Αριθμητικά συστήματα.

Σημειώσεις του Α. Καμπουρέλη.

●Βάση = φυσικός αριθμός $b \geq 2$

π.χ. $b = 2$, δυαδικό σύστημα, BINARY SYSTEM

$b = 3$, τριαδικό, TERNARY

$b = 10$, δεκαδικό, DECIMAL

$b = 16$, δεκαεξαδικό, HEXADECIMAL

●Δυνάμεις της βάσης.

$b^0 = 1$, $b^1 = b$, b^2 , b^3 , ...

$b = 2$: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...

$b = 3$: 1, 3, 9, 27, ...

$b = 10$: 1, 10, 100, 1000, ...

$b = 16$: 1, 16, 256, ...

$b = 32$: 1, 32, 1024, ...

●"Ψηφία" = αριθμοί από 0 έως b – 1

b = 2 : 0 και 1 (BIT !!!)

b = 3 : 0, 1, 2

b = 10: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

b = 16: 0, 1, ..., 9, $\underset{10}{A}$, $\underset{11}{B}$, $\underset{12}{C}$, $\underset{13}{D}$, $\underset{14}{E}$, $\underset{15}{F}$

b = 32:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
U	V								

K = 20, U = 30, R = 27, J = 19, κ.ο.κ.

●**Παράσταση:**

$$(p_m \dots p_1 \ \ p_0)_b = p_0 \text{ x } b^0 + p_1 \text{ x } b^1 + \dots + p_m \text{ x } b^m$$

Παραδείγματα:

$(123)_4 = 3 \text{ x } 4^0 + 2 \text{ x } 4^1 + 1 \text{ x } 4^2 =$

$= 3 \text{ x } 1 + 2 \text{ x } 4 + 1 \text{ x } 16 =$

$= 3 + 8 + 16 = 27$

$(123)_5 = 3 \text{ x } 5^0 + 2 \text{ x } 5^1 + 1 \text{ x } 5^2 =$

$= 3 + 10 + 25 = 38$

Στο δεκαδικό:

$$(123)_{10} = 3 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^2 =$$

$$= 3 + 20 + 100 = 123$$

Δυαδικό:

$$(1\,0\,1\,1)_2 = 1 + 2 + 8 = 11$$

$$(1\,1\,0\,1)_2 = 1 + 4 + 8 = 13$$

Δεκαεξαδικό:

$$(ABC)_{16} = C \times 16^0 + B \times 16^1 + A \times 16^2 =$$

$$= 12 + 11 \times 16 + 10 \times 256 =$$

$$= 12 + 176 + 2560 = 2748$$

$$(6FA)_{16} = A \times 16^0 + F \times 16^1 + 6 \times 16^2 =$$

$$= 10 + 15 \times 16 + 6 \times 256 =$$

$$= 10 + 240 + 1536 =$$

$$= 1786$$

Για b = 32

$$(TEI)_{32} = I \times 32^0 + E \times 32^1 + T \times 32^2 =$$

$$= 18 + 14 \times 32 + 29 \times 1024 =$$

$$= 18 + 448 + 29696 =$$

$$= 30162$$

$$(MAN)_{32} = N \times 32^0 + A \times 32^1 + M \times 32^2 =$$

$$= 23 + 320 + 22 \times 1024 =$$

$$= 22871$$

Δυαδικό:

$$(\underbrace{1\,1\ldots1\,1}_{n \text{ φορές } 1})_2 = 2^n - 1$$

π.χ. $(1\,1\,1\,1\,1)_2 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$

$$(1\,\underbrace{0\ldots\,0}_{n \text{ φορές } 0})_2 = 2^n$$

π.χ. $(1\,0\,0\,0)_2 = 2^3 = 8$

●Αντίστροφη διαδικασία

Έστω $n = (p_m \ldots p_0)_b$ **, τότε** $n \geq 0$ **.**

Για $b \geq 2$ **και** $n \geq 0$ **θέλουμε να υπολογίσουμε την παράσταση.**

Διαίρεση με υπόλοιπο:

$n \geq 0 \,, \quad b > 0$

$n = m \times b + p$ **, όπου** $0 \leq p < b$

π.χ.

$$\begin{array}{r|l} \overline{} & 30 \\ 123 : 4 & \\ -\ 120 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Άρα $\quad 123 = \underbrace{30}_{\text{πηλίκο}} \times \underbrace{4}_{\text{διαιρέτης}} + \underbrace{3}_{\text{υπόλοιπο}}$

Έστω $b \geq 2$ **και** $n \geq 0$

Αλγόριθμος:

$n = n_1 \times b + p_0$

$n_1 = n_2 \times b + p_1$

$n_2 = n_3 \times b + p_2$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$n_m = n_{m+1} \times b + p_m$

$n_{m+1} = 0 \longrightarrow$ **ΤΕΛΟΣ**

Παράσταση: $n = (p_m \ \ldots \ p_2\, p_1\, p_0)_b$

π.χ. b = 5 , n = 123

123 = 24 x 5 + 3

24 = 4 x 5 + 4

4 = 0 x 5 + 4

0 $\longrightarrow$ ΤΕΛΟΣ

Άρα

$$123 = (443)_5$$

π.χ. b = 7 , n = 234

234 = 33 x 7 + 3

33 = 4 x 7 + 5

4 = 0 x 7 + 4

0 $\longrightarrow$ ΤΕΛΟΣ

Άρα

$$234 = (453)_7$$

●**Στο δυαδικό: υπόλοιπο =** $\begin{cases} \textbf{0 , αν ζυγός} \\ \textbf{1 , αν μονός} \end{cases}$

π.χ. $b = 2$, $n = 123$

$$
\begin{array}{rcrcccc l}
123 & = & 61 & \times & 2 & + & 1 & (\text{μονός}) \\
61 & = & 30 & \times & 2 & + & 1 & (\text{μονός}) \\
30 & = & 15 & \times & 2 & + & 0 & (\text{ζυγός}) \\
15 & = & 7 & \times & 2 & + & 1 & (\text{μονός}) \\
7 & = & 3 & \times & 2 & + & 1 & (\text{μονός}) \\
3 & = & 1 & \times & 2 & + & 1 & (\text{μονός}) \\
1 & = & 0 & \times & 2 & + & 1 & (\text{μονός})
\end{array}
$$

$0 \longrightarrow$ **ΤΕΛΟΣ**

Άρα $123 = (1\,1\,1\,1\,0\,1\,1)_2$

●Δεκαεξαδικό: εδώ εμφανίζονται υπόλοιπα μεγαλύτερα από 9 και πρέπει να αντικατασταθούν με αντίστοιχα γράμματα !!!

π.χ. $b = 16$, $n = 11181$

$$11181 = \underbrace{698 \times 16}_{11168} + 13$$

$$698 = \underbrace{43 \times 16}_{688} + 10$$

$$
\begin{array}{rcccccc}
43 & = & 2 & \times & 16 & + & 11 \\
2 & = & 0 & \times & 16 & + & 2
\end{array}
$$

$0 \longrightarrow$ **ΤΕΛΟΣ**

Έχουμε:

11 = B , 10 = A , 13 = D

Άρα:

1 1 1 8 1 = (2 B A D)$_{16}$

π.χ.

Βάση = 32 , n = 14096

$$14096 = \underbrace{440 \times 32}_{14080} + 16 \qquad (16 = G)$$

$$440 = \underbrace{13 \times 32}_{416} + 24 \qquad (24 = O)$$

$$13 = 0 \times 32 + 13 \qquad (13 = D)$$

0 ⟶ ΤΕΛΟΣ

Άρα:

1 4 0 9 6 = (D O G)$_{32}$

Ασκήσεις:

Γράψτε τον Α.Μ. σας στο σύστημα:

1) δυαδικό

2) 16 – δικό

3) βάση b = 32

Πράξεις (στο δυαδικό):

●στο δεκαδικό έχουμε

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 1 & 1 & \leftarrow \textbf{κρατούμενα} \\ & & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ + & & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{6} \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{3} \end{array}$$

●**Πρόσθεση 3 – ών ψηφίων στο 2 – δικό:**

$$\mathbf{0 + 0 + 0 = (0)_2}$$

$$\mathbf{1 + 0 + 0 = (1)_2}$$

$$\mathbf{1 + 1 + 0 = (10)_2}$$

$$\mathbf{1 + 1 + 1 = (11)_2}$$

Άρα:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \leftarrow \textbf{κρατούμενα} \\ \hline & & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ + & & & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline = & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}$$

●**Πρόσθεση** $\boxed{+1}$

1	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
					+		**1**
1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**

Άρα:

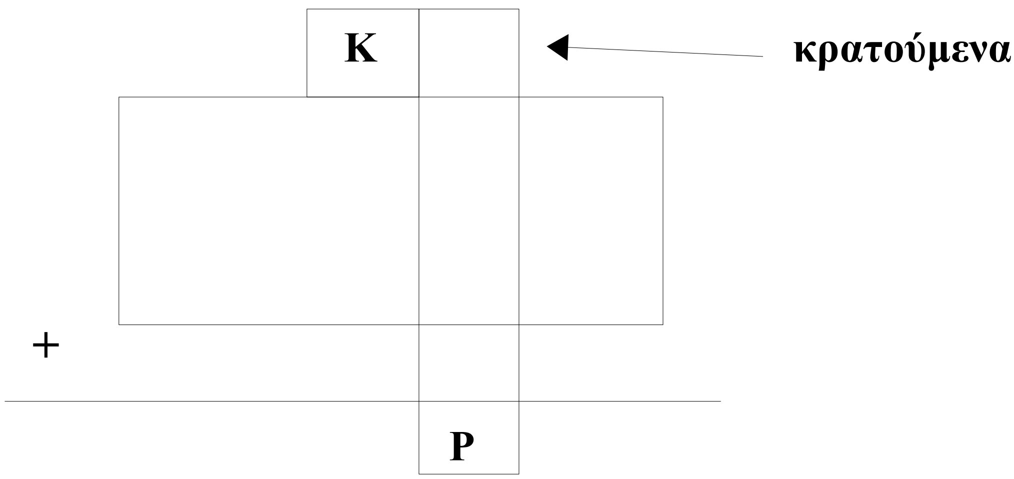
	...οποιαδήποτε σειρά bits..	**0 1 1 1 1**
		+ **1**
=	—— || ——	**1 0 0 0 0**

●**Πρόσθεση πολλών αριθμών**

Δεκαδικό:

```
1  1 1   ◄—— κρατούμενα
   1 2 3
   4 5 6
 + 7 8 9
 -------
 1 3 6 8
```

Δυαδικό:



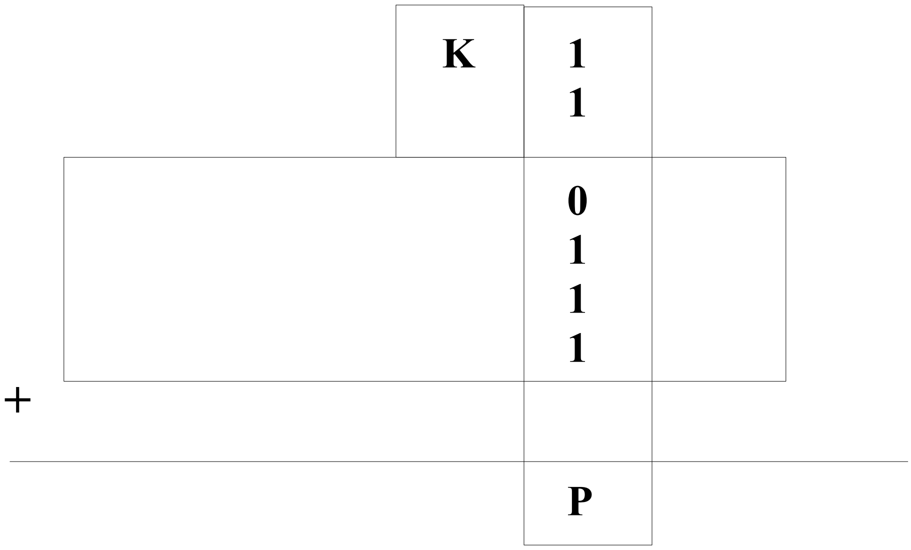
Μας ενδιαφέρει τι θα γράψουμε στο P και πόσα κρατούμενα θα δημιουργηθούν στην επόμενη στήλη, δηλ K.

Μετράμε τους "άσσους" (μαζί με τα κρατούμενα) σε μιά στήλη.

Έστω m ο αριθμός των "άσσων", μαζί με τα κρατούμενα.

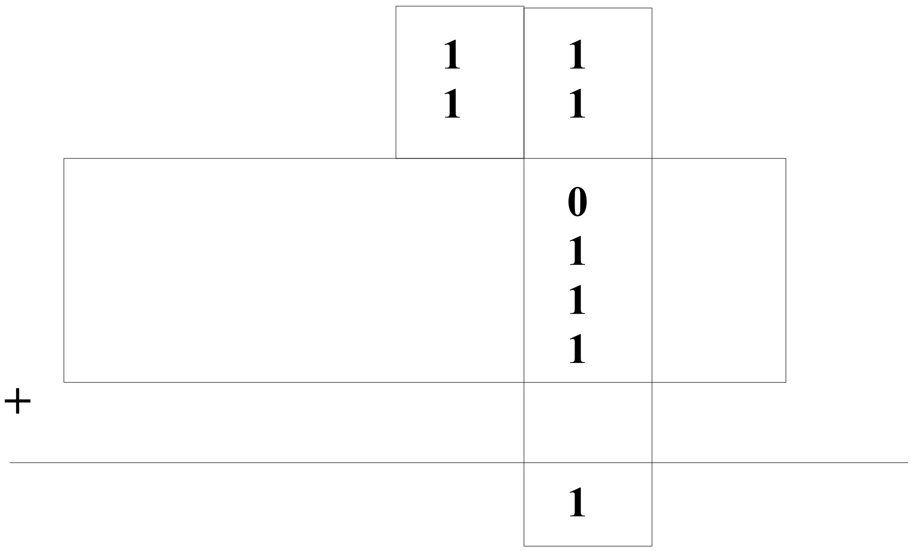
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \mathbf{m}\ \textbf{άρτιος} \rightarrow \textbf{κάτω γράφουμε 0.} \\ \bullet\ \mathbf{m}\ \textbf{περιττός} \rightarrow \textbf{κάτω γράφουμε 1.} \end{array}\right\}\ \mathbf{P}$$

