρτης Καρνό

## Τεσσάρων μεταβλητών - Συνθήκες αδιαφορίας - Παράδειγμα (IV)

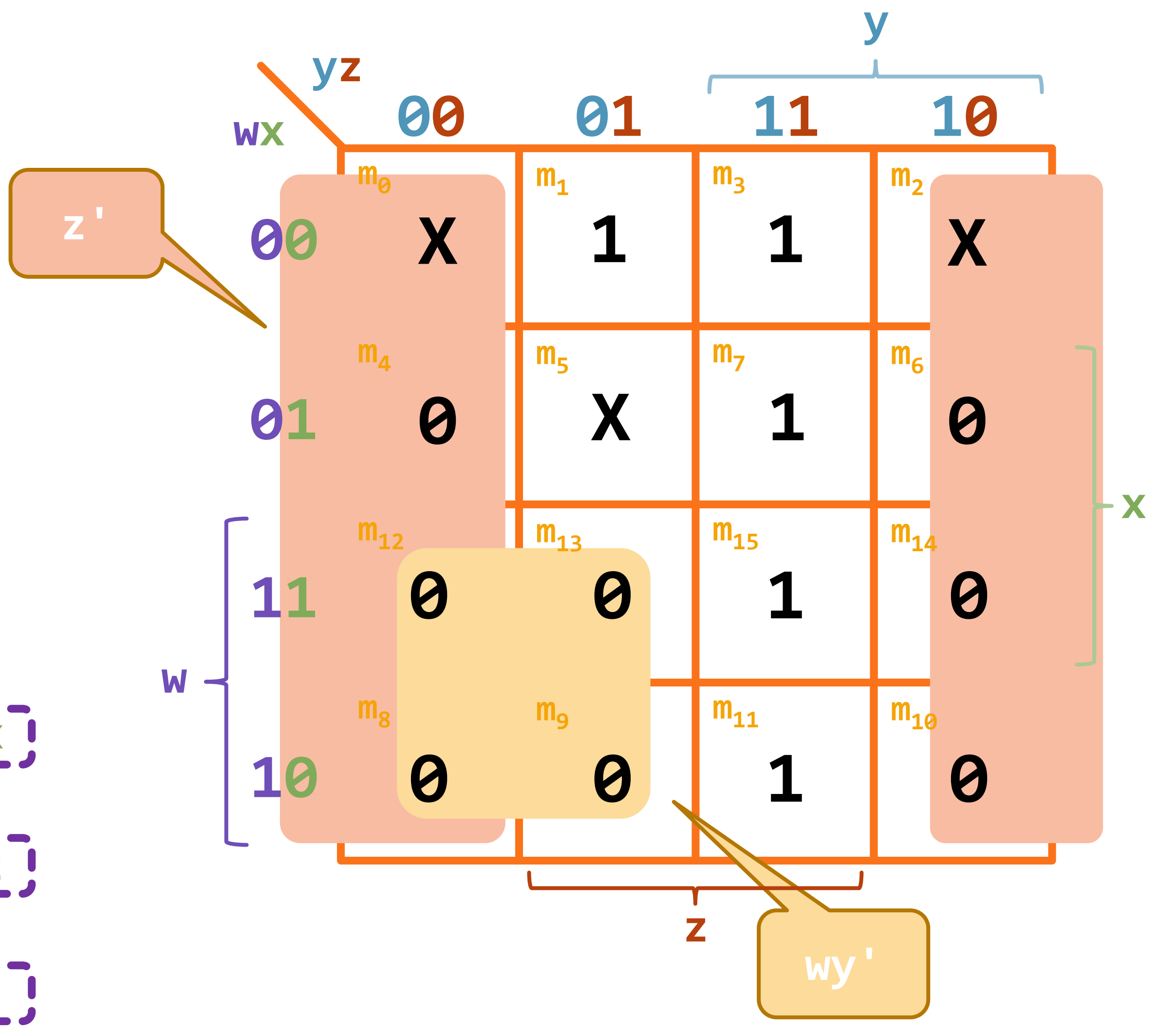
απλοποιήστε την έκφραση:

`F(w,x,y,z) = Σ(1,3,7,11,15)`

η οποία έχει τις συνθήκες αδιαφορίας:

`d(w,x,y,z) = Σ(0,2,5)`

1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
2. τοποθετούμε το σύμβολο **X** σε κάθε τετράγωνο που αντιστοιχεί σε ελαχιστόρο αδιαφορίας
3. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1**
   a) λογικό άθροισμα των δύο όρων γινομένου
   → απλοποιημένη έκφραση: `F = yz + w'x`
   b) λογικό άθροισμα των δύο όρων γινομένου
   → απλοποιημένη έκφραση: `F = yz + w'z`
   c) λογικό γινόμενο των δύο όρων αθροίσματος
   → απλοποιημένη έκφραση: `F = z(w' + y)`



# Υλοποίηση ψηφιακών κυκλωμάτων

## με πύλες NAND και NOR

# Λογικές πύλες
## NAND και NOR

- τα ψηφιακά κυκλώματα κατασκευάζονται πιο συχνά με πύλες **NAND** ή **NOR**, παρά με **AND**, **OR** και **NOT**
  - ✓ οι πύλες **NAND** και **NOR** κατασκευάζονται πιο εύκολα
  - ☞ είναι οι βασικές πύλες όλων των οικογενειών ψηφιακών ολοκληρωμένων κυκλωμάτων

- έχουν αναπτυχθεί κανόνες και διαδικασίες για τη μετατροπή συναρτήσεων Boole που περιέχουν

  τελεστές **AND**, **OR** και **NOT**

  σε ισοδύναμα λογικά διαγράμματα

  είτε με **NAND** είτε **NOR**

# Ψηφιακά κυκλώματα

## με πύλες NAND

- οι πύλες **NAND** χαρακτηρίζονται ως οικουμενικές, καθώς οποιοδήποτε ψηφιακό σύστημα μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με αυτές
  - για να δείξουμε ότι: *οποιαδήποτε συνάρτηση Boole μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με πύλες* ***NAND***
  - αρκεί να δείξουμε ότι: *οι λογικές πράξεις* ***AND***, ***OR*** *και* ***NOT*** *μπορούν να υλοποιηθούν μόνο με πύλες* ***NAND***

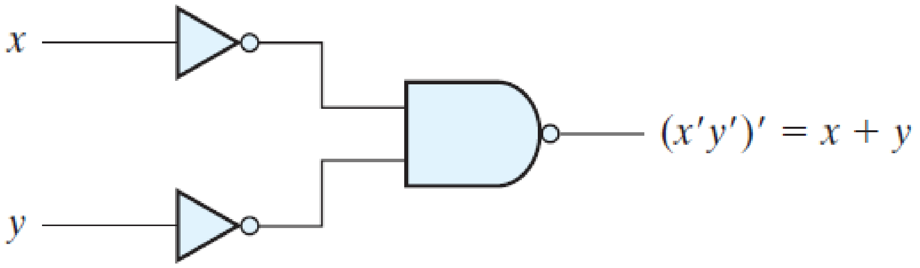
1. ***NOT***


**μία πύλη NAND μίας εισόδου η οποία συμπεριφέρεται ακριβώς ως αντιστροφέας**

2. ***AND***


**δύο πύλες NAND: η $1^{η}$ υπολογίζει την πράξη NAND και η $2^{η}$ αντιστρέφει την τιμή της εξόδου**

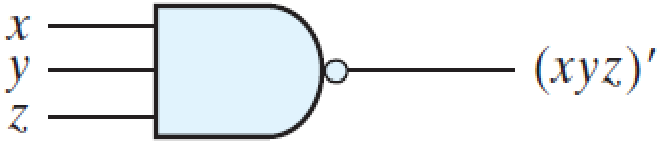
3. ***OR***



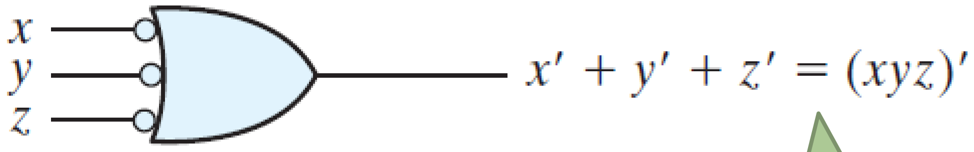

**μία πύλη NAND με πρόσθετους αντιστροφείς στις εισόδους**

# Υλοποίηση συνάρτησης Boole
## με πύλες NAND

1. υπολογίζουμε την απλοποιημένη συνάρτηση Boole, εκφρασμένη με τελεστές **AND**, **OR** και **NOT** και
2. την μετατρέπουμε σε ένα λογικό κύκλωμα με πύλες **NAND**
   - χρησιμοποιώντας απλές τεχνικές για τη μετατροπή των λογικών διαγραμμάτων **AND-OR** σε **NAND**
   - για να διευκολυνθούμε ορίζουμε ένα ισοδύναμο σύμβολο για την πύλη **NAND**
     - ✍ όταν σε ένα διάγραμμα παρουσιάζονται και τα δύο σύμβολα → έχουμε μεικτή σημειογραφία




