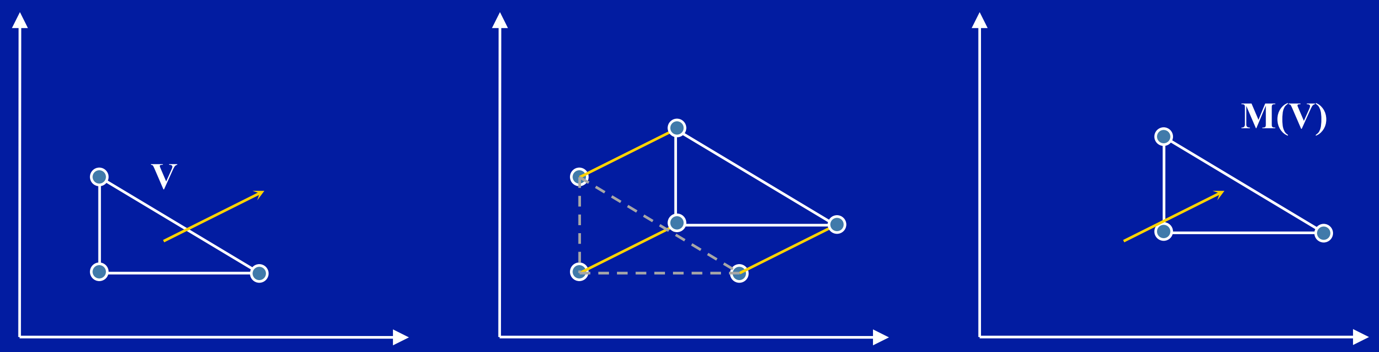
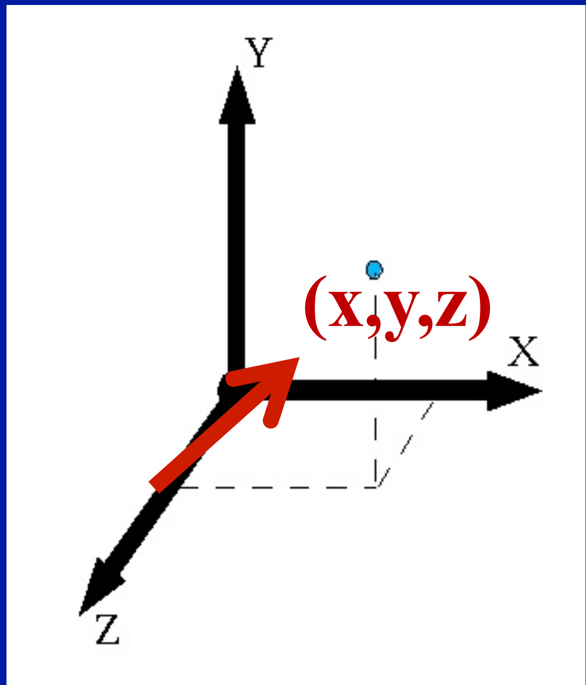
Μετασχηματισμοί

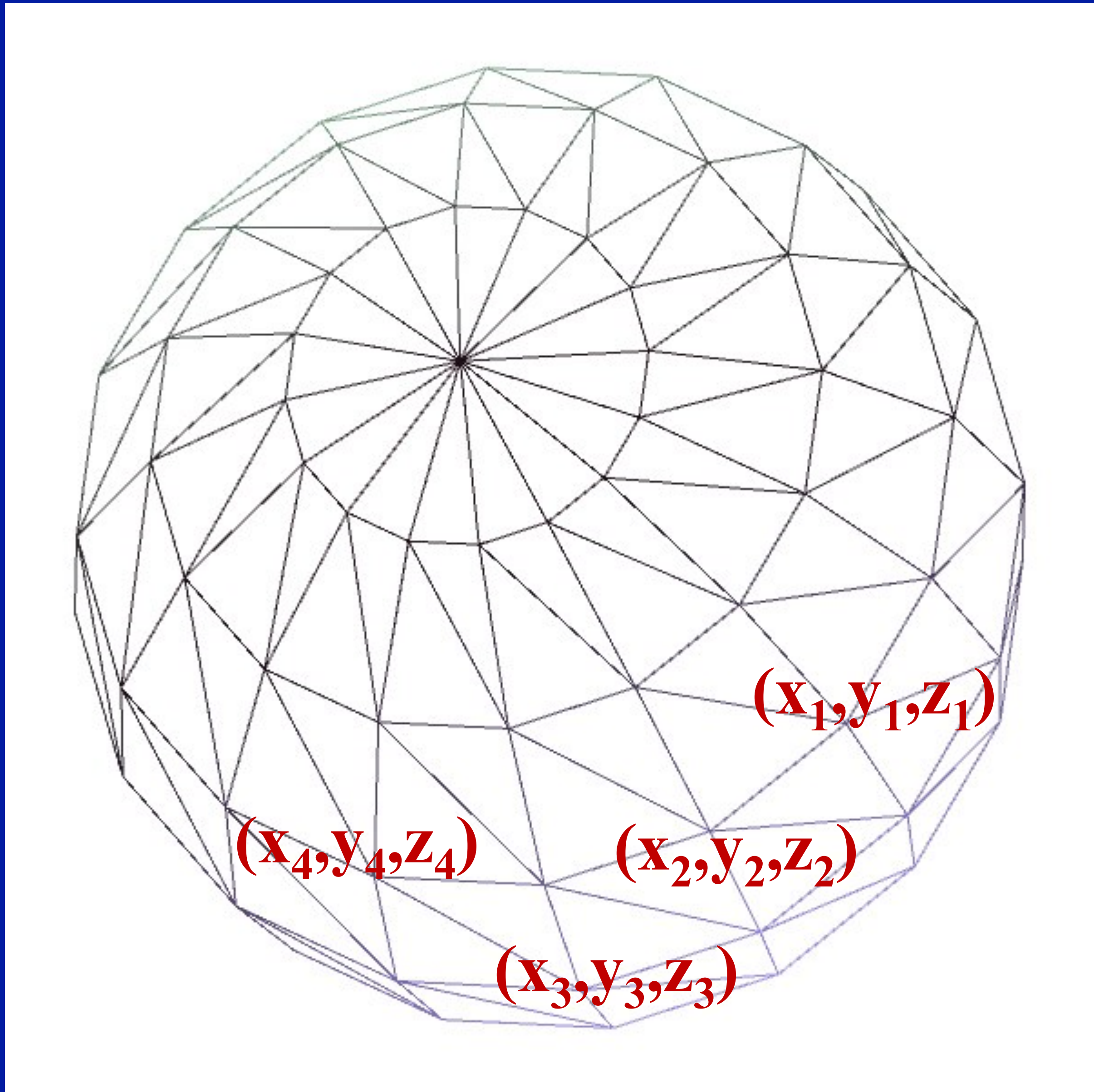
Μετασχηματισμοί είναι πράξεις (Τελεστές) που επιδρούν πάνω στις συντεταγμένες των σημείων που απαρτίζουν ένα γεωμετρικό σχήμα



Αναπαράσταση 3Δ μοντέλων

- Κάθε 3Δ μοντέλο αποτελείται από κορυφές (vertices)
- Κάθε κορυφή καθορίζεται από τη θέση της (x,y,z) στο χώρο
- Για να μετασχηματίσουμε το μοντέλο αλλάζουμε τις θέσεις των κορυφών



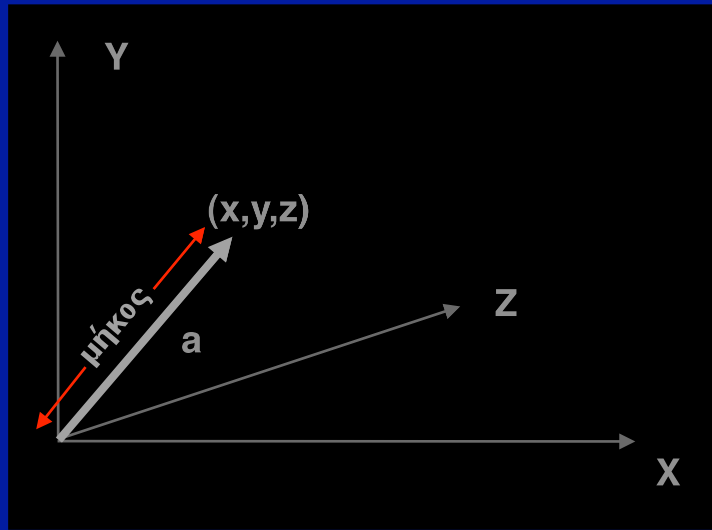

(x_1,y_1,z_1)
(x_4,y_4,z_4)
(x_2,y_2,z_2)
(x_3,y_3,z_3)

Χρήση μετασχηματισμών

- Μεταβολή γεωμετρικών σχημάτων (2D/3D)
- Πλοήγηση (Αλλαγή θέσης ενός εικονικού παρατηρητή μέσα στον «κόσμο» των σχημάτων)
- Δημιουργία πολύπλοκων παραστάσεων (*Σκηνικά*) από απλά σχήματα (2D/3D)
- Προβολή Σχημάτων στην οθόνη/εικόνα

Διανύσματα

Διάνυσμα στο τριδιάστατο χώρο:



Βασικές ιδιότητες διανυσμάτων (a,b διανύσματα, λ,μ αριθμοί)

- $a + b = b + a$ αντιμεταθετική
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ προσεταιριστική
- $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ επιμερισμός πολλ/μού ως προς πρόσθεση
- $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ επιμερισμός πρόσθεσης ως προς πολλ/μό
- $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ προσεταιριστική
- Μήκος διανύσματος : $| a | = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- Μοναδιαίο διάνυσμα: έχει μήκος 1

