



ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
(Τ.Ε.Ι.) ΚΡΗΤΗΣ

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής & Πολυμέσων

Ψηφιακή Σχεδίαση

Κεφάλαιο 3: Ελαχιστοποίηση σε Επίπεδο Πυλών

Γ. Κορνάρος

Φεβρουάριος 2012

Εισαγωγή – Χάρτες Karnaugh

- Υλοποίηση λογικής 2-Επιπέδων χρησιμοποιώντας SOP ή POS δεν είναι ο πιο οικονομικός τρόπος όσο αφορά #πυλών και #εισόδων
- Ένας χάρτης Karnaugh είναι μια γραφική αναπαράσταση ενός πίνακα αλήθειας
 - Ο πίνακας περιέχει ένα κελί για κάθε δυνατό **ελαχιστόρο**
 - Γειτονικά κελιά διαφέρουν σε ένα μόνο literal; Λόγου χάρη στο x (ή στο x')
 - Η συνάρτηση σχηματίζεται βάζοντας 1 στα κελιά που αντιστοιχούν στους ελαχιστόρους της συνάρτησης
 - Βάζουμε 0 σε όλα τα υπόλοιπα κελιά

Κarnaugh με δύο μεταβλητές

■ $F=f(x,y)$

x	y	F
0	0	m0
0	1	m1
1	0	m2
1	1	m3

		y	
		0	1
x	0	m0	m1
	1	m2	m3

■ Παράδειγμα, $F1=x'y$

		y	
		0	1
x	0		
	1		

Χάρτες Karnaugh δύο-τριών μεταβλητών

		y	
		$x'y'$	$x'y$
x	0		
	1		

		yz			
		00	01	11	10
x	0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
	1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

m ₀	m ₁
m ₂	m ₃

m ₀	m ₁	m ₃	m ₂
m ₄	m ₅	m ₇	m ₆

- Οι ελαχιστόροι τοποθετούνται σε σειρά όχι δυαδικών αριθμών, αλλά σύμφωνα με τον ανακλαστικό κώδικα (gray).
- Δύο γειτονικά τετράγωνα στο χάρτη διαφέρουν κατά μία μόνο μεταβλητή

Χάρτες Karnaugh δύο-τριών μεταβλητών (2)

		y			
	yz	00	01	11	10
x	0			1	1
{	1	1	1		

		y			
	yz	00	01	11	10
x	0		1	1	
{	1	1			1

$$F = x'yz + x'yz' + xy'z' + xy'z$$

$$= x'y + xy'$$

$$F = x'y'z + x'yz + xy'z' + xyz'$$

$$= x'z + xz'$$

Χάρτες Karnaugh δύο-τριών μεταβλητών (3)

		y			
	yz	00	01	11	10
x	0	0	1	1	0
{	1	1	0	0	1

Απλοποίηση σε μορφή
αθροίσματος ελαχιστόρων

$$F = x'y'z + x'yz + xy'z' + xyz'$$

$$= x'z + xz'$$

Απλοποίηση σε μορφή
γινομένου μεγιστόρων

$$F' = x'y'z' + x'yz' + xy'z + xyz$$

$$= x'z + xz'$$

$$\Rightarrow (F')' = (x'z + xz')' = (x+z')(x'+z)$$

Κarnaugh δύο-τριών μεταβλητών

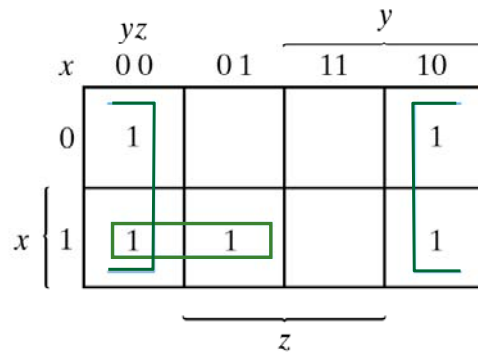


Fig. 3-6 Map for Example 3-3; $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 5, 6) = z' + xy'$

Κarnaugh δύο-τριών μεταβλητών

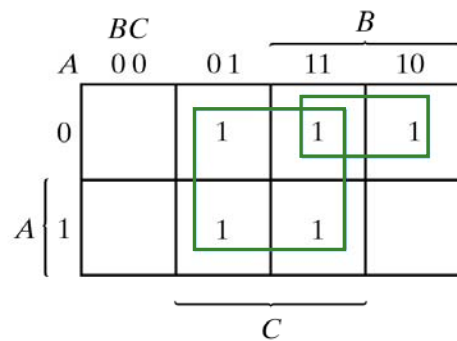


Fig. 3-7 Map for Example 3-4; $A'C + A'B + AB'C + BC = C + A'B$

Χάρτες Karnaugh τεσσάρων μεταβλητών

		y				
		yz	00	01	11	10
w	wx	00	01	11	10	x
	00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$	
	01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$	
	11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$	
10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$		
		z				