**AND-αντιστροφή**




**αντιστροφή-OR**

Θεώρημα DeMorgan

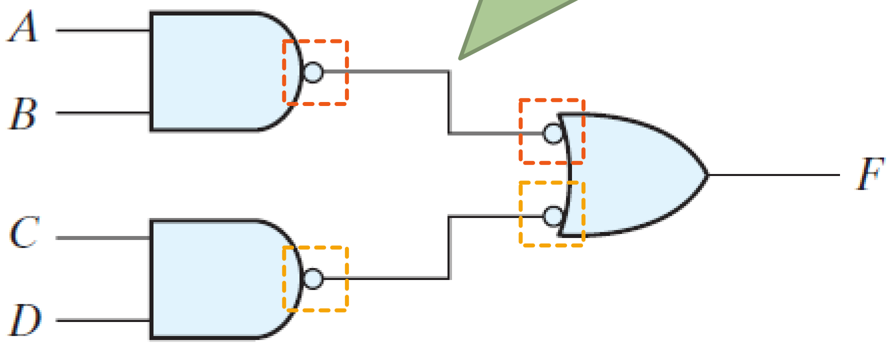
# Υλοποίηση με πύλες NAND

## Δύο επιπέδων

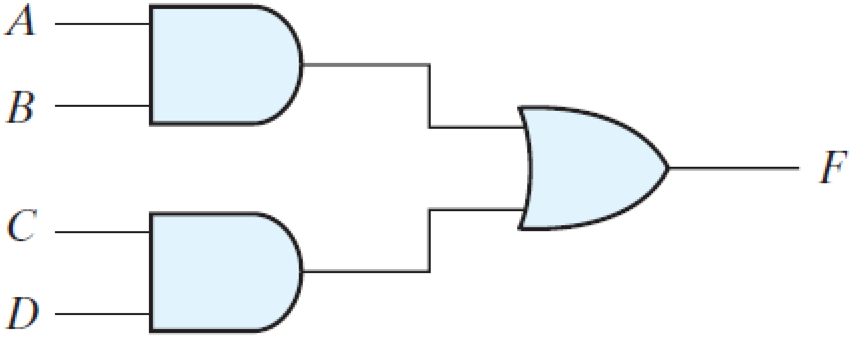
- οι συναρτήσεις πρέπει απαραίτητα να είναι σε μορφή αθροίσματος γινομένων

π.χ. **F = AB + CD**

τα κυκλάκια (αντιστροφή) στην ίδια γραμμή, μπορούν να παραλειφθούν



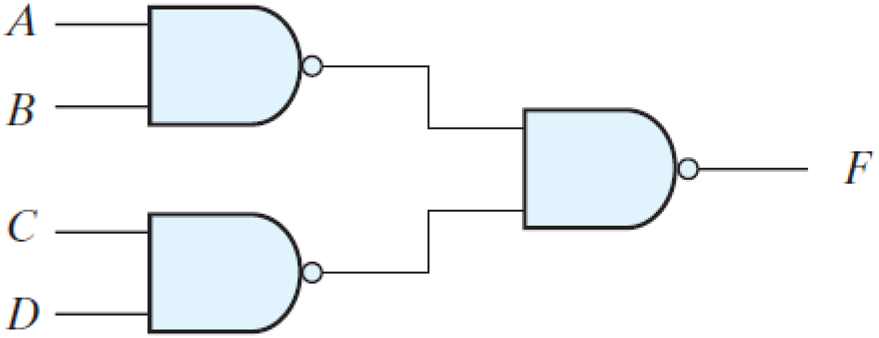

**υλοποίηση με πύλες NAND**
(μεικτή σημειογραφία)




**υλοποίηση με πύλες AND και OR**

επαλήθευση:

```
F = ((AB)'(CD)')'
  = AB + CD
```



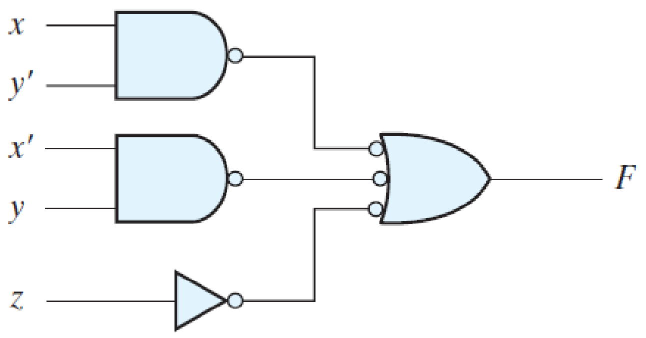

**υλοποίηση με πύλες NAND**

# Υλοποίηση με πύλες NAND
## Δύο επιπέδων - Παράδειγμα

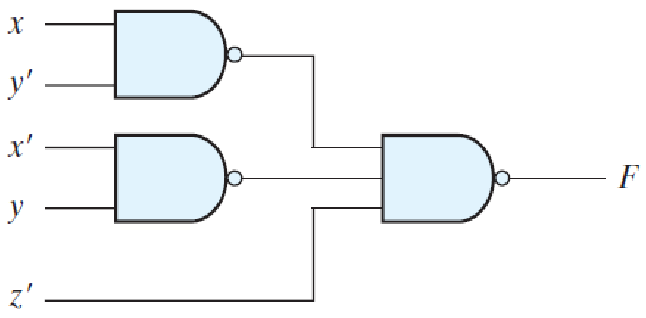
υλοποιήστε με πύλες **NAND** την έκφραση: $F(x,y,z) = \Sigma(1,2,3,4,5,7)$

a) απλοποίηση συνάρτησης σε μορφή αθροίσματος γινομένων
   1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
   2. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1**
   3. απλοποιημένη έκφραση: $\boxed{F = xy' + x'y + z}$

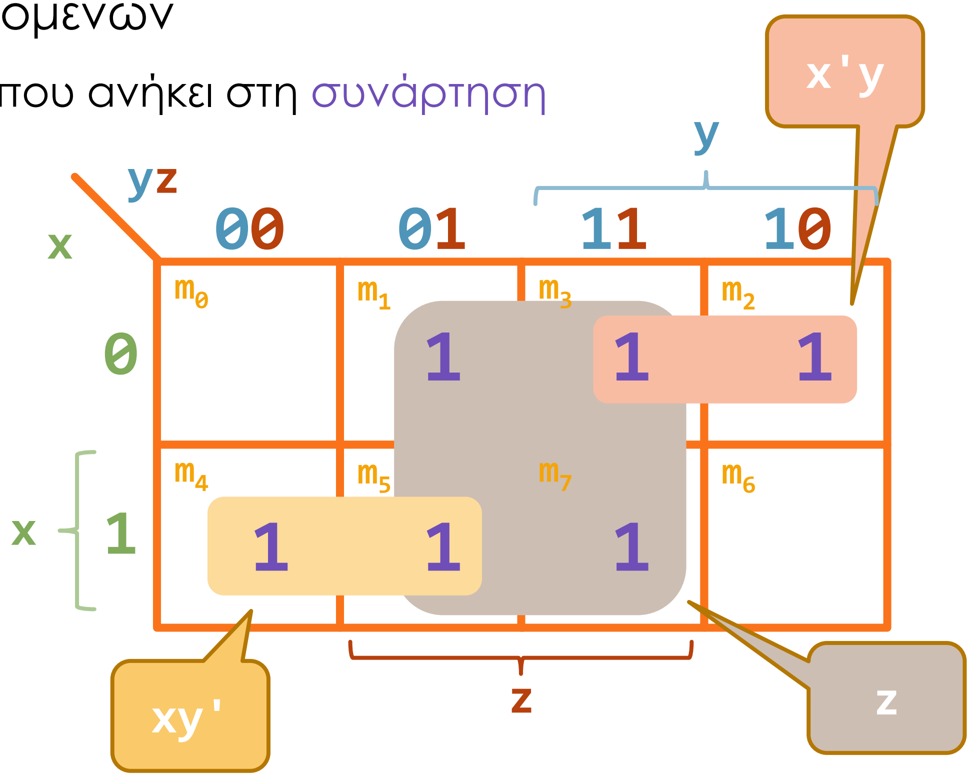
b) υλοποίηση




**υλοποίηση με πύλες NAND**
**(μεικτή σημειογραφία)**




**υλοποίηση με πύλες NAND**



# Υλοποίηση με πύλες NAND
## Δύο επιπέδων - Σύνοψη

1. απλοποιούμε τη συνάρτηση σε μορφή αθροίσματος γινομένων
2. σχεδιάζουμε μία πύλη **NAND** για κάθε όρο γινομένου που έχει τουλάχιστον δύο παράγοντες
   - οι είσοδοι κάθε πύλης είναι οι παράγοντες του αντίστοιχου όρου
   - ☞ έτσι, παράγεται μία ομάδα πυλών 1ου επιπέδου
3. σχεδιάζουμε μία πύλη **NAND** στο 2ο επίπεδο, με εισόδους που προέρχονται από τις εξόδους των πυλών του 1ου επιπέδου
   - χρησιμοποιώντας γραφικό σύμβολο είτε **AND**-αντιστοφής είτε αντιστροφής-**OR**
4. για κάθε όρο με έναν μόνο παράγοντα
   - είτε χρησιμοποιούμε έναν αντιστροφέα στο 1ο επίπεδο
   - είτε συνδέουμε το συμπλήρωμα του μοναδικού παράγοντα απευθείας σε μια είσοδο της πύλης **NAND** του 2ου επιπέδου