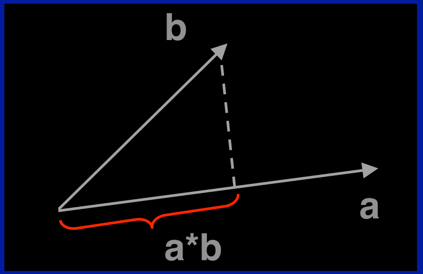
Διανύσματα

<u>Εσωτερικό γινόμενο</u> διανυσμάτων $a(a_x,a_y,a_z)$ και $b(b_x,b_y,b_z)$

- $a * b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ το αποτέλεσμα είναι αριθμός

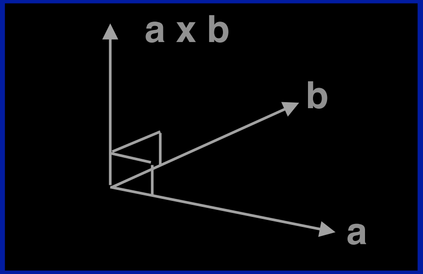
Ιδιοτητες εσωτερικου γινομένου

- $a * a >= 0$
- $a * b = 0$ τότε το a είναι κάθετο στο b
- Μήκος διανύσματος $|a| = \sqrt{a*a}$
- $a * b = |a||b| \cos\phi$



<u>Εξωτερικό γινόμενο</u> διανυσμάτων $a(a_x,a_y,a_z)$ και $b(b_x,b_y,b_z)$

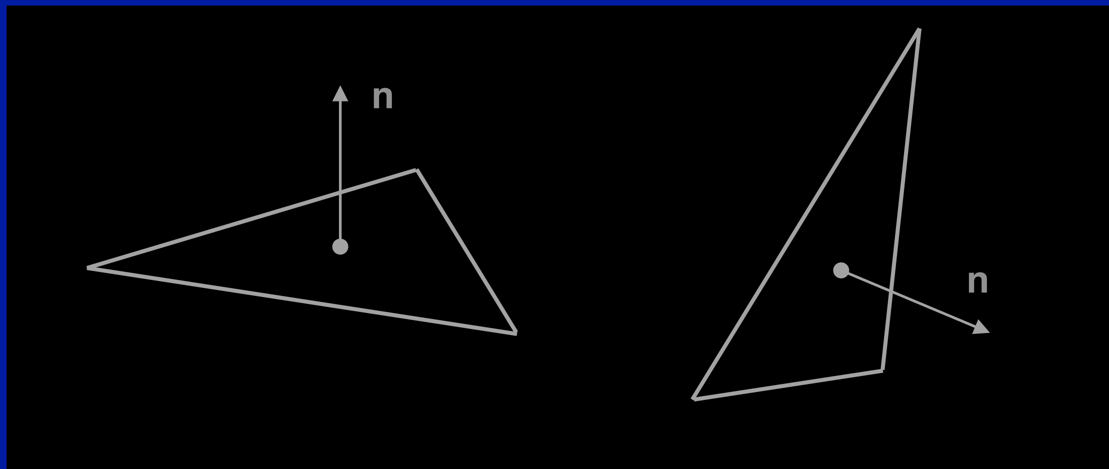
- $a \times b = c(a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$ το αποτέλεσμα είναι διάνυσμα οποίο είναι κάθετο και στο a και στο b



Το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο είναι πολύ σημαντικά στην δημιουργία γραφικών: Το εσωτερικό γινόμενο εκφράζει το ποσοστό του φωτός που ανακλάται από μια επιφάνεια, και το εξωτερικό γινόμενο χρησιμοποιείται για να καθοριστεί η «πάνω κατεύθυνση» μιας κάμερας.

Ένα σημαντικό διάνυσμα

- Το ποιο σημαντικό ίσως διάνυσμα στα γραφικά είναι το μοναδιαίο, κάθετο στην επιφάνεια, διάνυσμα (normal, συμβολίζεται n).
- Το normal ορίζει κατεύθυνση επιφάνειας (δηλαδή προς τα πού βλέπει)



- Έχει πολλές εφαρμογές:
  - στο υπολογισμό φωτός που πέφτει σε μια επιφάνεια
  - στην διαγραφή μη ορατών τριγώνων
  - στην εφαρμογή υφών στην επιφάνεια (texturing)

Πίνακες

Ένας πίνακας M περιγράφεται από mxn αριθμούς διατεταγμένους σε m γραμμές και n στήλες : [m_{ij}] $0 \leq i \leq m-1$, $0 \leq j \leq n-1$.

$$M = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad m=3,\ n=3$$

Πράξεις πινάκων

- Πρόσθεση πινάκων
  - $M + N = [\, m_{ij} \,] + [\, n_{ij} \,] = [\, m_{ij} + n_{ij} \,]$: πρέπει οι πίνακες να έχουν το ίδιο μέγεθος
- Πολ/σμός αριθμού με πίνακα
  - $aM = a\, [\, m_{ij} \,] = [\, am_{ij} \,]$

Πίνακες

Πράξεις πινάκων

- Πολλαπλασιασμός πινάκων. Αν M είναι μέγεθος pxq και ο N μέγεθος qxr τότε ο T= MN θα είναι μεγέθους pxr

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{00} & n_{01} & n_{02} \\ n_{10} & n_{11} & n_{12} \\ n_{20} & n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{t_{00}} & \boxed{t_{01}} & t_{02} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$$

$$t_{00} = m_{00}*n_{00} + m_{01}*n_{10} + m_{02}n_{20}$$

Βασιζόμενοι στο εσωτερικό γινόμενο : $t_{ij} = m_i*n_j$

- Ιδιότητες πολ/μού
  - L(MN) = (LM)N — προσεταιριστική
  - (L+M)N = LN + MN — επιμεριστική
  - MN ≠ NM — η αντιμετάθεση γενικά δεν ισχύει

Πίνακες

Ανάστροφος πίνακα

- Είναι ο πίνακας N όπου:
  - $N = M^T = [\, m_{ji} \,]$ οι στήλες του αρχικού πίνακα γίνονται γραμμές και οι γραμμές στήλες
- Ιδιότητες
  - $(aM)^T = aM^T$
  - $(M+N)^T=M^T+N^T$
  - $(MN)^T=N^TM^T$
  - $(M^T)^T = M$

Αντίστροφος πίνακα

- Είναι ο πίνακας N όπου: MN = NM = I.
  - $N = M^{-1}$ ο M πρέπει να είναι τετράγωνος πίνακας (mxm) και η ορίζουσα του πρέπει να είναι μη μηδενική
  - $(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$
  - $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$: σημαντική ιδιότητα για όταν θα πρέπει να αντιστρέψουμε μετασχηματισμούς!
- Αν $u = Mv$ και ο M^{-1} υπάρχει, τότε $v=M^{-1}u$: με την χρήση του αντίστροφου μπορούμε να αναστρέψουμε τα αποτελέσματα ενός μετασχηματισμού.

Μετασχηματισμοί;

Τι εννοούμε με τον όρο «μετασχηματισμός»;

- Μετασχηματισμός είναι ένας μηχανισμός (ή πράξη ή τελεστής) που μετατρέπει μια ποσότητα σε μια άλλη.
  - Παράδειγμα: χρησιμοποιούμε ένα μετασχηματισμό για να μετατρέψουμε τα ευρώ σε δολάρια: 10 ευρώ = 15 δολάρια. (ο μετασχηματισμός εδώ είναι ο πολλαπλασιασμός με 1,5)

- Στην δική μας περίπτωση ο μετασχηματισμός είναι συνήθως ο πολλαπλασιασμός με ένα πίνακα που επιδρά πάνω στις συντεταγμένες των σημείων που απαρτίζουν ένα γεωμετρικό σχήμα

Μετασχηματισμοί;

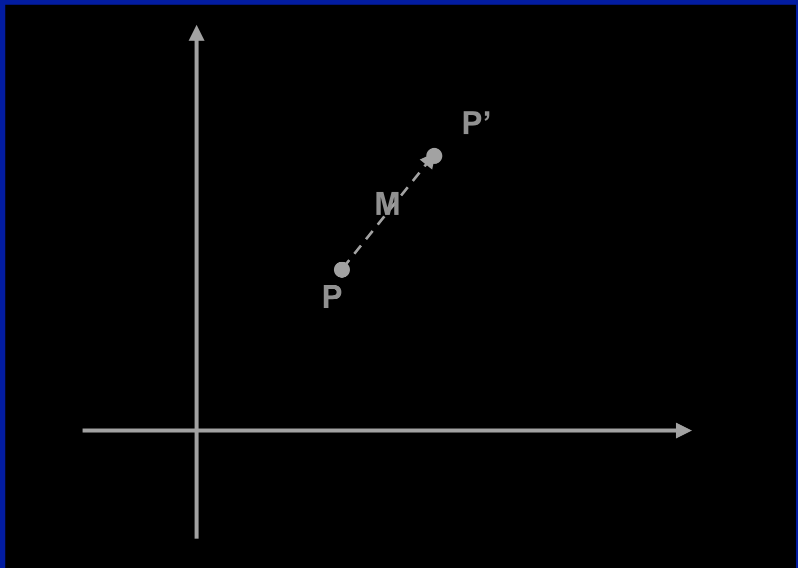
Γιατί ενδιαφερόμαστε για τους μετασχηματισμούς;

- Γιατί με την βοήθεια τους μπορούμε εύκολα να τοποθετήσουμε, να περιστρέψουμε, να αλλάξουμε το σχήμα, να κινήσουμε τα αντικείμενα, τα φώτα και την κάμερα στην σκηνή μας.

- Μπορούμε επίσης να κατασκευάσουμε σύνθετες σκηνές από πολλά αντικείμενα

Παράδειγμα μετασχηματισμού

Έστω ένα σημείο P στο επίπεδο και ένας μετασχηματισμός M. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό πάνω στις συντεταγμένες του σημείου P θα λάβουμε ένα νέο σημείο P’ σε άλλη θέση του επιπέδου



Συμβολικά:
$P' = M(P)$

Είδη μετασχηματισμών

Υπάρχουν 2 βασικές κατηγορίες μετασχηματισμών:

- Συσχετισμένοι (γραμμικοί – affine)
  – Οι γραμμικοί μετασχηματισμοί διατηρούν τις ευθείες και το λόγο των αποστάσεων μεταξύ σημείων
- Παραμορφωτικοί (μη γραμμικοί)

Όλοι οι βασικοί μετασχηματισμοί που χρησιμοποιούμε στα γραφικά είναι γραμμικοί. Πλεονέκτημα: δεν χρειάζεται να μετασχηματίσουμε κάθε σημείο ενός ευθύγραμμου τμήματος παρά μόνο τα άκρα του.