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

Χάρτες Karnaugh τεσσάρων μεταβλητών

		y				
		yz	00	01	11	10
w	wx	00	01	11	10	x
	00	1	1		1	
	01	1	1		1	
	11	1	1		1	
10	1	1				
		z				

Fig. 3-9 Map for Example 3-5; $F(w, x, y, z)$

$$= \Sigma (0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14) = y' + w'z' + xz'$$

Πρωτεύοντες όροι - Prime Implicants

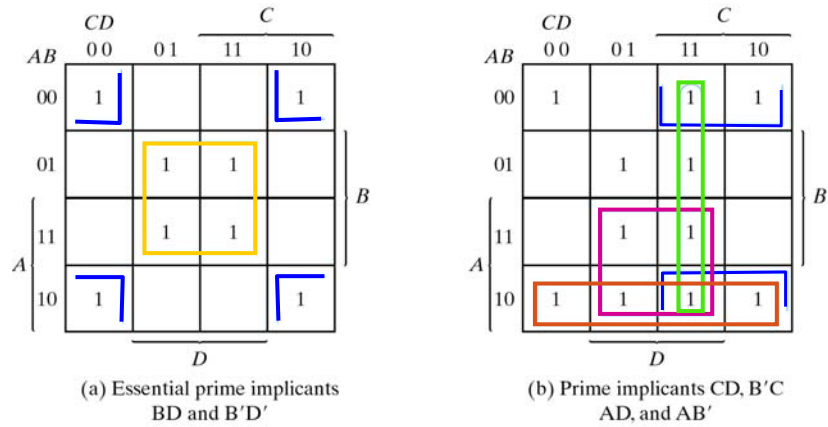


Fig. 3-11 Simplification Using Prime Implicants

Χάρτης 5 μεταβλητών

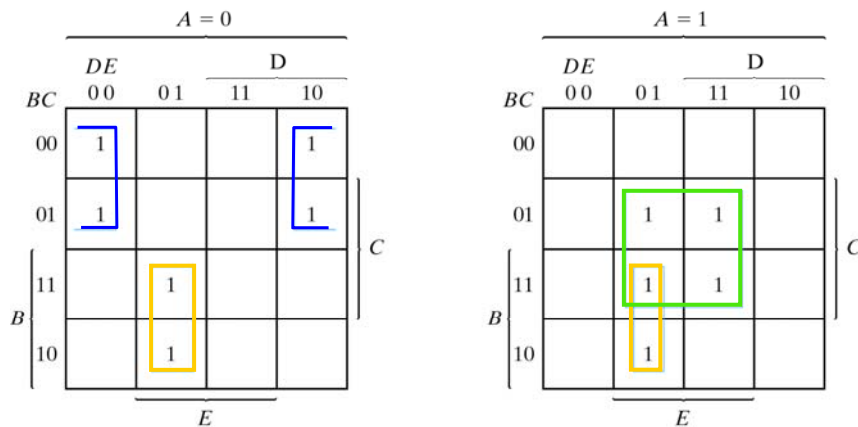
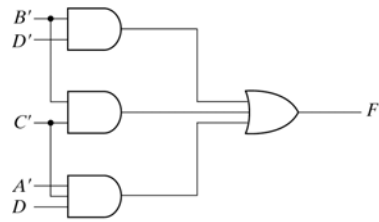
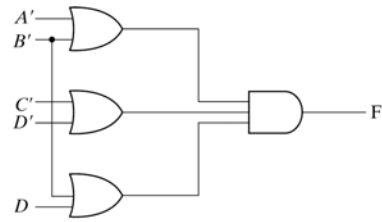