# Υλοποίηση με πύλες NAND
## Πολλών επιπέδων

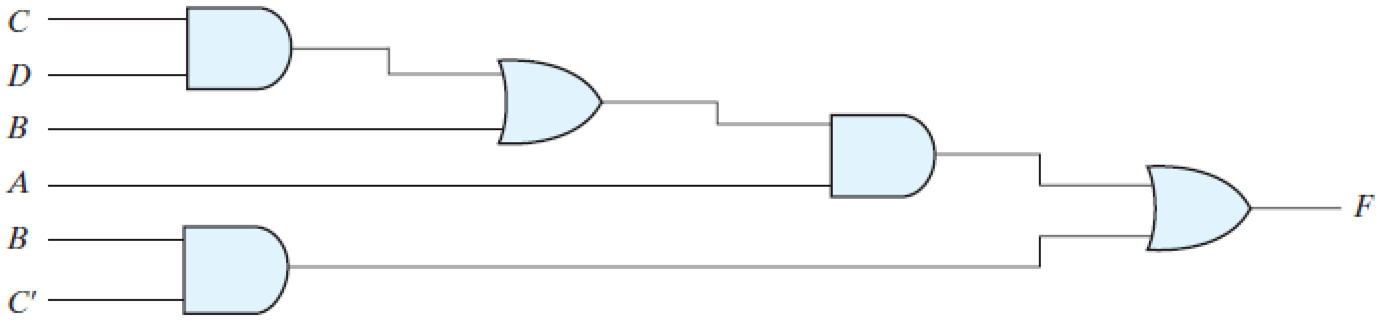
- πρότυπες μορφές έκφρασης συναρτήσεων Boole → οδηγούν σε υλοποίηση δύο επιπέδων
- υπάρχουν περιπτώσεις που η σχεδίαση ψηφιακών κυκλωμάτων οδηγεί σε δομές πυλών με τρία ή και περισσότερα επίπεδα

π.χ. $F = A(CD + B) + BC'$

- θα **μπορούσαμε** να **εξαλείψουμε** τις παρανθέσεις και να φέρουμε την έκφραση σε μία πρότυπη μορφή
- ωστόσο, **επιλέγουμε** να την υλοποιήσουμε ως ένα κύκλωμα **πολλών επιπέδων**, **χάριν παραδείγματος**

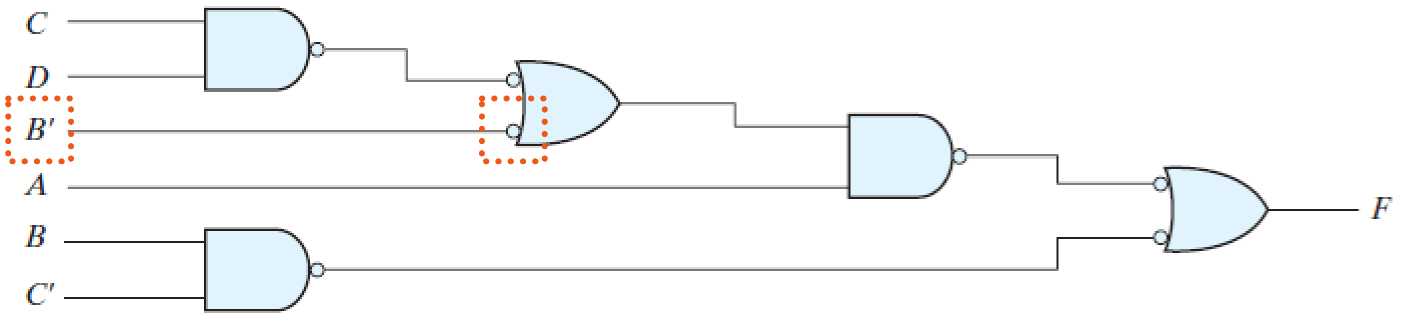
▶ υλοποίηση με **AND** και **OR**

ένα λογικό διάγραμμα με **εναλλασόμενα** επίπεδα πυλών **AND** και **OR**, μπορεί **εύκολα** να μετατραπεί σε κύκλωμα με **NAND** με τη χρήση της **μεικτής σημειογραφίας**




▶ υλοποίηση με **NAND**

κάναμε τις εξής <u>**αλλαγές**</u>:
- **πύλη AND → πύλη AND-αντιστροφή**
- **πύλη OR → πύλη αντιστροφή-OR**
  - το **κυκλάκι** που μπήκε στην **είσοδο B** αντιστοιχεί σε **έναν επιπλέον αντιστροφέα**, οπότε το **αντισταθμίσαμε** με την αλλαγή του παράγοντα από **B** σε **B'**



# Υλοποίηση με πύλες NAND

## Πολλών επιπέδων - Γενική διαδικασία

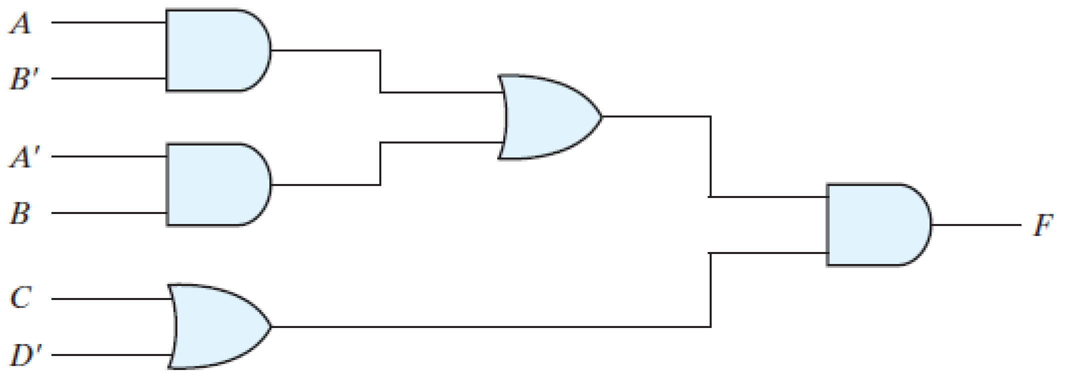
- διαδικασία μετατροπής ενός διαγράμματος πολλών επιπέδων **AND**-**OR** → σε διάγραμμα μόνο με πύλες **NAND** με χρήση μεικτής σημειογραφίας:
  1. μετατρέπουμε όλες τις πύλες **AND** σε πύλες **NAND** με γραφικά σύμβολα **AND**-αντιστροφής
  2. μετατρέπουμε όλες τις πύλες **OR** σε πύλες **NAND** με γραφικά σύμβολα αντιστροφής-**OR**
  3. ελέγχουμε τα κυκλάκια στο διάγραμμα
     - για κάθε κυκλάκι που δεν αντισταθμίζεται από άλλο κυκλάκι στην ίδια γραμμή →
       1. είτε εισάγουμε έναν αντιστροφέα (δηλαδή μία πύλη **NAND** μίας εισόδου)
       2. είτε αντιστρέφουμε τον παράγοντα εισόδου

# Υλοποίηση με πύλες NAND

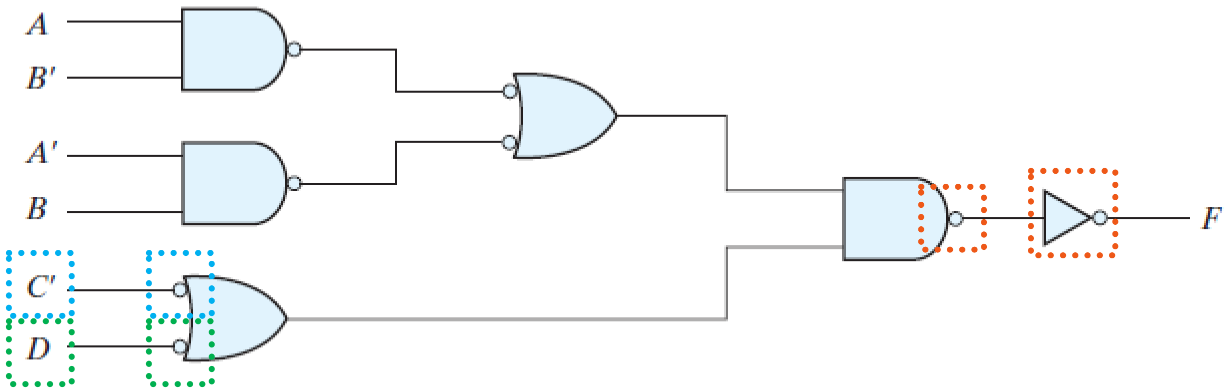
## Πολλών επιπέδων - 2ο Παράδειγμα

- υλοποιήστε με πύλες **NAND** την έκφραση: **F = (AB' + A'B)(C + D')**

- υλοποίηση με **AND** και **OR**




- υλοποίηση με **NAND**
  - ✍ παρατηρήστε τον τρόπο που αντισταθμίζονται τα κυκλάκια



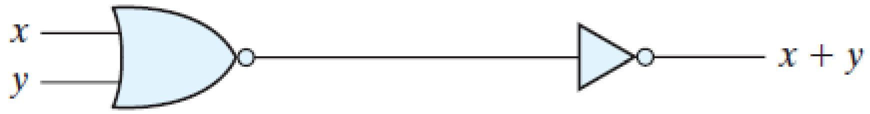
# Ψηφιακά κυκλώματα
## με πύλες NOR

- η πράξη **NOR** είναι η δυϊκή μορφή της πράξης **NAND**
  - έτσι, όλες οι διαδικασίες και όλοι οι κανόνες που αφορούν την **NOR** είναι οι δυϊκές μορφές των αντίστοιχων διαδικασιών και κανόνων που έχουν αναπτυχθεί για την πράξη **NAND**
- οι πύλες **NOR** είναι οικουμενικές, καθώς οποιοδήποτε ψηφιακό σύστημα μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με αυτές
  - απόδειξη:

1. ***NOT***

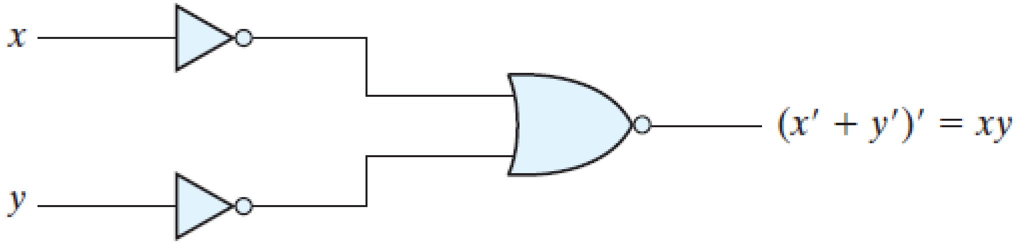

**μία πύλη NOR μίας εισόδου η οποία συμπεριφέρεται ακριβώς ως αντιστροφέας**

2. ***OR***




**δύο πύλες NOR: η 1η υπολοποιεί την πράξη NOR και η 2η αντιστρέφει την τιμή της εξόδου**

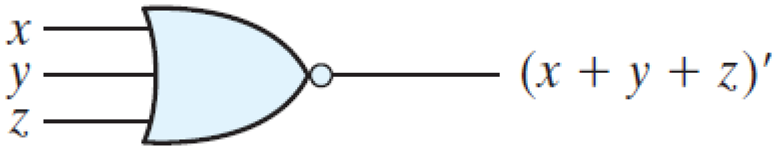
3. ***AND***



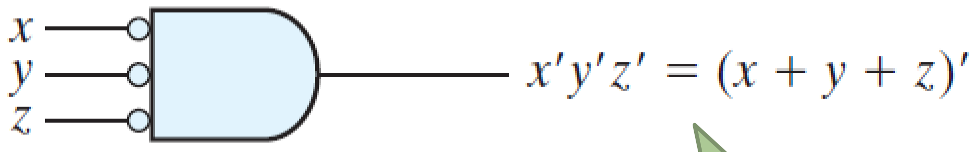

**μία πύλη NOR με πρόσθετους αντιστροφείς στις εισόδους**

# Υλοποίηση συνάρτησης Boole
## με πύλες NOR

1. υπολογίζουμε την απλοποιημένη συνάρτηση Boole, εκφρασμένη με τελεστές **AND**, **OR** και **NOT** και
2. την μετατρέπουμε σε ένα λογικό κύκλωμα με πύλες **NOR**
   - χρησιμοποιώντας απλές τεχνικές για τη μετατροπή των λογικών διαγραμμάτων **AND-OR** σε **NOR**
   - για να διευκολυνθούμε ορίζουμε ένα ισοδύναμο σύμβολο για την πύλη **NOR**
     - ✍ όταν σε ένα διάγραμμα παρουσιάζονται και τα δύο σύμβολα → έχουμε μεικτή σημειογραφία




**OR-αντιστροφή**



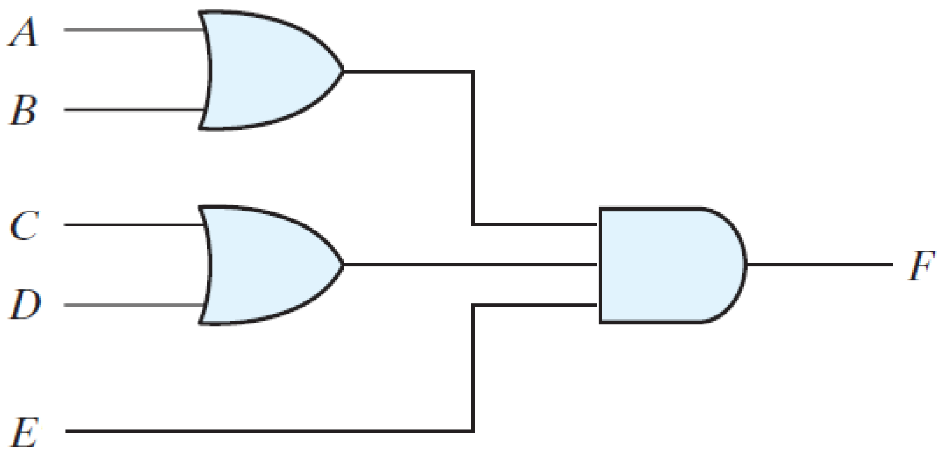

**αντιστροφή-AND**

Θεώρημα DeMorgan

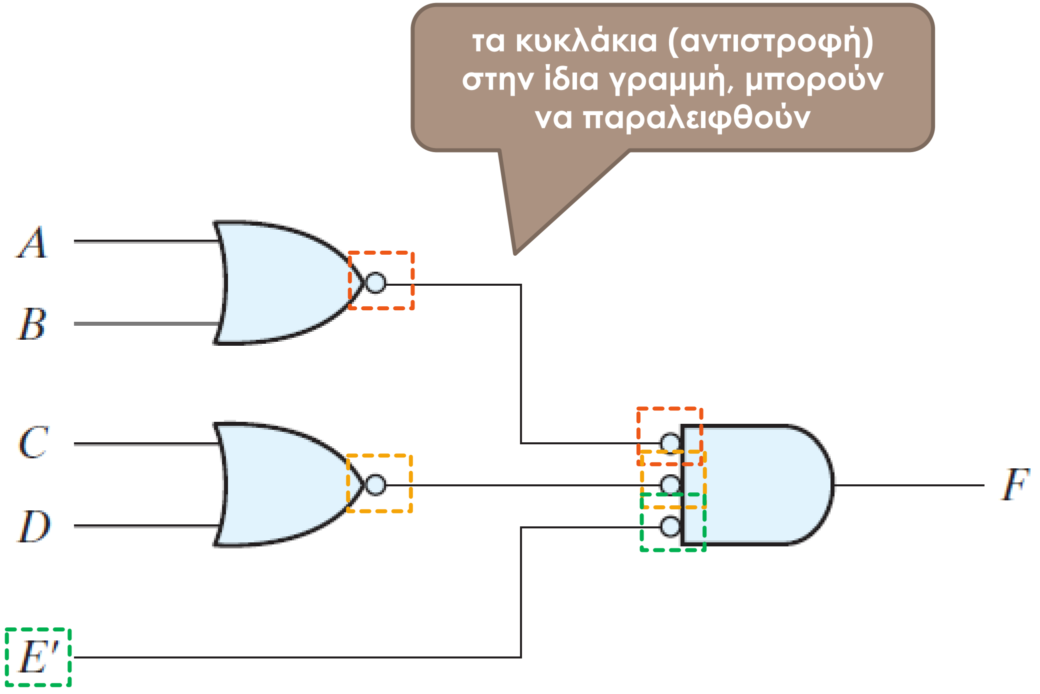
# Υλοποίηση με πύλες NOR
## Δύο επιπέδων

- οι συναρτήσεις πρέπει απαραίτητα να είναι σε μορφή γινομένου αθροισμάτων

π.χ. **F = (A + B)(C + D)E**




**υλοποίηση με πύλες AND και OR**




**υλοποίηση με πύλες NOR**
(μεικτή σημειογραφία)

# Υλοποίηση με πύλες NOR
## Δύο επιπέδων - Σύνοψη

1. απλοποιούμε τη συνάρτηση σε μορφή γινομένου αθροισμάτων
2. σχεδιάζουμε μία πύλη **NOR** για κάθε όρο γινομένου που έχει τουλάχιστον δύο παράγοντες
   - οι είσοδοι κάθε πύλης είναι οι παράγοντες του αντίστοιχου όρου
   
   ☞ έτσι, παράγεται μία ομάδα πυλών 1ου επιπέδου
3. σχεδιάζουμε μία πύλη **NOR** στο 2ο επίπεδο, με εισόδους που προέρχονται από τις εξόδους των πυλών του 1ου επιπέδου
   - χρησιμοποιώντας γραφικό σύμβολο είτε **OR**-αντιστοφής είτε αντιστροφής-**AND**
4. για κάθε όρο με έναν μόνο παράγοντα
   - είτε χρησιμοποιούμε έναν αντιστροφέα στο 1ο επίπεδο
   - είτε συνδέουμε το συμπλήρωμα του μοναδικού παράγοντα απευθείας σε μια είσοδο της πύλης **NOR** του 2ου επιπέδου

# Υλοποίηση με πύλες NOR

## Πολλών επιπέδων - Γενική διαδικασία

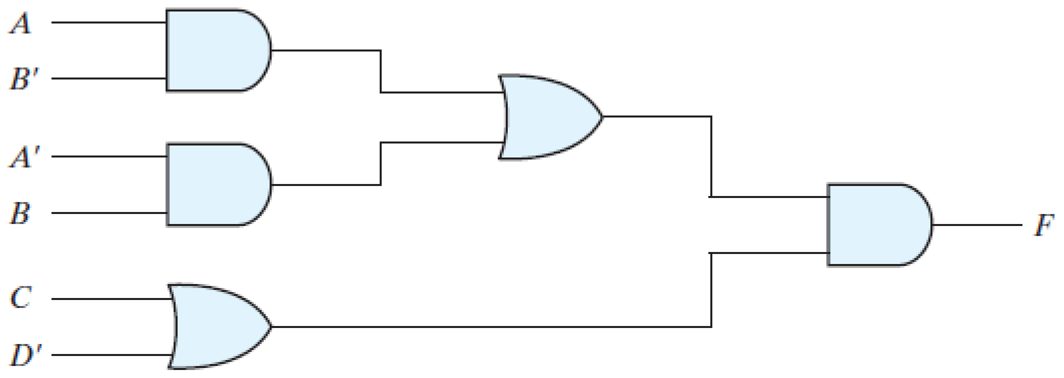
- η διαδικασία μετατροπής ενός διαγράμματος πολλών επιπέδων **AND**-**OR** → σε διάγραμμα μόνο με πύλες **NOR** με χρήση μεικτής σημειογραφίας είναι η εξής:
  1. μετατρέπουμε όλες τις πύλες **AND** σε πύλες **NOR** με γραφικά σύμβολα **AND**-αντιστροφής
  2. μετατρέπουμε όλες τις πύλες **OR** σε πύλες **NOR** με γραφικά σύμβολα αντιστροφής-**AND**
  3. ελέγχουμε τα κυκλάκια στο διάγραμμα
     - για κάθε κυκλάκι που δεν αντισταθμίζεται από άλλο κυκλάκι στην ίδια γραμμή →
       1. είτε εισάγουμε έναν αντιστροφέα (δηλαδή μία πύλη **NOR** μίας εισόδου)
       2. είτε αντιστρέφουμε τον παράγοντα εισόδου