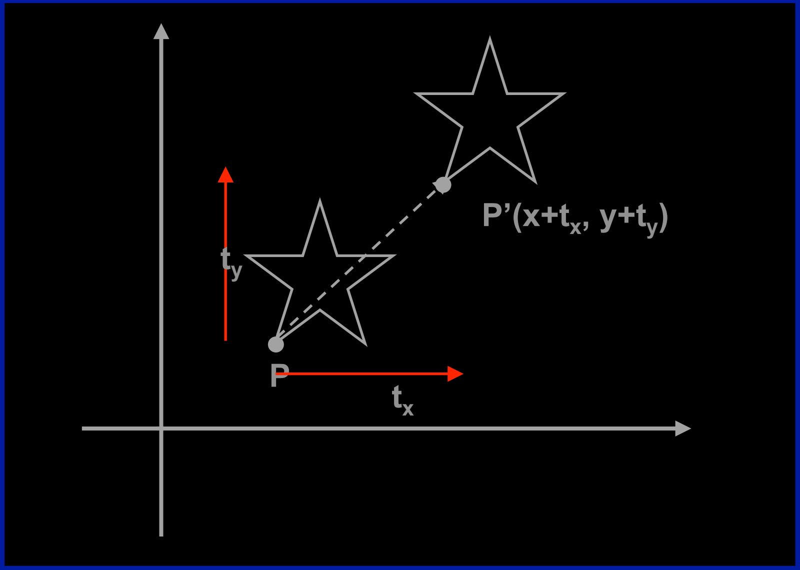
Βασικοί μετασχηματισμοί

Οι βασικοί μετασχηματισμοί που χρησιμοποιούμε στα γραφικά είναι οι εξής:

- Περιστροφή γύρω από ένα άξονα (rotation) κατά γωνία θ : R
- Μετακίνηση (translation) : T
- Αλλαγή κλίμακας (scaling) : S
- Στρέβλωση (shearing) : H

Βασικοί μετασχηματισμοί: Μετακίνηση

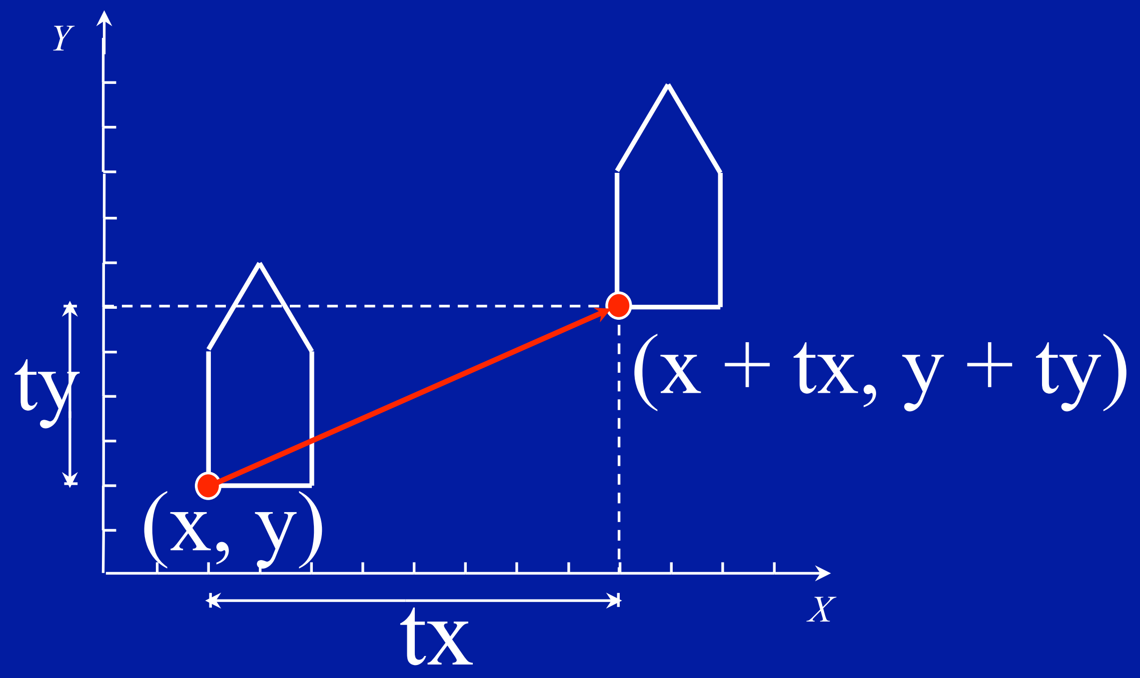
Αν υποθέσουμε ένα σημείο P = [x y]^T στο επίπεδο και ότι θέλουμε να το μετακινήσουμε κατά διάνυσμα t = [t_x t_y]^T. Θα έχουμε:



$$P' = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{bmatrix}$$

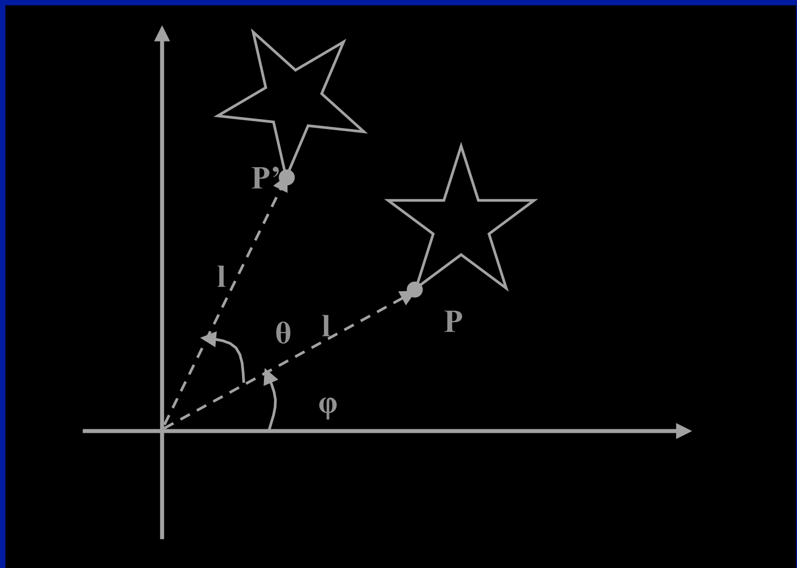
Βασικοί μετασχηματισμοί: Μετακίνηση

$$P' = P + t \quad \text{όπου} \quad P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \; P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \; t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$



Βασικοί μετασχηματισμοί: Περιστροφή

Αν υποθέσουμε ένα σημείο P = [x y]^T στο επίπεδο και ότι θέλουμε να το περιστρέψουμε αριστερόστροφα κατά γωνία θ, στο σημείο P’ = [x’ y’]^T. Υποθέτουμε επίσης ότι η απόσταση των P,P’ από το την αρχή των αξόνων είναι l.



$$x' = l\cos(\theta+\varphi) = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = l\sin(\theta+\varphi) = x\sin\theta - y\cos\theta$$

$$P' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

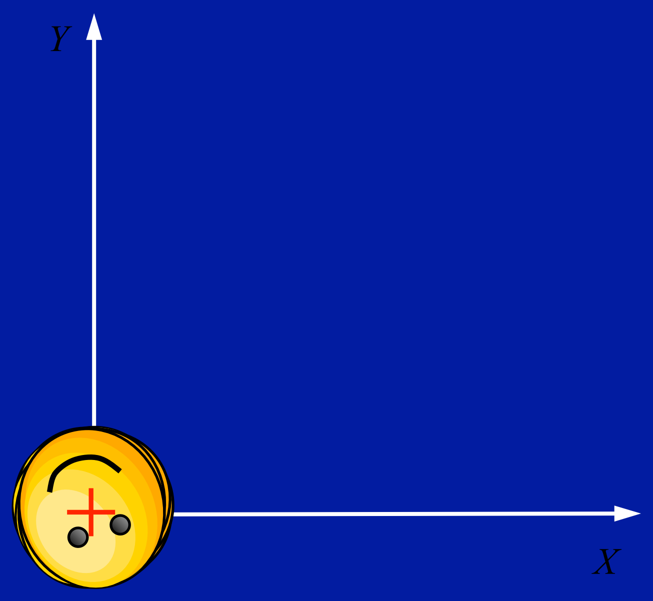
Μετασχηματισμός περιστροφής κατά θ : $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

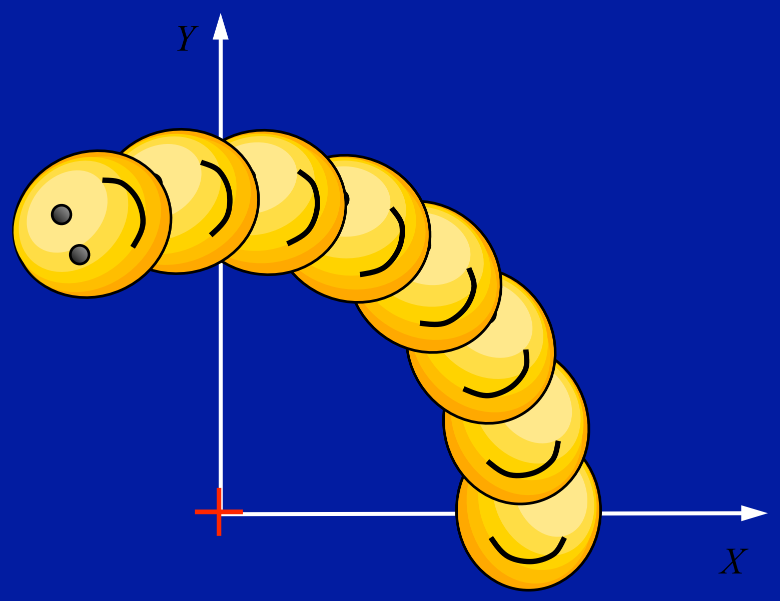
Η περιστροφή γίνεται γύρω από την αρχή των αξόνων.