Fig. 3-13 Map for Example 3-7; $F = A'B'E' + BD'E + ACE$

Υλοποίηση με πύλες



$$(a) F = B'D' + B'C' + A'C'D$$



$$(b) F = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$$

Fig. 3-15 Gate Implementation of the Function of Example 3-8

Υλοποίηση με αδιάφορους όρους

		yz				x
		00	01	11	10	
w	00	X	1	1	X	}
	01	0	X	1	0	
	11	0	0	1	0	
	10	0	0	1	0	
		z				

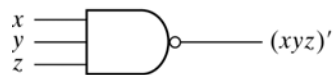
$$(a) F = yz + w'x'$$

		yz				x
		00	01	11	10	
w	00	X	1	1	X	}
	01	0	X	1	0	
	11	0	0	1	0	
	10	0	0	1	0	
		z				

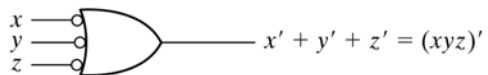
$$(a) F = yz + w'z$$

Fig. 3-17 Example with don't-care Conditions

Πύλες NAND



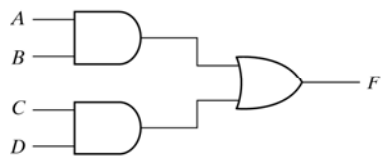
(a) AND-invert



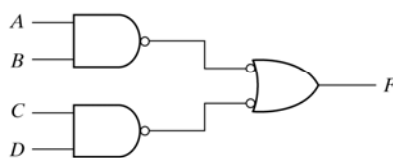
(b) Invert-OR

Fig. 3-19 Two Graphic Symbols for NAND Gate

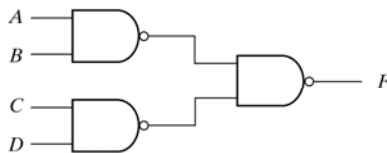
Διαφορετικοί τρόποι υλοποίησης



(a)



(b)



(c)

Fig. 3-20 Three Ways to Implement $F = AB + CD$

Υλοποίηση με NAND

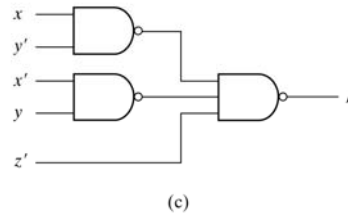
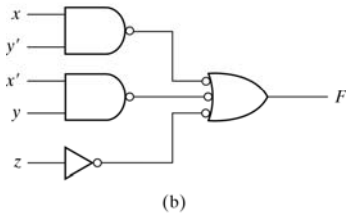
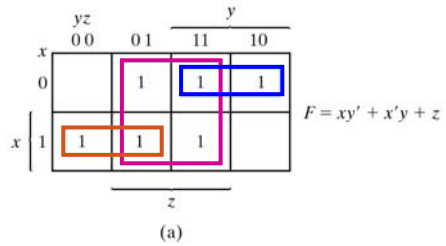


Fig. 3-21 Solution to Example 3-10

Κυκλώματα 'ΟΧΙ-ΚΑΙ πολλαπλών επιπέδων

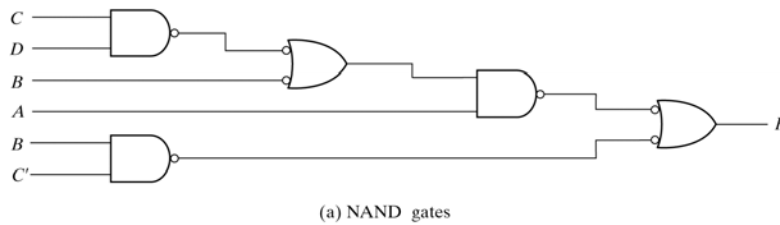
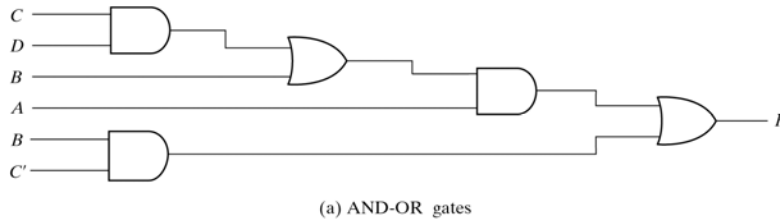


Fig. 3-22 Implementing $F = A(CD + B) + BC$

Διεπίπεδες Υλοποιήσεις

	yz		y		
	00	01	11	10	
x					
0	1	0	0	0	$F = x'y'z' + xyz'$ $F' = x'y + xy' + z$
1	0	0	0	1	
	z				

(a) Map simplification in sum of products.