# Υλοποίηση με πύλες NAND

## Πολλών επιπέδων - Παράδειγμα

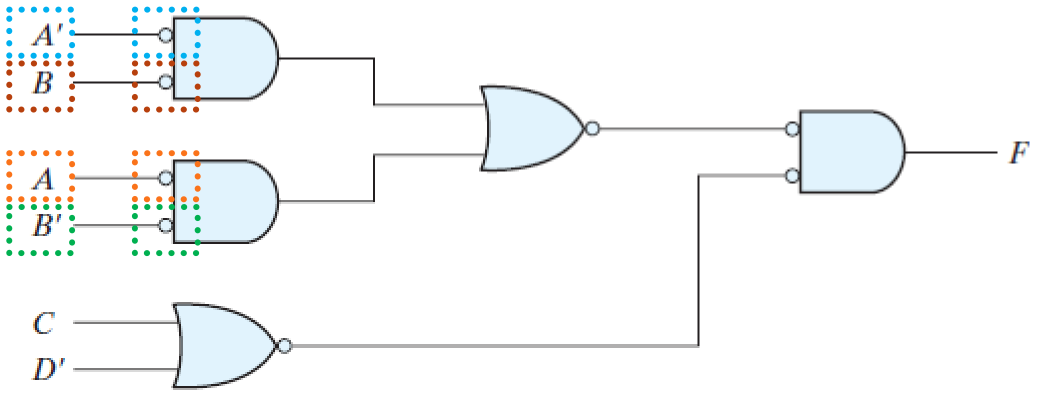
❖ υλοποιήστε με πύλες **NOR** την έκφραση: **F = (AB' + A'B)(C + D')**

▶ υλοποίηση με **AND** και **OR**




▶ υλοποίηση με **NOR**

✍ παρατηρήστε τον τρόπο που αντισταθμίζονται τα κυκλάκια



# Υλοποίηση ψηφιακών κυκλωμάτων

## Άλλες υλοποιήσεις δύο επιπέδων

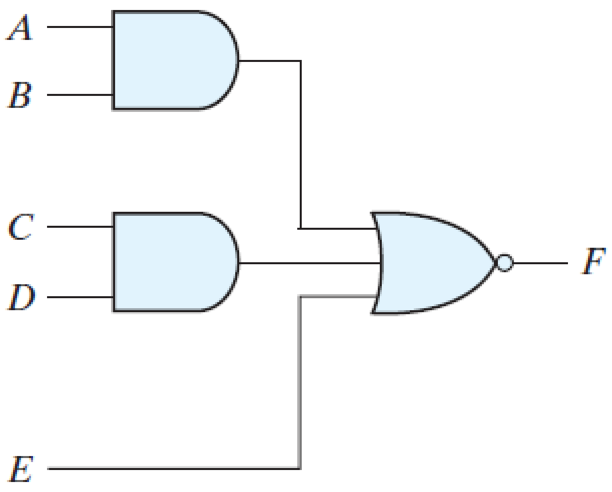
# Υλοποίηση Συνάρτησης

## AND-OR-INVERT

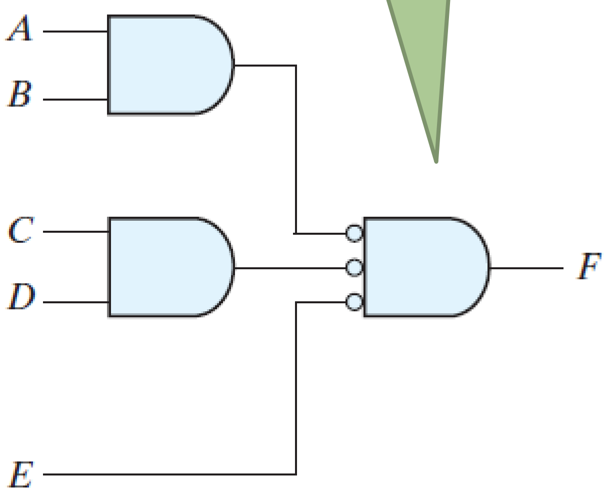
- π.χ. $F = (AB + CD + E)'$

μετακινούμε τα κυκλάκια από τις εισόδους του 2ου επιπέδου → στις εξόδους του 1ου επιπέδου

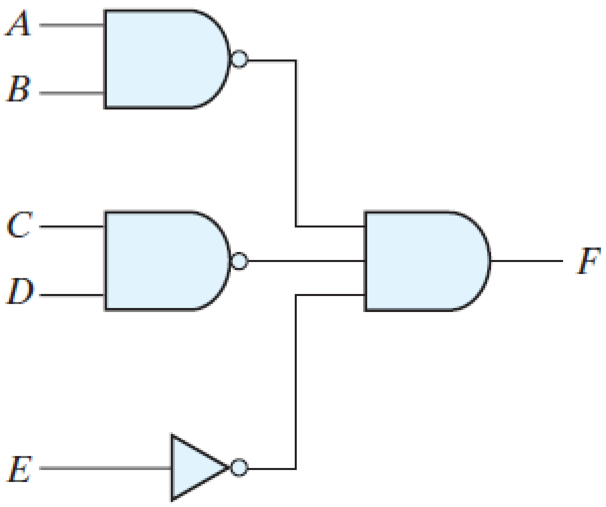
εναλλακτικό σύμβολο πύλης NOR




υλοποίηση με
AND και NOR




υλοποίηση με
AND και NOR




υλοποίηση με
NAND και AND

# Υλοποίηση Συνάρτησης

## AND-OR-INVERT (II)

- για την υλοποίηση μίας συνάρτησης με κύκλωμα δύο επιπέδων **AND-OR** → απαιτείται η αλγεβρική έκφραση της συνάρτησης σε μορφή αθροίσματος γινομένων

- ανάλογη είναι η υλοποίηση μιας συνάρτησης **F** με κύκλωμα δύο επιπέδων **AND-OR-INVERT**, με μόνη διαφορά την αντιστροφή του τελικού αποτελέσματος
  - επομένως, απλοποιούμε το συμπλήρωμα της συνάρτησης (δηλαδή την **F'**) → σε μορφή αθροίσματος γινομένων
    - ✍ συνδυάζοντας τα **0** στο χάρη Καρνό
  - το τμήμα **AND-OR** της συνάρτησης υλοποιεί την **F'**
  - το τμήμα **INVERT** της εξόδου παράγει την επιθυμητή έξοδο: **F**

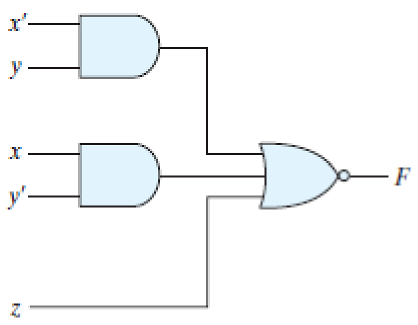
# Υλοποίηση Συνάρτησης
## AND-OR-INVERT - Παράδειγμα

υλοποιήστε με πύλες **AND-NOR** και **NAND-AND** την έκφραση: $F(x,y,z) = \Sigma(0,6)$

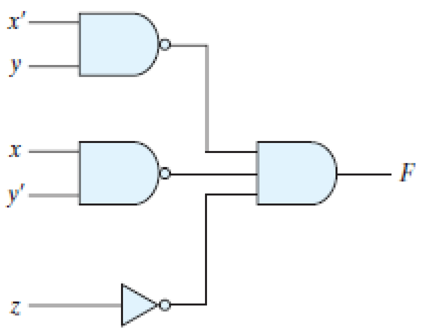
a) απλοποίηση συνάρτησης σε μορφή αθροίσματος γινομένων

1. τοποθετούμε την τιμή 0 σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που δεν ανήκει στη συνάρτηση
2. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή 0
3. απλοποιημένη έκφραση: $F' = xy' + x'y + z$
4. επομένως: $\boxed{F = (xy' + x'y + z)'}$