Βασικοί μετασχηματισμοί: Περιστροφή

Ο τελεστής της περιστροφής έχει ως ουδέτερο σημείο το (0,0). Άρα:

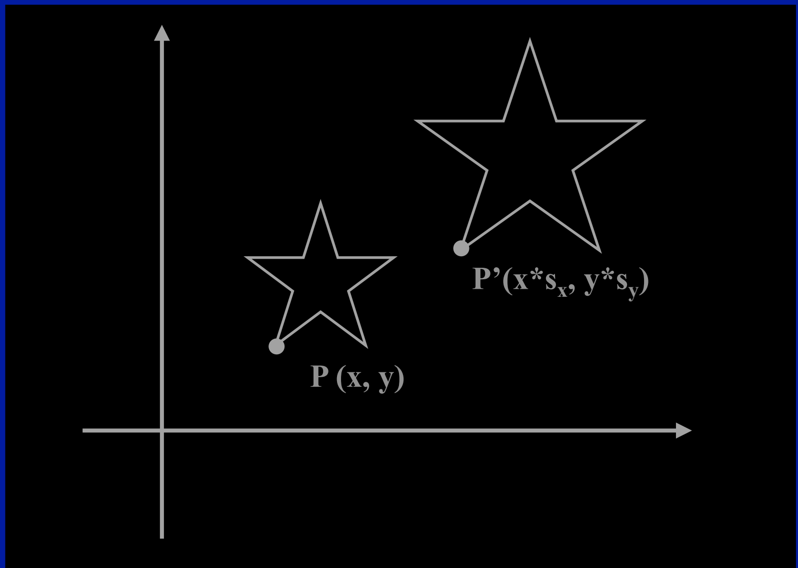
! Η περιστροφή γίνεται ως προς την αρχή των αξόνων





Βασικοί μετασχηματισμοί: Κλίμακα

Η αλλαγή κλίμακας αλλάζει το συνολικό μέγεθος ενός αντικειμένου πολλαπλασιάζοντας κάθε συντεταγμένη σε κάθε διάσταση με ένα αριθμό s

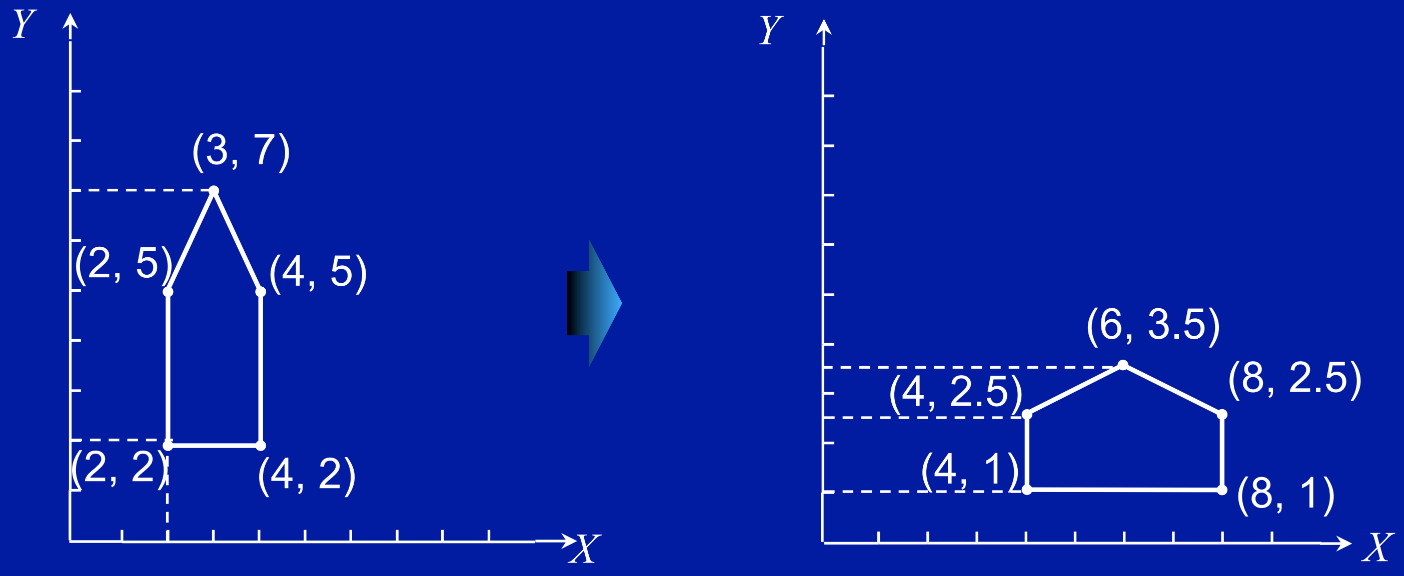


$$P' = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x * s_x \\ y * s_y \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμός κλίμακας : $S_{xy} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$

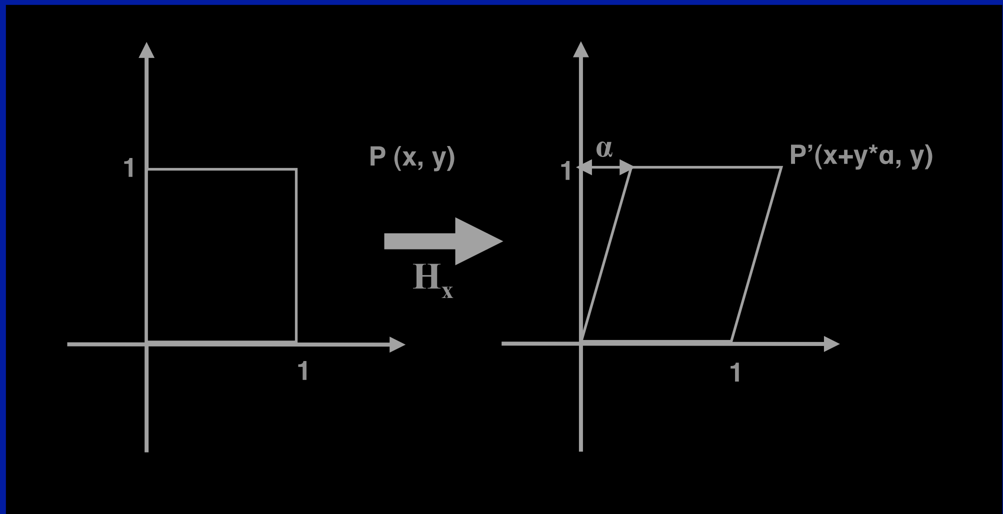
Αν $s_x=s_y$ ο μετασχηματισμός ονομάζεται ομοιόμορφος.

Βασικοί μετασχηματισμοί: Κλίμακα



Βασικοί μετασχηματισμοί: Στρέβλωση

Ο μετασχηματισμός στρέβλωσης H_{xy} εξηγείται καλύτερα με ένα παράδειγμα. Στρέβλωση κατά α στο άξονα Χ θα έχει το εξής αποτέλεσμα:

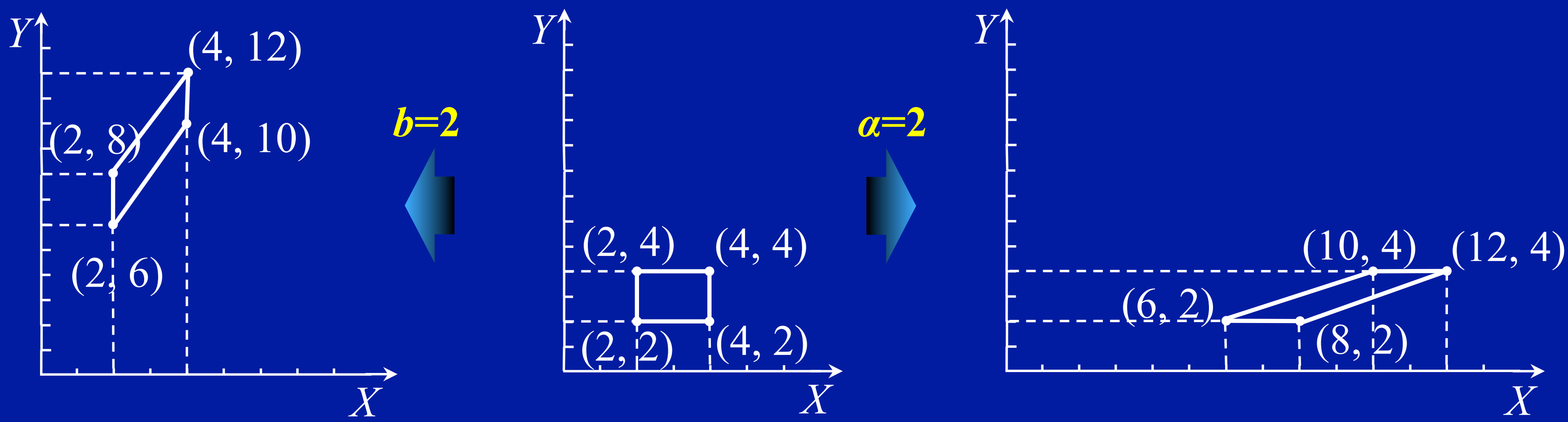


Ο μετασχηματισμός δεν επιδρά στην y-συντεταγμένη. Για την x' συντεταγμένη έχουμε:
x' = x + y*α, που έχει ως αποτέλεσμα να «γέρνει» το σχήμα.