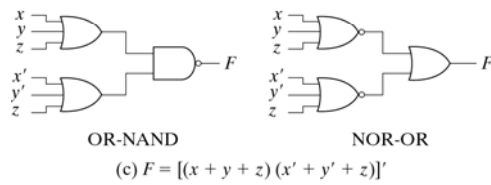
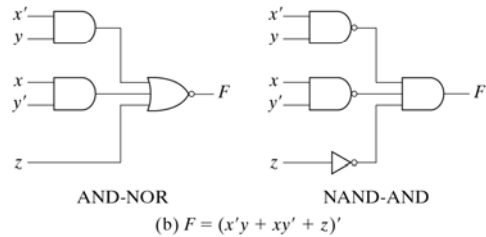
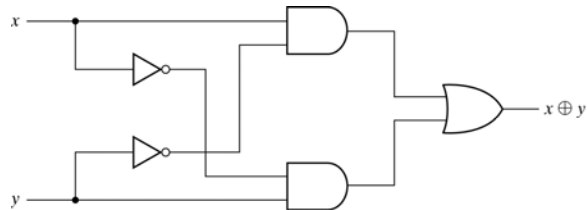
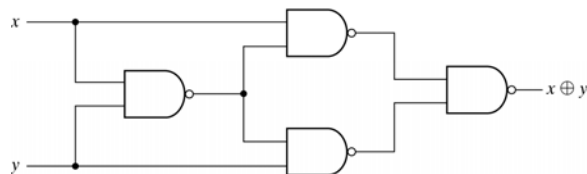


Fig. 3-31 Other Two-level Implementations

Υλοποίηση της συνάρτησης XOR



(a) With AND-OR-NOT gates



(b) With NAND gates

Fig. 3-32 Exclusive-OR Implementations

Χάρτης Karnaugh της περιττής και της άρτιας ισοτιμίας - συνάρτησης

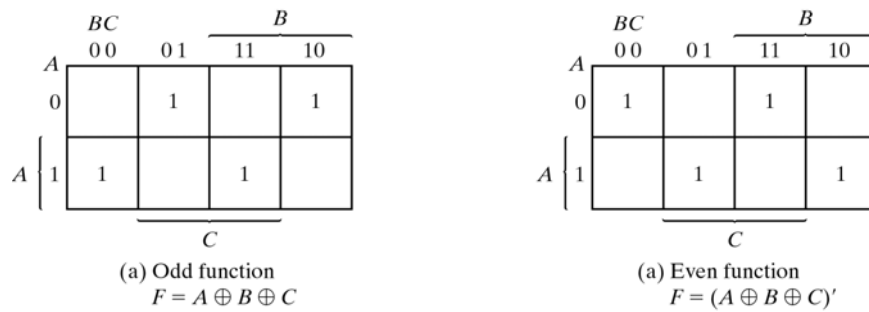


Fig. 3-33 Map for a Three-variable Exclusive-OR Function

Χάρτης Karnaugh της περιττής και της άρτιας ισοτιμίας – συνάρτησης 4 μεταβλητών

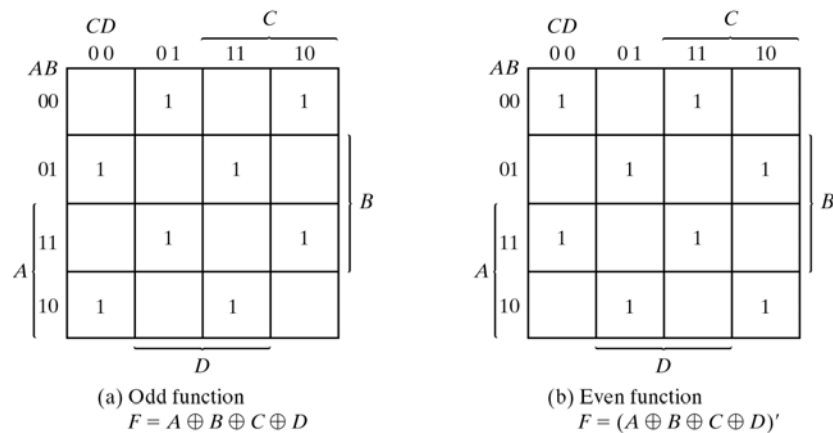


Fig. 3-35 Map for a Four-variable Exclusive-OR Function

Γεννήτρια άρτιας ισοτιμίας 3 bit
Ελεγκτής άρτιας ισοτιμίας 4 bit

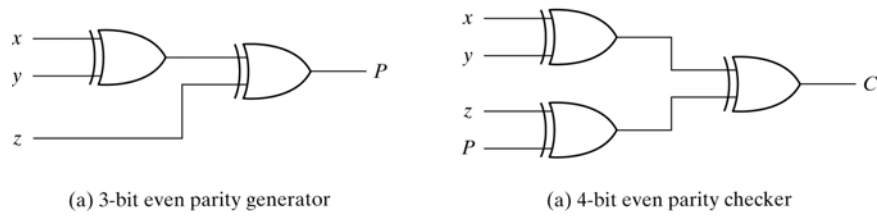


Fig. 3-36 Logic Diagram of a Parity Generator and Checker