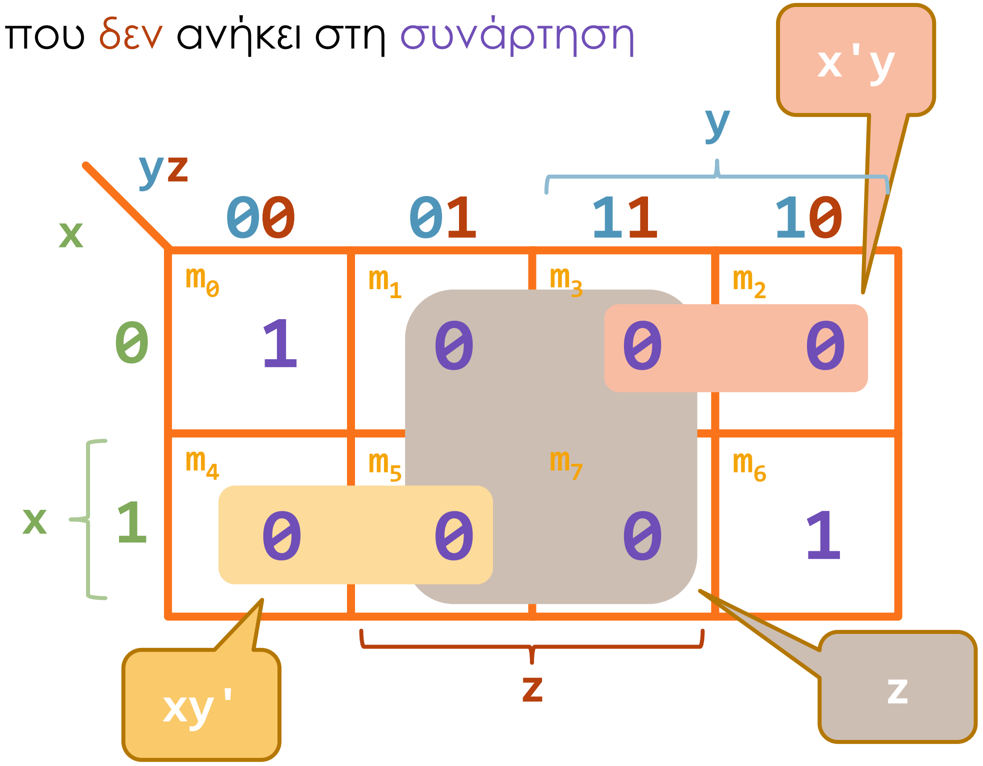
b) υλοποίηση




**υλοποίηση με πύλες**
**AND-NOR**




**υλοποίηση με πύλες**
**NAND-AND**



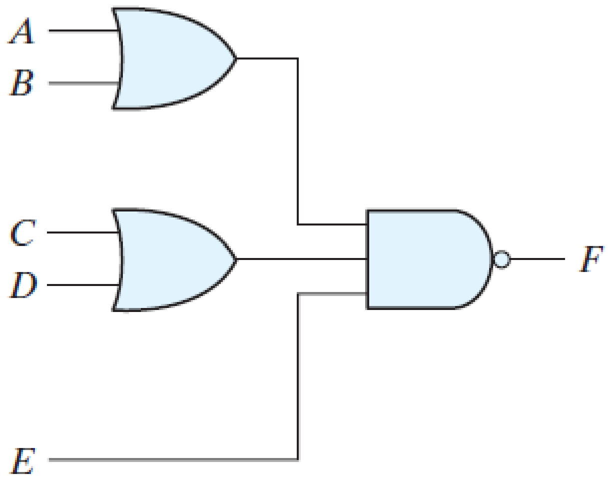
# Υλοποίηση Συνάρτησης

## OR-AND-INVERT

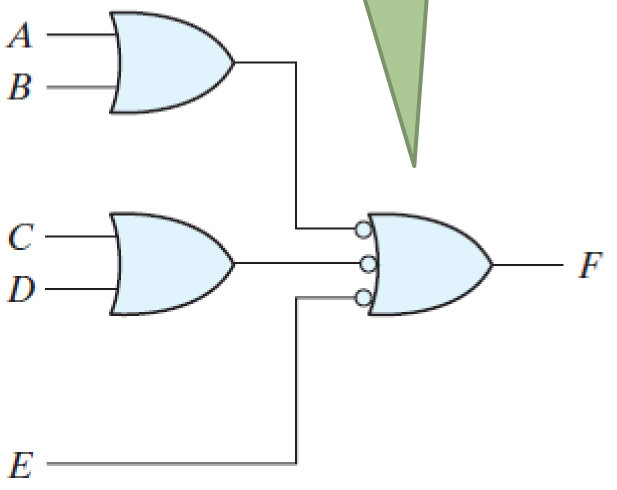
- π.χ. F = ((A + B)(C + D)E)'

μετακινούμε τα κυκλάκια από τις εισόδους του 2ου επιπέδου → στις εξόδους του 1ου επιπέδου

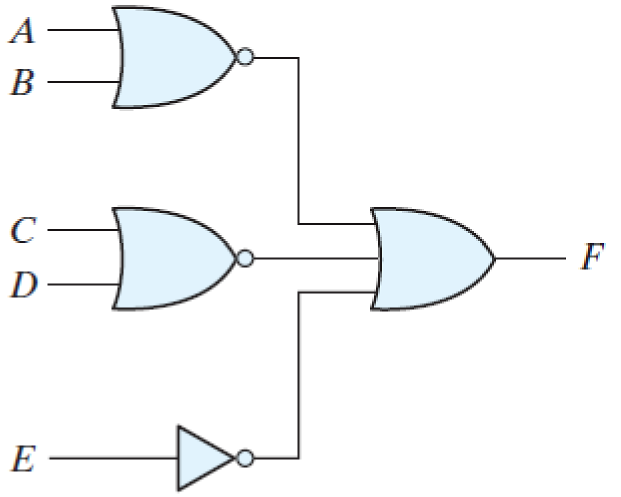
εναλλακτικό σύμβολο πύλης NOR




υλοποίηση με
OR και NAND




υλοποίηση με
OR και NAND




υλοποίηση με
NOR και OR

# Υλοποίηση Συνάρτησης

## OR-AND-INVERT (II)

- για την υλοποίηση μίας συνάρτησης με κύκλωμα δύο επιπέδων **OR-AND** → απαιτείται η αλγεβρική έκφραση της συνάρτησης σε μορφή γινομένου αθροισμάτων

- ανάλογη είναι η υλοποίηση μιας συνάρτησης **F** με κύκλωμα δύο επιπέδων **OR-AND-INVERT**, με μόνη διαφορά την αντιστροφή του τελικού αποτελέσματος
  - επομένως, απλοποιούμε το συμπλήρωμα της συνάρτησης (δηλαδή την **F'**) → σε μορφή γινομένου αθροισμάτων
    1. συνδυάζοντας τα **1** στο χάρη Καρνό → παίρνουμε την **F** σε απλοποιημένη μορφή αθροίσματος γινομένων
    2. παίρνουμε το συμπλήρωμα της απλοποιημένης μορφής της **F** → άρα την **F'** σε μορφή γινομένου αθροισμάτων
  - το τμήμα **OR-AND** της συνάρτησης υλοποιεί την **F'**
  - το τμήμα **INVERT** της εξόδου παράγει την επιθυμητή έξοδο: **F**

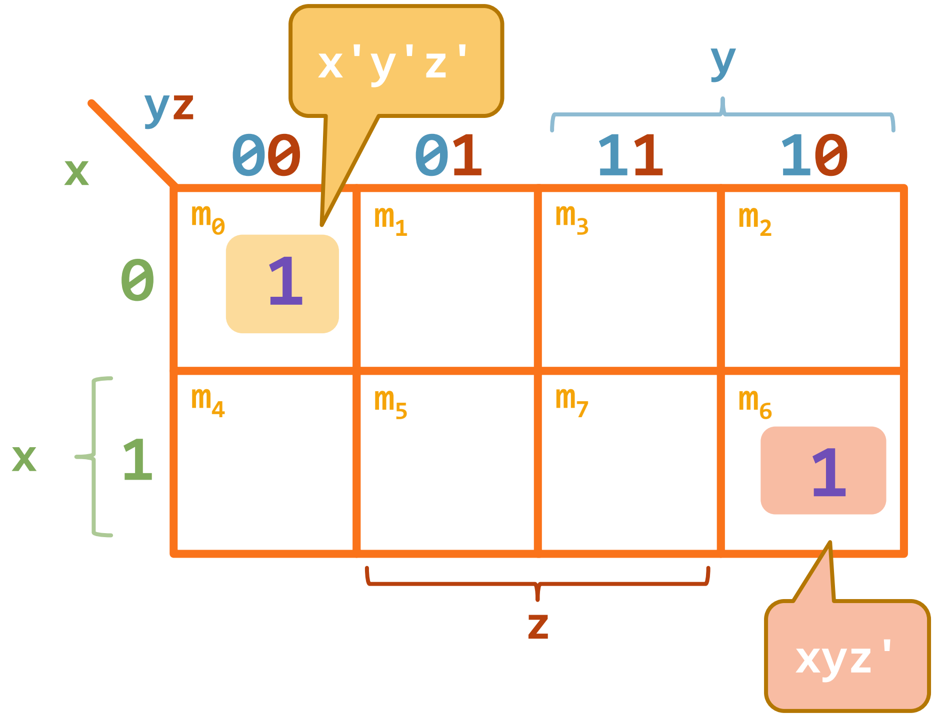
# Υλοποίηση Συνάρτησης

## OR-AND-INVERT - Παράδειγμα

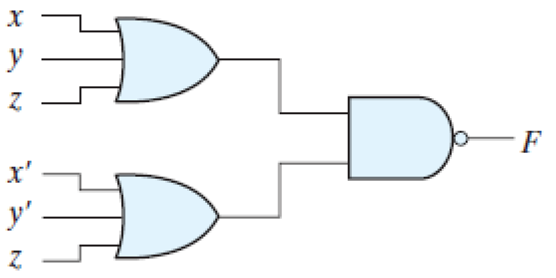
υλοποιήστε με πύλες **OR-NAND** και **NOR-OR** την έκφραση: $F(x,y,z) = \Sigma(0,6)$