Μετασχηματισμός στρέβλωσης κατά Χ : $H_x = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Μετασχηματισμός στρέβλωσης κατά Υ : $H_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{bmatrix}$

Βασικοί μετασχηματισμοί: Στρέβλωση



Βασικοί μετασχηματισμοί σε 3 διαστάσεις

Οι βασικοί μετασχηματισμοί που είδαμε ως τώρα δρουν στις 2 διαστάσεις (επίπεδο). Η επέκταση τους στις 3 διαστάσεις γίνεται απλά λαμβάνοντας και το z-άξονα υπόψη. Παράδειγμα:

Μετασχηματισμός κλίμακας : $S_{xyz} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix}$

Μετασχηματισμός μετακίνησης : $P' = P + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$

Περιστροφή γύρω από τον X : $R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Ομογενείς συντεταγμένες

Οι βασικοί μετασχηματισμοί εκφράζονται από ένα 3x3 πίνακα και εφαρμόζονται στα σημεία της γεωμετρίας με ένα απλό πολ/σμό σημείου με πίνακα.

Όχι όλοι! Η μετακίνηση δεν μπορεί να εφαρμοστεί με πολ/σμό με πίνακα!

Πρέπει να εξετάζουμε την μετακίνηση σαν ειδική περίπτωση μετασχηματισμού;

Υπάρχει λύση στο πρόβλημα αυτό και ονομάζεται ομογενείς συντεταγμένες:
Επεκτείνουμε την διάσταση των πινάκων κατά ένα από 3x3 σε 4x4, και οι συντεταγμένες των σημείων/διανυσματων κερδίζουν ένα επιπλέον στοιχείο $[\ x\ y\ z\ w\ ]^T$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & t_x \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & t_y \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γενική μορφή μετασχηματισμού

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Γενική μορφή σημείου

Μετασχηματισμοί σε ομογενείς συντεταγμένες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετακίνηση T

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Κλίμακα S_{xyz}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στρέβλωση H_{st}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Περιστροφή R_x

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Περιστροφή R_y

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Περιστροφή R_z

Σύνθεση μετασχηματισμών

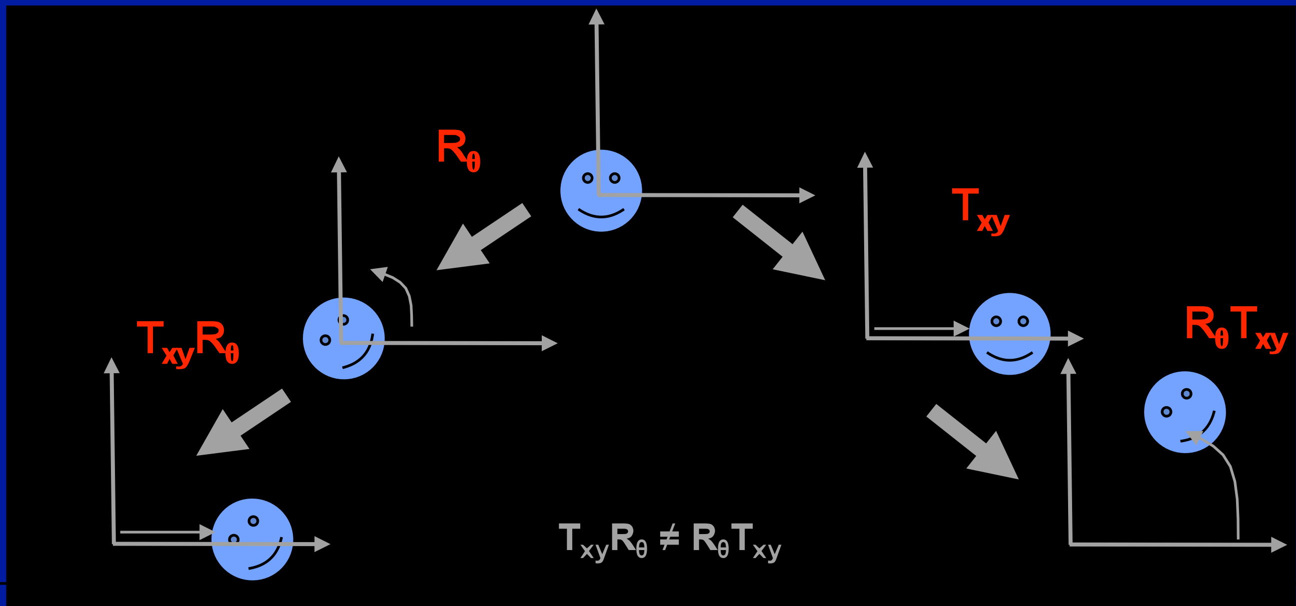
Σε ομογενείς συντεταγμένες η σύνθεση μετασχηματισμών γίνεται με απλό πολ/σμό των πινάκων τους:

$$P' = M_3 M_2 M_1 P$$

Η εφαρμογή των μετασχηματισμών γίνεται από τα δεξιά προς τα αριστερά (δηλαδή στο παράδειγμα θα πολ/στει πρώτα ο M_1 με το σημείο P.

Η σειρά που θα εφαρμοστούν οι μετασχηματισμοί παίζει ρόλο και γενικά

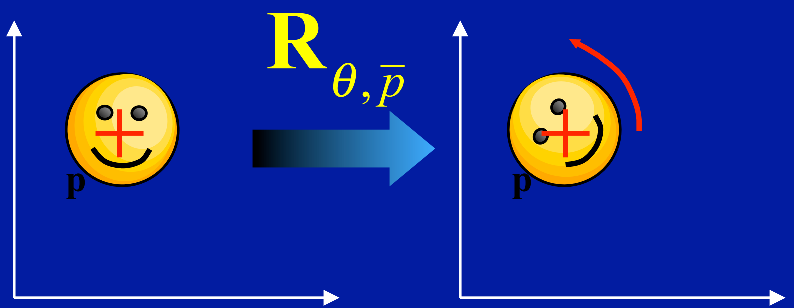
$$M_1 M_2 \neq M_2 M_1$$



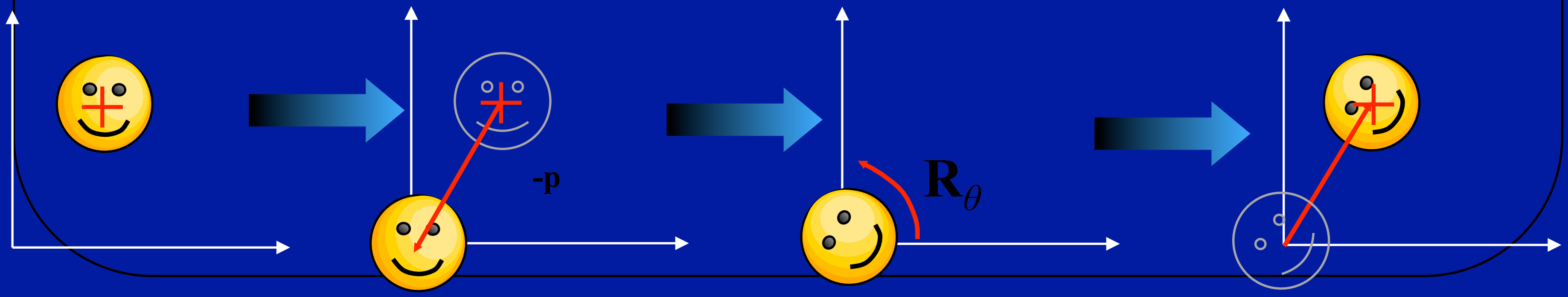
Σύνθεση μετασχηματισμών

Πχ. Περιστροφή γύρω από δεδομένο σημείο:

Ζητούμενο:

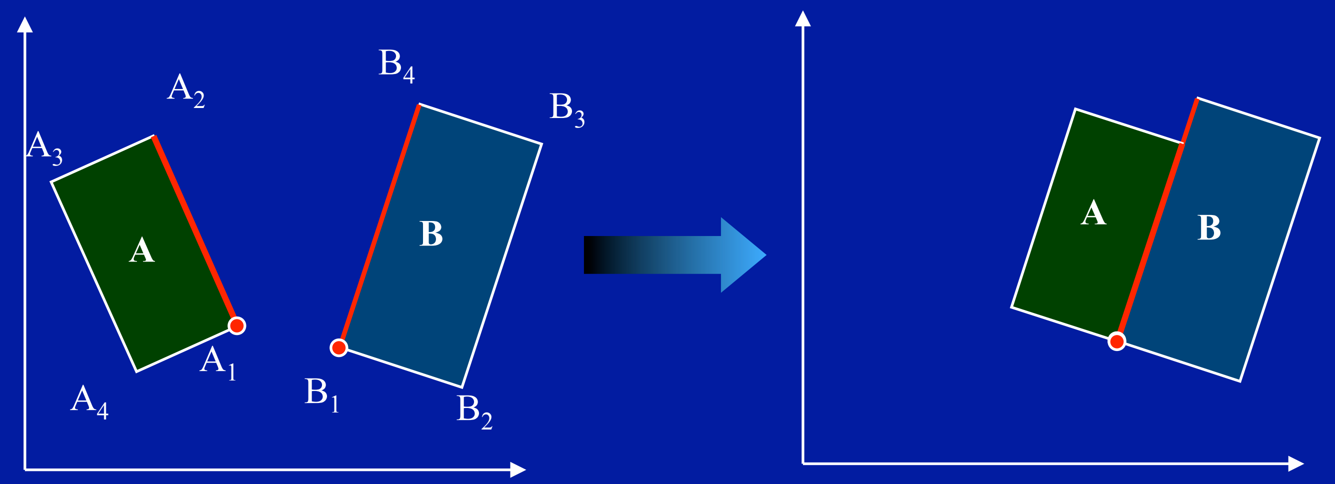


Απάντηση: $\mathbf{R}_{\theta,\bar{p}} = \mathbf{T}_{\vec{p}}\mathbf{R}_{\theta}\mathbf{T}_{-\vec{p}}$