●Κάθε ολόκληρο ζεύγος (δυάδα) άσσων δημιουργεί ένα κρατούμενο στην επόμενη στήλη.



Εδώ m = 5, μονός αριθμός, άρα P = 1 .

Έχουμε 2 ολόκληρες δυάδες, άρα K = 2, ή 1 + 1 .



π.χ.

```
     1 1 1 1
   1 1 1 1 1 1 1 1
       1 1 1 1 1 1          ◄── κρατούμενα
   -----------------
       1 0 1 1 0 1 1
         1 0 1 1 1 1
         1 1 0 1 0 1
       1 0 1 1 0 0 1
 +       1 0 1 1 1 0
 -------------------
   1 0 1 0 0 0 1 1 0
```

5 = μονός **6= ζυγός** **5 = μονός** **4 = άρτιος**

Πολλαπλασιασμός στο Δεκαδικό:

```
        3 4 5
    *   1 2 3
    ---------
      1 0 3 5
      6 9 0
  + 3 4 5
  -----------
  = 4 2 4 3 5
```

Στο Δυαδικό έχουμε πολλαπλασιασμούς επί 1 (= ο ίδιος αριθμός), ή επί 0 (= 0).

π.χ.

```
          1 0 1 0 1 1 0 1
*                 1 0 1 1
---------------------------
    1 1 1 1 1 1              κρατούμενα
          1 0 1 0 1 1 0 1
        1 0 1 0 1 1 0 1
      0 0 0 0 0 0 0 0
    1 0 1 0 1 1 0 1
---------------------------
    1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1
```

●Παράσταση αρνητικών αριθμών.

Έχουμε Μ BIT για παράσταση.

Π.χ. Μ = 8 (δηλ. 1 BYTE)

(| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $)_2$ = 0

(| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $)_2$ = 255

Αν θέλουμε και αρνητικούς αριθμούς, το πρώτο BIT δεσμεύεται για πρόσημο (sign).

0 εάν θετικός

1 εάν αρνητικός

Για θετικούς αριθμούς (πρόσημο = 0) έχουμε την παλαιά παράσταση. Π.χ.

0	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**=**

$$= (0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1)_2 = 1 + 4 + 8 + 64 = 77$$

Για τους αρνητικούς αριθμούς (πρόσημο = 1),

χρησιμοποιούμε:

Συμπλήρωμα ως προς 2 (TWO's COMPLEMENT)

$$-N = NOT(N) + 1$$

π.χ. Σε 8 BIT, N = - 27

Άρα,

$-N = - - 27 = 27 = (1\ 1\ 0\ 1\ 1)_2$

Σε 8 BIT $= (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1)_2$

NOT = (1 1 1 0 0 1 0 0)

NOT + 1 = (1 1 1 0 0 1 0 1)

Για να μην μπερδέψουμε τις δύο παραστάσεις, γράφουμε:

$-27 = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)^s_2$

Γράμμα s = signed (προσημασμένος).

π.χ. N = - 145 σε 10 BIT

i. $|N| = |-145| = 145 = (1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)_2$

ii. Θέλουμε 10 BIT , άρα:

$$145 = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)_2$$

iii. (NOT + 1):

$$(1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0) + 1 =$$

$$(1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)^s{}_2 = -145$$

Άσκηση:

Γράψτε τον αριθμό – ΑΜ (μείον ΑΜ) σε 14 BIT.

Άν μας δίνεται μία παράσταση με "s", ο υπολογισμός αντιστρέφεται:

π.χ.

$$(1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0)^s{}_2 = ?$$

i. NOT + 1 :

$$(0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)_2 + 1 =$$

$$= (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)_2 = 2 + 8 + 128 = 138$$

ii. Άρα $(1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0)^s{}_2 = -138$

Άσκηση:

Υπολογίστε $(1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)^s{}_2$