a) απλοποίηση συνάρτησης σε μορφή γινομένου αθροισμάτων

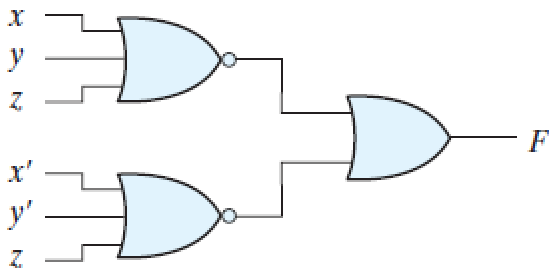
1. τοποθετούμε την τιμή **1** σε κάθε τετράγωνο ελαχιστόρου που ανήκει στη συνάρτηση
2. εντοπίζουμε γειτονικά τετράγωνα με τιμή **1**
3. απλοποιημένη έκφραση: $F = x'y'z' + xyz'$
4. $F' = (x'y'z' + xyz')' = (x + y + z)(x' + y' + z)$
5. επομένως: $\boxed{F = ((x + y + z)(x' + y' + z))'}$




b) υλοποίηση




**υλοποίηση με πύλες**
OR-NAND




**υλοποίηση με πύλες**
NOR-OR

# Υλοποίηση ψηφιακών κυκλωμάτων

## Άλλες υλοποιήσεις δύο επιπέδων

| Ισοδύναμες μορφές | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (α) | (β) | Υλοποιεί τη συνάρτηση | Χρειάζεται απλοποίηση της F' σε | Για να πάρουμε έξοδο |
| AND-NOR | NAND-AND | AND-OR-INVERT | άρθοισμα γινομένων με συνδυασμό 0 στο χάρτη | F |
| OR-NAND | NOR-OR | OR-AND-INVERT | γινόμενο αθροισμάτων με συνδυασμό 1 στο χάρτη | F |

# Συνάρτηση αποκλειστικού-OR (XOR)

# Συνάρτηση αποκλειστικού-OR (XOR)

- χρησιμοποιείται το σύμβολο $\oplus$
- είναι μία λογική πράξη που ισοδυναμεί με την ακόλουθη πράξη Boole:

$$x \oplus y = xy' + x'y$$

| x | y | $x \oplus y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

- ισχύουν οι παρακάτω ταυτότητες:
  *(μπορούν να αποδειχθούν με χρήση πινάκων αληθείας ή με αλγεβρικές πράξεις)*

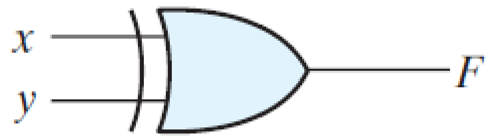
  1. $x \oplus 0 = x$
  2. $x \oplus 1 = x'$
  3. $x \oplus x = 0$
  4. $x \oplus x' = 1$
  5. $x \oplus y' = x' \oplus y = (x \oplus y)'$

οι είσοδοι μιας πύλης XOR μπορούν να εναλλαχθούν

- ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή: $A \oplus B = B \oplus A$
- ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, δηλαδή: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$

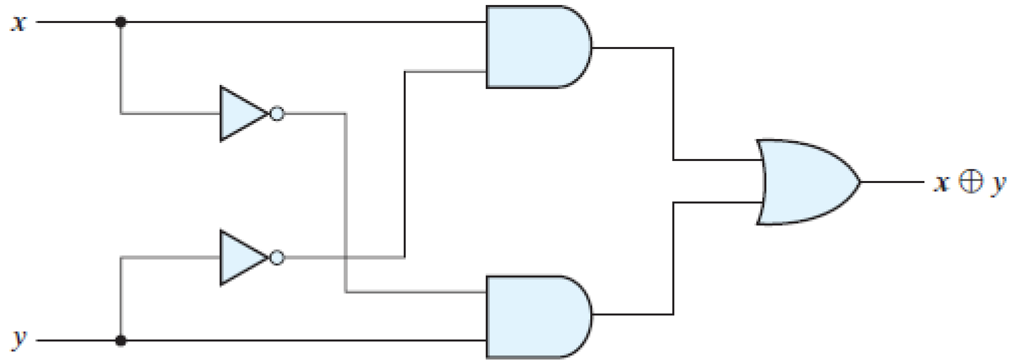
# Συνάρτηση αποκλειστικού-OR (XOR)
## Λογικές πύλες

- η κατασκευή πυλών **XOR** πολλών εισόδων είναι δύσκολη
  - ακόμη και η συνάρτηση **XOR** δύο εισόδων κατασκευάζεται συνήθως με άλλους τύπους πυλών




**λογική πύλη XOR (δύο εισόδων)**

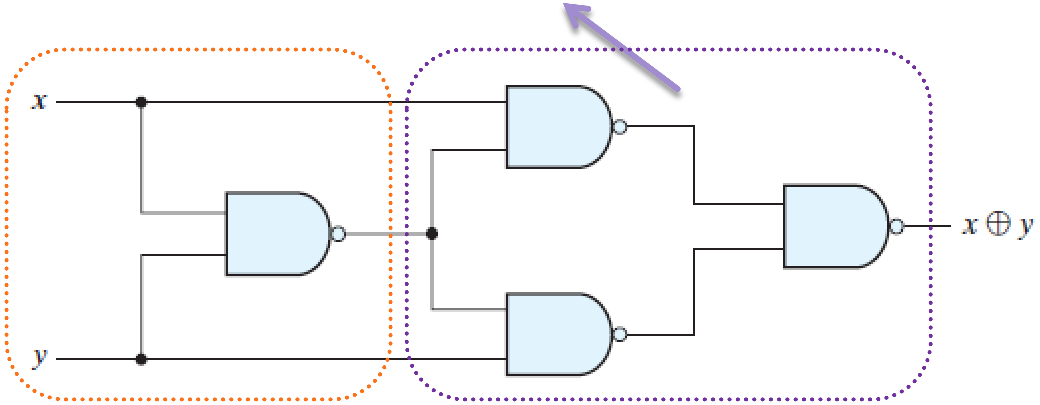
$$xy' + x'y = x \oplus y$$




**υλοποίηση συνάρτησης XOR δύο εισόδων με πύλες AND, OR και NOT**

(xy)' = x' + y'

$$(x' + y')x + (x' + y')y = xy' + x'y = x \oplus y$$




**υλοποίηση συνάρτησης XOR δύο εισόδων με πύλες NAND**

# Συνάρτηση αποκλειστικού-OR (XOR)
## Παρατηρήσεις

- μόνο ένας περιορισμένος αριθμός συναρτήσεων Boole μπορεί να εκφραστεί με πράξεις αποκλειστικού-OR

- ωστόσο, η συνάρτηση
  - εμφανίζεται αρκετα συχνά στη σχεδίαση πρακτικών ψηφιακών συστημάτων
  - είναι ιδιαίτερα χρήσιμη
    - σε αριθμητικές πράξεις και
    - σε κυκλώματα εντοπισμού και διόρθωσης σφαλμάτων

# Συνάρτηση αποκλειστικού-OR (XOR)

## Περιττή συνάρτηση - Τριών μεταβλητών

- μετατρέπουμε την πράξη **XOR** μεταξύ τριών μεταβλητών σε ισοδύναμη κανονική έκφραση Boole

$$A \oplus B \oplus C = (AB' + A'B)C' + (AB + A'B')C$$

$$= \boxed{AB'C' + A'BC'} + \boxed{ABC} + \boxed{A'B'C}$$

- η συνάρτηση παίρνει τιμή **1** εάν
  1. μία μόνο μεταβλητή είναι ίση με **1** ή
  2. και οι τρεις είναι τρεις ίσες με **1**

$$= \Sigma(1,2,4,7)$$

- η δυαδική αναπαράσταση καθενός από τους ελαχιστόρους της συνάρτησης έχει περιττό πλήθος από **1**

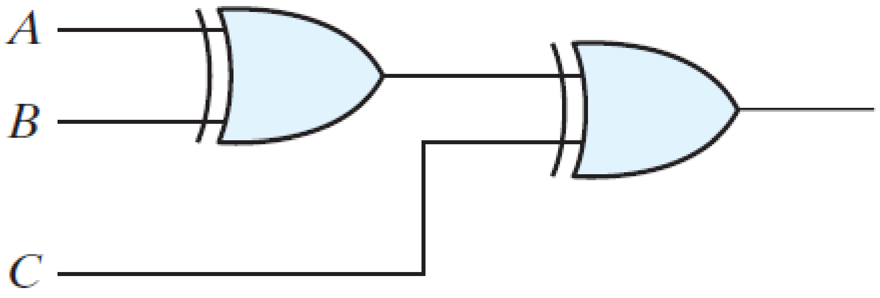
| A \ BC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $m_0$ | $m_1$ 1 | $m_3$ | $m_2$ 1 |
| 1 | $m_4$ 1 | $m_5$ | $m_7$ 1 | $m_6$ |