Σύνθεση μετασχηματισμών

Ζητούμενο:



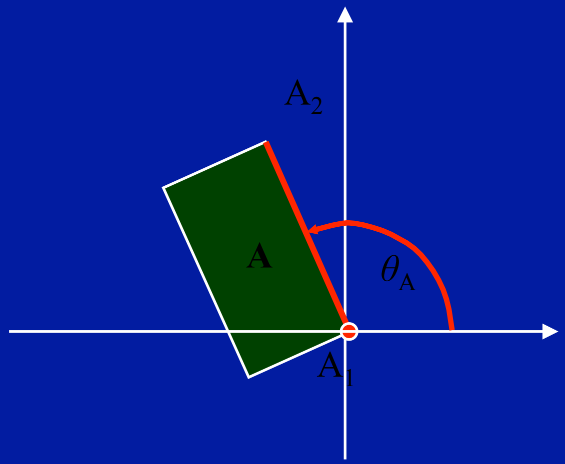
Διερεύνηση:

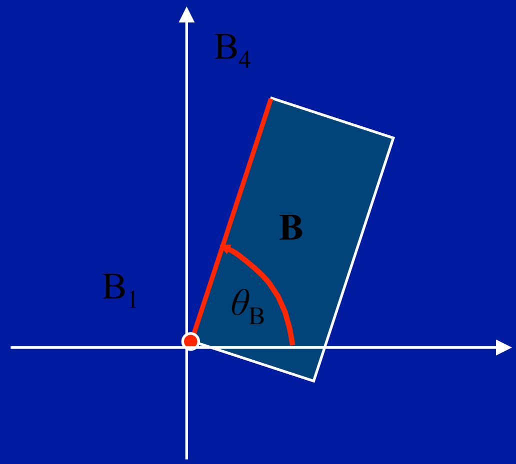
Α) Να βρεθεί η γωνία στροφής του Α ώστε οι πλευρές να συμπέσουν

Β) Να περιστραφεί κατάλληλα το σχήμα Α

Γ) Να μεταφερθεί το Α έτσι ώστε τα σημεία A_1 και B_1 να συμπέσουν

Σύνθεση μετασχηματισμών





A) Εύρεση της γωνίας στροφής: Η διαφορά στην κλίση των δύο σχημάτων δίνεται από τη διαφορά των γωνιών: $\theta = \theta_A - \theta_B$

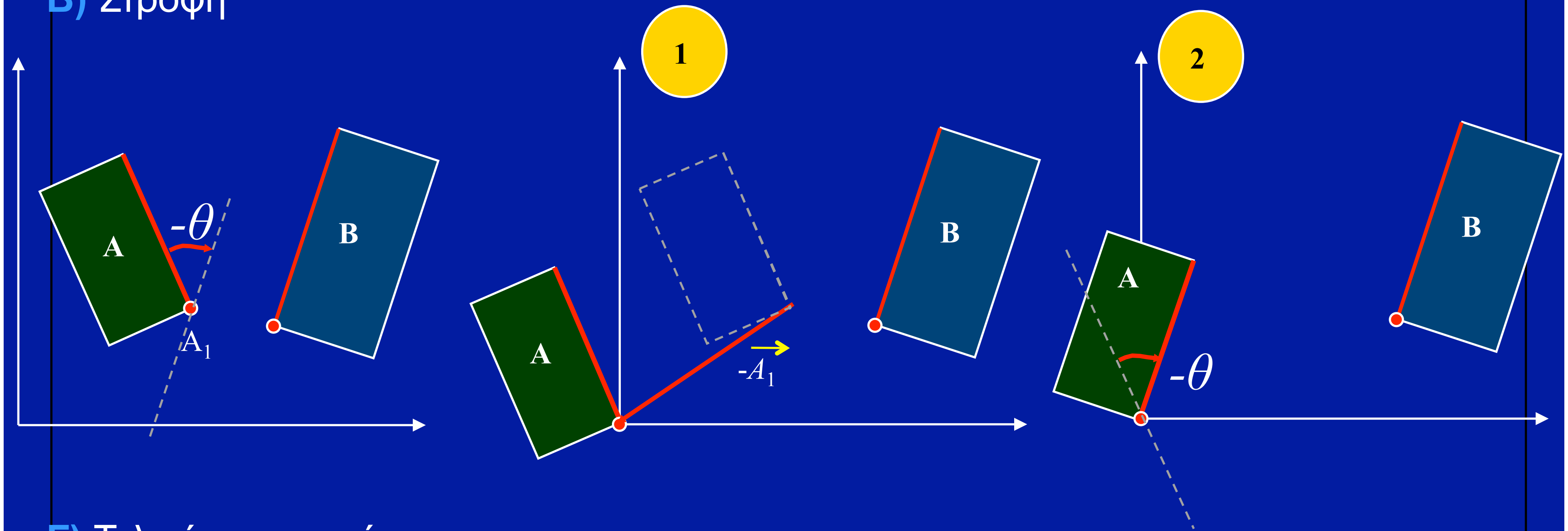
$$\theta_A = \tan^{-1}\left(\frac{A_{2y} - A_{1y}}{A_{2x} - A_{1x}}\right)$$

$$\theta_B = \tan^{-1}\left(\frac{B_{4y} - B_{1y}}{B_{4x} - B_{1x}}\right)$$

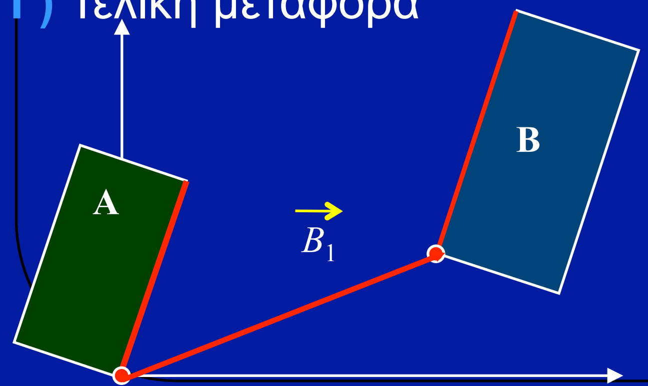
Η ζητούμενη περιστροφή πρέπει να γίνει κατά $-\theta$

Σύνθεση μετασχηματισμών

Β) Στροφή



Γ) Τελική μεταφορά



$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_{\vec{B}_1} \mathbf{R}_{-\theta} \mathbf{T}_{-\vec{A}_1}$$

Σύνθεση ομοειδών μετασχηματισμών

Η σύνθεση ομοειδών μετασχηματισμών μπορεί να γίνει με οποιαδήποτε σειρά (η αντιμετάθεση ισχύει)

$R_\theta R_\varphi = R_\varphi R_\theta$

Επιπλέον ισχύουν μερικές βελτιστοποιήσεις που είναι σημαντικές για γρήγορους υπολογισμούς μετασχηματισμών

- $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$
- $T_t T_u = T_{t+u}$
- $S_{ax,ay} S_{bx,by} = S_{ax+bx,ay+by}$

Η αποφυγή ενός πολ/μού πίνακα ανά σημείο (vertex) αντικειμένου κάνει πολύ μεγάλη διαφορά όταν πρέπει να μετασχηματίσουμε αντικείμενα μερικών δεκάδων χιλιάδων τριγώνων!

Αντιστροφή μετασχηματισμών

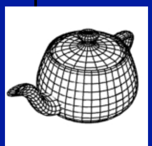
Είναι δυνατόν να αναιρέσουμε την επίδραση ενός μετασχηματισμού πάνω σε ένα αντικείμενο.

- Αν πρόκειται για ένα μετασχηματισμό ή μια ομάδα βασικών μετασχηματισμών αλλάζουμε την σειρά τους και το πρόσημο των παραμέτρων
  - $M = R_x(\theta)R_y(\varphi)T(t) \Rightarrow M^{-1} = T(-t)R_y(-\varphi)R_x(-\theta)$ αρκετά γρήγορο
- Αν πρόκειται για μετασχηματισμό περιστροφής (ή γινόμενο μετασχηματισμών περιστροφής)
  - $M = R_x(\theta)R_y(\varphi) \Rightarrow M^{-1} = M^T$ πολύ γρήγορο!
- Αν δεν γνωρίζουμε τίποτα για τον μετασχηματισμό τότε πρέπει να υπολογίσουμε το αντίστροφο M^{-1} με μια από τις διαθέσιμες μεθόδους της Γραμμικής Άλγεβρας σχετικά αργό…

Συστήματα συντεταγμένων

Ένα αντικείμενο σε μια σκηνή περνάει με μια σειρά μετασχηματισμών (transforms) από διάφορα συστημάτων συντεταγμένων (coordinate spaces) μέχρι να φτάσει την οθόνη:

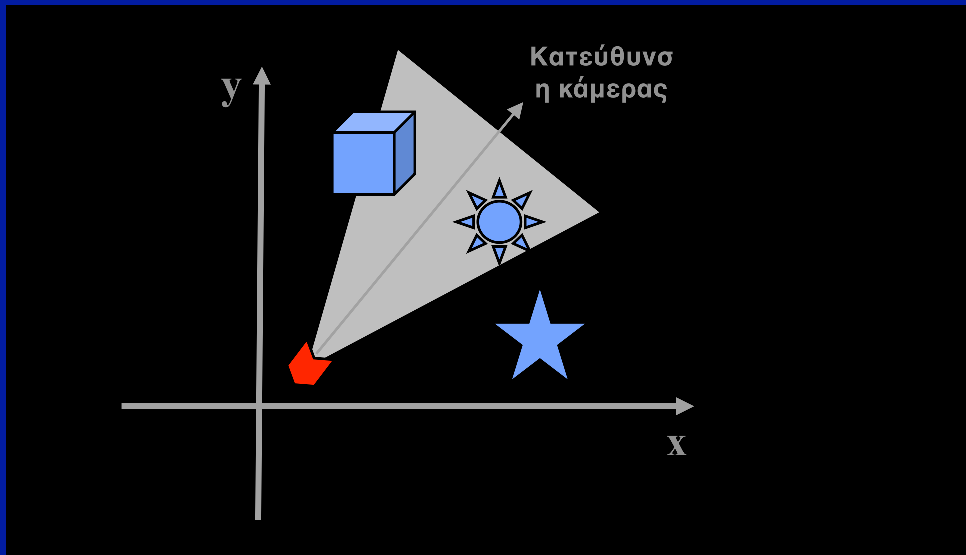
- Σύστημα συντεταγμένων αντικειμένου (object space)
- Σύστημα συντεταγμένων κόσμου (world space)
- Σύστημα συντεταγμένων κάμερας (camera/view space)
- Σύστημα συντεταγμένων προβολής (projection/clip space)
- Σύστημα συντεταγμένων οθόνης (screen space)