- η πράξη **XOR** τριών μεταβλητών χαρακτηρίζεται ως περιττή συνάρτηση

# Συνάρτηση αποκλειστικού-OR (XOR)

## Περιττή συνάρτηση - Τριών μεταβλητών - Υλοποίηση

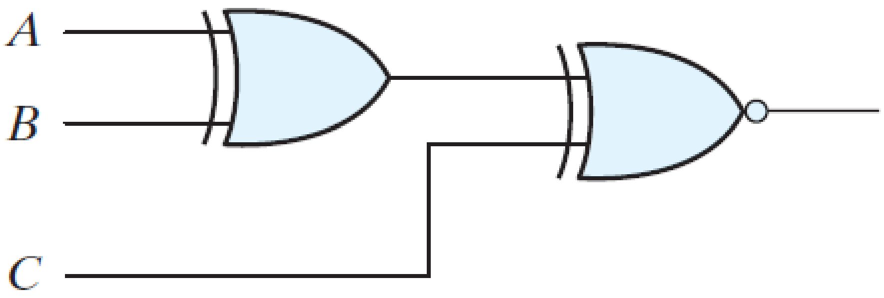
- $F = A \oplus B \oplus C$



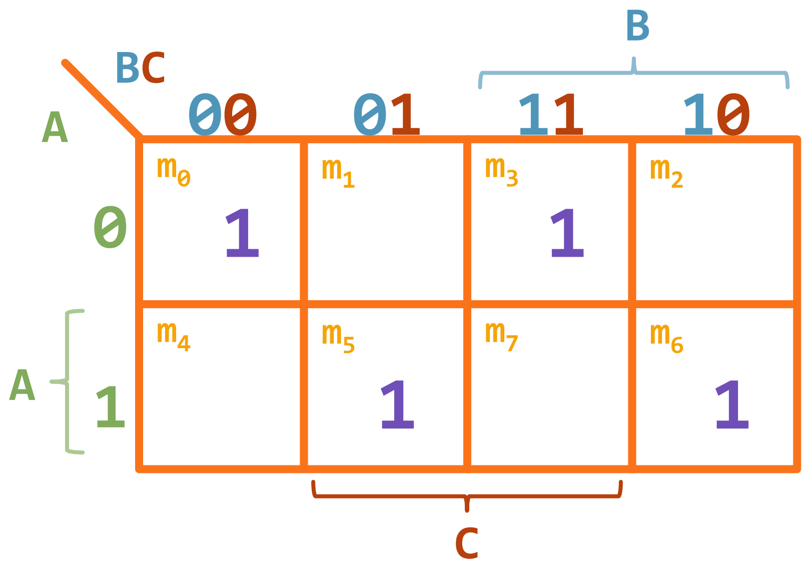

**περιττή συνάρτηση τριών εισόδων**

# Συνάρτηση αποκλειστικού-OR (XOR)
## Άρτια συνάρτηση - Τριών μεταβλητών

- το συμπλήρωμα μιας περιττής συνάρτησης → είναι μία άρτια συνάρτηση F
  - οπότε, $F = (A \oplus B \oplus C)'$
  - με υλοποίηση




άρτια συνάρτηση τριών εισόδων



# Συνάρτηση αποκλειστικού-OR (XOR)

## Περιττή και άρτια συνάρτηση - Τεσσάρων μεταβλητών

**περιττή συνάρτηση**

$$F = A \oplus B \oplus C \oplus D$$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_0$ | $m_1$ 1 | $m_3$ | $m_2$ 1 |
| 01 | $m_4$ 1 | $m_5$ | $m_7$ 1 | $m_6$ |
| 11 | $m_{12}$ | $m_{13}$ 1 | $m_{15}$ | $m_{14}$ 1 |
| 10 | $m_8$ 1 | $m_9$ | $m_{11}$ 1 | $m_{10}$ |

**άρτια συνάρτηση**

$$F = (A \oplus B \oplus C \oplus D)'$$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_0$ 1 | $m_1$ | $m_3$ 1 | $m_2$ |
| 01 | $m_4$ | $m_5$ 1 | $m_7$ | $m_6$ 1 |
| 11 | $m_{12}$ 1 | $m_{13}$ | $m_{15}$ 1 | $m_{14}$ |
| 10 | $m_8$ | $m_9$ 1 | $m_{11}$ | $m_{10}$ 1 |

# Συνάρτηση αποκλειστικού-OR (XOR)

## Δημιουργία και έλεγχος ισοτιμίας

- οι συναρτήσεις **XOR** είναι πολύ χρήσιμες σε συστήματα στα οποία απαιτούνται κώδικες εντοπισμού και διόρθωσης σφαλμάτων

- bit ισοτιμίας
  - ένα επιπλέον bit που συμπεριλαμβάνεται στο (δυαδικό) μήνυμα
    - έχει σκοπό να καταστήσει τον αριθμό των άσων στο μήνυμα, είτε άρτιο είτε περιττό
    - παράγεται από το κύκλωμα γεννήτρια ισοτιμίας
  - το μήνυμα μεταδίδεται μαζί με το bit ισοτιμίας
    - ο παραλήπτης το ελέγχει για τυχόν λάθη
    - ελέγχεται από το κύκλωμα ελεγκτή ισοτιμίας

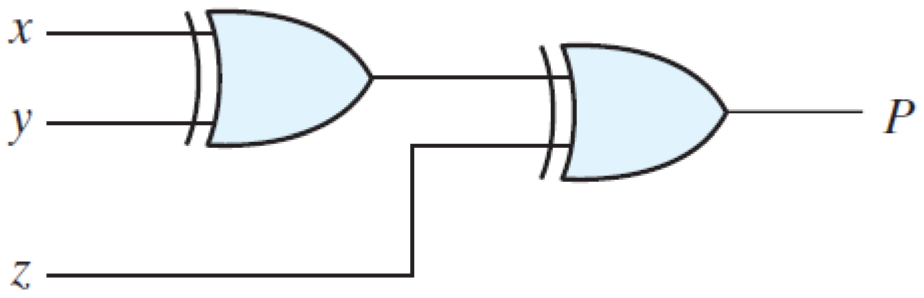
# Συνάρτηση αποκλειστικού-OR (XOR)

## Δημιουργία και έλεγχος ισοτιμίας - Παράδειγμα τριών bit μυνήματος

- έστω ένα μήνυμα τριών bit (x, y , z) που μεταδίδεται μαζί με ένα bit άρτιας ισοτιμίας (P)

- το bit P μπορεί να εκφραστεί ως μία συνάρτηση XOR τριών μεταβλητών:

$$P = x \oplus y \oplus z$$




λογικό διάγραμμα γεννήτριας άρτιας ισοτιμίας τριών bit

| x | y | z | P |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

πίνακας αληθείας γεννήτριας άρτιας ισοτιμίας

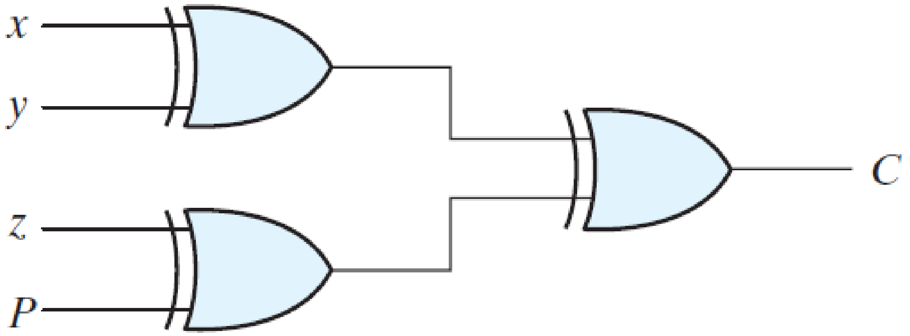
# Συνάρτηση αποκλειστικού-OR (XOR)

## Δημιουργία και έλεγχος ισοτιμίας - Παράδειγμα τριών bit μυνήματος (II)

- τα τρία bit (x, y, z) μαζί με το bit άρτιας ισοτιμίας (P) μεταδίδονται στον παραλήπτη
- εφαρμόζονται σε ένα κύκλωμα ελέγχου ισοτιμίας → ώστε να εντοπιστούν τυχόν λάθη στη μετάδοση
  - έχει συμβεί λάθος εάν εντοπιστεί περιττό πλήθος άσων
  - επομένως, ο έλεγχος ισοτιμίας μπορεί να εκφραστεί ως μία συνάρτηση **XOR** τεσσάρων μεταβλητών:

$$C = x \oplus y \oplus z \oplus P$$

- παρατηρήστε οτι εάν θέσουμε P = 0 → προκύπτει η γεννήτρια ισοτιμίας (καθώς ισχύει: $P \oplus 0 = P$)
- επομένως, το ίδιο κύκλωμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για τη δημιουγία όσο και για τον έλεγχο ισοτιμίας




λογικό διάγραμμα ελέγχου άρτιας ισοτιμίας τεσσάρων bit

| x | y | z | P | C |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

πίνακας αληθείας ελεγκτή άρτιας ισοτιμίας

# Σύνοψη

- Χάρτης Καρνό
  - δύο, τριών, τεσσάρων και πέντε μεταβλητών
  - γειτονικά τετράγωνα
  - απλοποίηση
    - άθροισμα γινομένων
    - γινόμενο αθροισμάτων
  - συνθήκες αδιαφορίας
- Υλοποίηση
  - ψηφιακών κυκλωμάτων με πύλες NAND, NOR, AND-NOR, NAND-AND, OR-NAND, NOR-OR
  - συναρτήσεων τύπου AND-OR-INVERT και OR-AND-INVERT
- Συνάρτηση XOR
  - περιττή και άρτια συνάρτηση
  - δημιουργία και έλεγχος ισοτιμίας