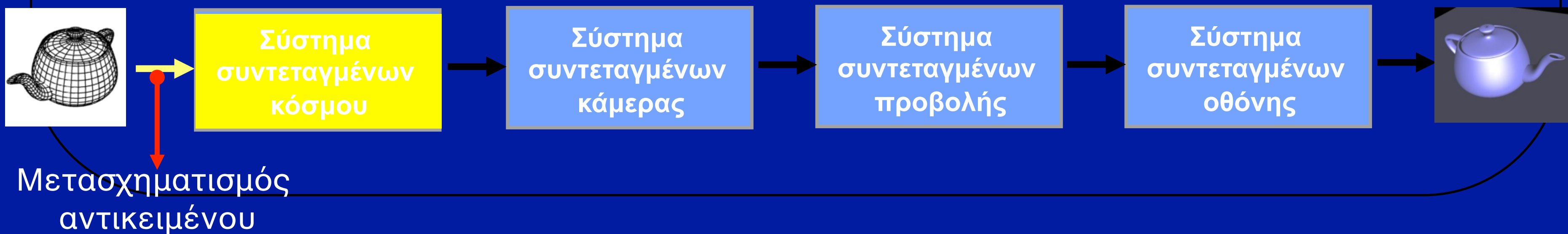


→ **Σύστημα συντεταγμένων κόσμου** → **Σύστημα συντεταγμένων κάμερας** → **Σύστημα συντεταγμένων προβολής** → **Σύστημα συντεταγμένων οθόνης** →

Σύστημα συντεταγμένων κόσμου

Το Σύστημα συντεταγμένων κόσμου (world space) είναι ένα καθολικό σύστημα που περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα της σκηνής τοποθετημένα στις αντίστοιχες θέσεις τους. Κάθε αντικείμενο μεταφέρεται στο σύστημα αυτό με ένα μετασχηματισμό αντικειμένου (model transform).



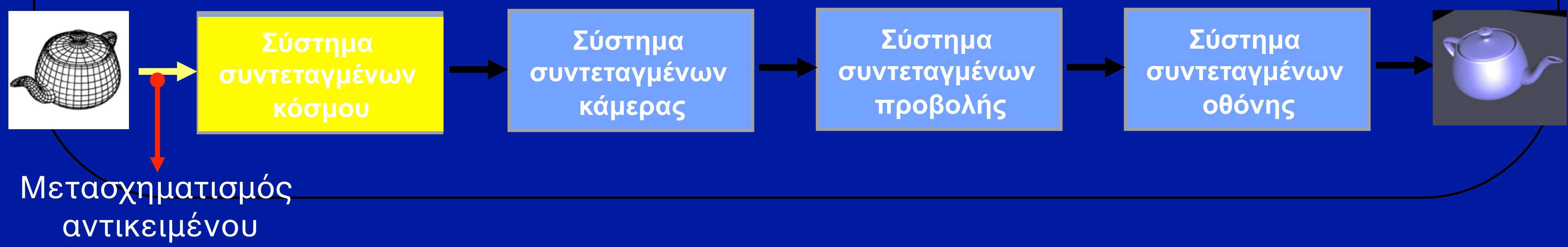


Σύστημα συντεταγμένων κόσμου

Για να μεταφέρουμε ένα αντικείμενο στο σύστημα συντεταγμένων κόσμου (να το τοποθετήσουμε στην σκηνή μας δηλαδή) χρησιμοποιούμε μια σειρά βασικών μετασχηματισμών όπως περιστροφές, μετακινήσεις, κλίμακα κλπ.

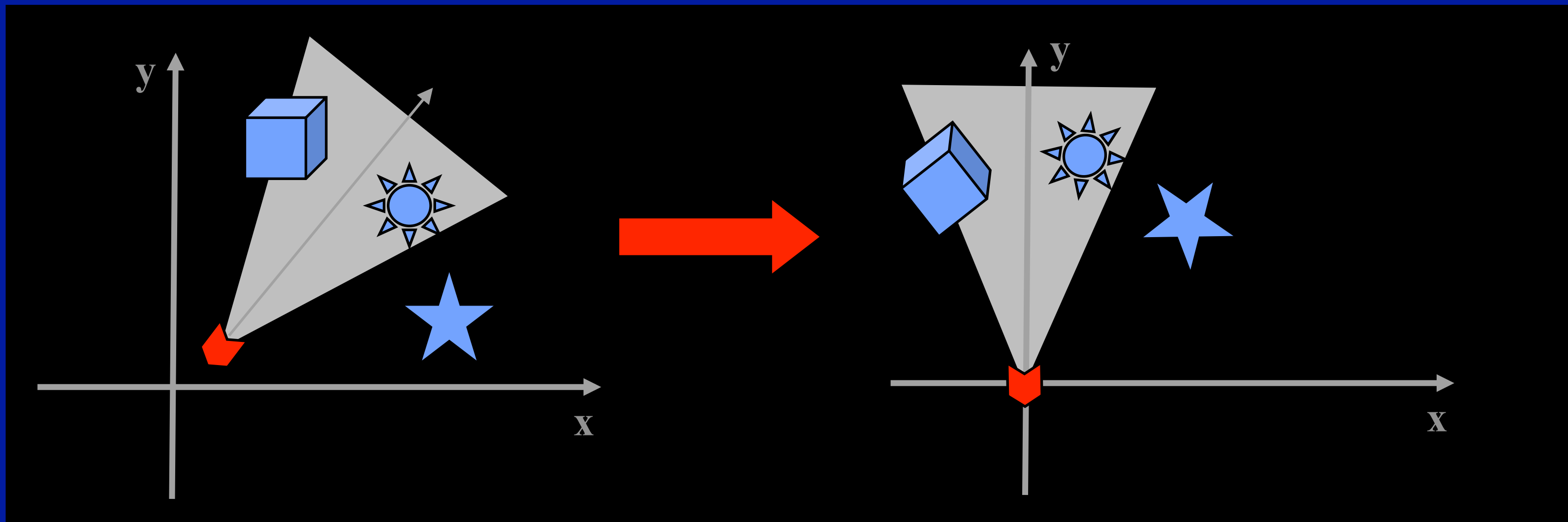
$$\text{πχ } P_w = T(t)R_x(\varphi)R_y(\theta)\ P$$

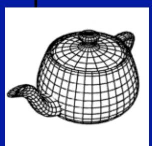
Κατά κανόνα, ο μετασχηματισμός αντικειμένου είναι μοναδικός για κάθε αντικείμενο (πχ κάθε αντικείμενο έχει διαφορετική θέση και κατεύθυνση)



Σύστημα συντεταγμένων κάμερας

Η κάμερα είναι ένα αντικείμενο στην σκηνή με θέση και κατεύθυνση. Για να κάνουμε την «φωτογράφηση» της σκηνής ευκολότερη, μεταφέρουμε όλα τα αντικείμενα της σκηνής στο σύστημα συντεταγμένων της κάμερας στο οποίο η κάμερα είναι στην αρχή τον αξόνων και να δείχνει προς έναν άξονα. Κάθε αντικείμενο μεταφέρεται στο σύστημα αυτό με ένα μετασχηματισμό κάμερας (camera/view transform).





Σύστημα συντεταγμένων κόσμου → Σύστημα συντεταγμένων κάμερας → Σύστημα συντεταγμένων προβολής → Σύστημα συντεταγμένων οθόνης

Μετασχηματισμός κάμερας

Σύστημα συντεταγμένων κάμερας

Πώς μεταφέρουμε όλα τα αντικείμενα της σκηνής στο σύστημα συντεταγμένων της κάμερας; Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό που χρησιμοποιήσαμε για να τοποθετήσουμε την κάμερα στο σύστημα συντεταγμένων κόσμου (σκηνή)

- Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιήσαμε τον μετασχηματισμό

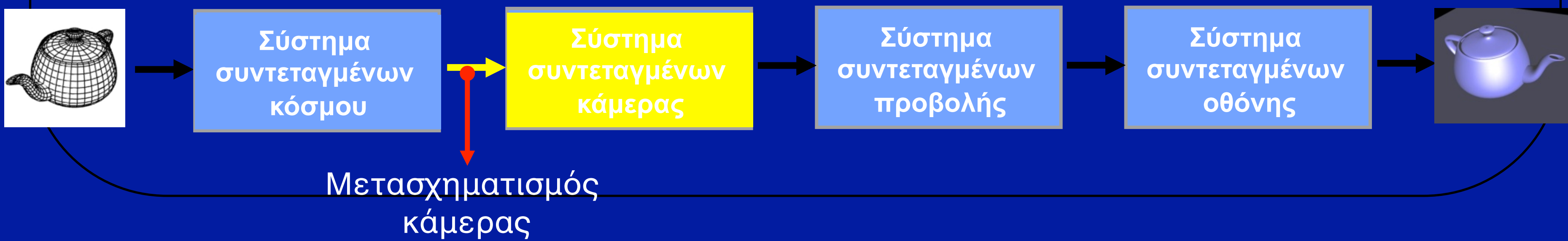
$M = T_{xyz}R_zR_yR_x$

- Ο αντίστροφος θα είναι

$M^{-1} = R_x^{-1}R_y^{-1}R_z^{-1}T_{xyz}^{-1}$

- Μετασχηματίζοντας την κάμερα με τον πίνακα αυτό θα την τοποθετήσουμε στην αρχή των αξόνων.

Μαζί με την κάμερα, μετασχηματίζουμε και ΟΛΑ τα αντικείμενα της σκηνής. Έτσι οι σχετικές αποστάσεις και γωνίες των αντικειμένων με την κάμερα διατηρούνται. Ο μετασχηματισμός κάμερας είναι ο ίδιος για όλα τα αντικείμενα.



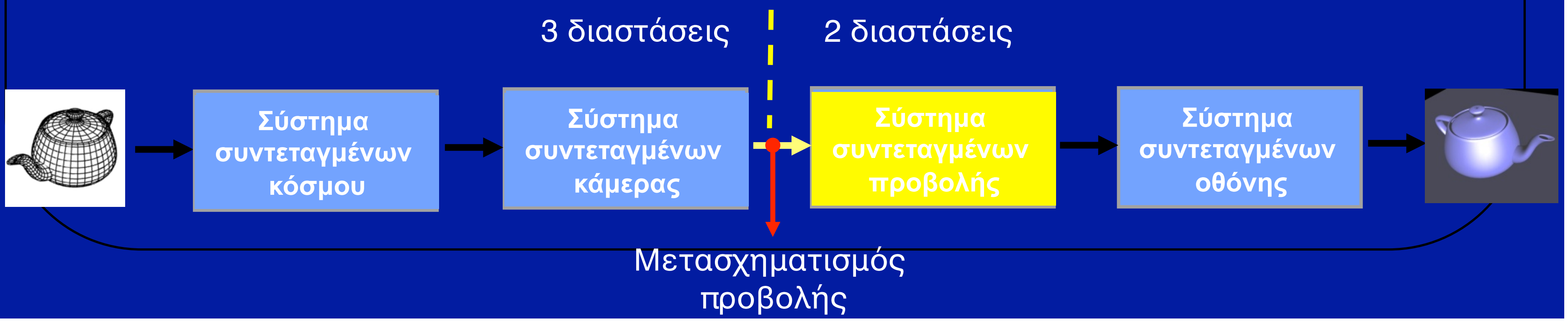
Μετασχηματισμός Προβολής

Μέχρι στιγμής όλοι οι μετασχηματισμοί που εφαρμόσαμε στη σκηνή μας επέστρεφαν τα σημεία (vertices) στις 3 διαστάσεις.

Με τον μετασχηματισμό προβολής (projection transform) προβάλλουμε τα σημεία στο διδιάστατο επίπεδο ώστε να σχηματίσουμε την τελική εικόνα.

Χρησιμοποιούμε συνήθως 2 ειδών μετασχηματισμούς προβολής

- Την ορθογραφική προβολή (orthographic projection)
  - Οι παράλληλες γραμμές παραμένουν παράλληλες.
  - Η αναλογία μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων διατηρείται
- Την προβολή με προοπτική (perspective projection)
  - Τα μακρινά αντικείμενα φαίνονται πιο μικρά
  - Οι παράλληλες γραμμές συγκλίνουν σε ένα σημείο φυγής

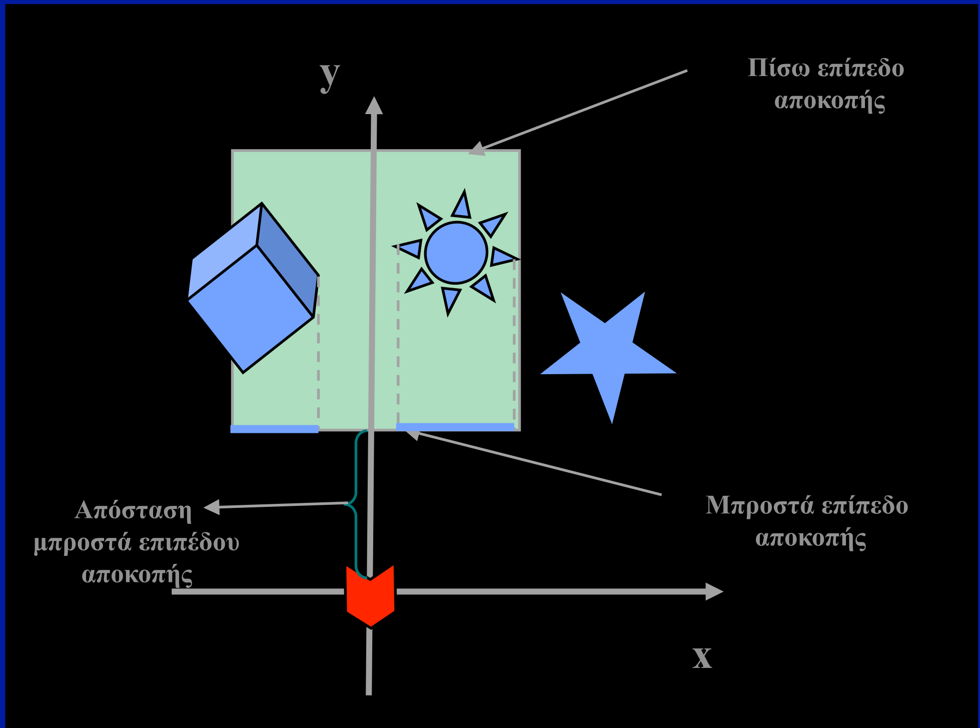


Μετασχηματισμός Προβολής

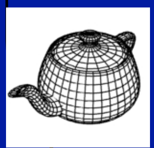
- Ορθογραφική προβολή (orthographic projection)
  - Δεν φαίνεται ρεαλιστικό το αποτέλεσμα
  - Κατάλληλο για ακριβής μετρήσεις μήκους ευθύγραμμων τμημάτων
  - Χρησιμοποιείται για αρχιτεκτονικά σχέδια (και μερικά παλιά παιχνίδια)
- Προβολή με προοπτική (perspective projection)
  - Μιμείται τον τρόπο που βλέπει το ανθρώπινο μάτι (αντικείμενα που είναι πιο μακριά φαίνονται πιο μικρά)
  - Παράλληλες γραμμές συγκλίνουν
  - Περισσότερο ρεαλιστική απεικόνιση
  - Χρησιμοποιείται σε σχεδόν όλες τις εφαρμογές τριδιάστατων γραφικών

Μετασχηματισμός Προβολής

Η ορθογραφική κάμερα από κοντά



- Μπροστά επίπεδο αποκοπής: Ότι βρίσκεται μπροστά από αυτό δεν θα συμπεριληφθεί στην σκηνή
- Πίσω επίπεδο αποκοπής: Ότι βρίσκεται πίσω από αυτό δεν θα συμπεριληφθεί στην σκηνή.
- Τα δυο αυτά επίπεδα αποκοπής μαζί με τα τμήματα που τα ενώνουν ορίζουν το χώρο που «βλέπει» η κάμερα.
- Η προβολή στο μπροστά επίπεδο αποκοπής γίνεται με απλή απαλοιφή της z συντεταγμένης

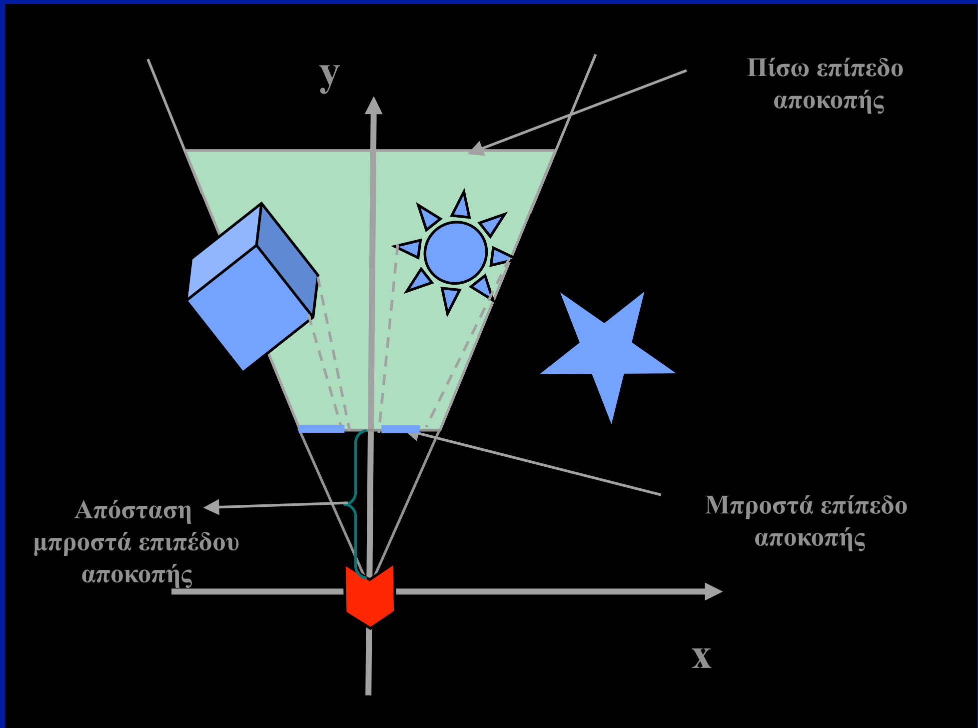


Σύστημα συντεταγμένων κόσμου → Σύστημα συντεταγμένων κάμερας → Σύστημα συντεταγμένων προβολής → Σύστημα συντεταγμένων οθόνης

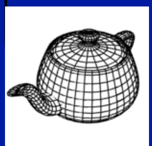
Μετασχηματισμός προβολής

Μετασχηματισμός Προβολής

Η προοπτική κάμερα από κοντά



- Μπροστά επίπεδο αποκοπής: Ότι βρίσκεται μπροστά από αυτό δεν θα συμπεριληφθεί στην σκηνή
- Πίσω επίπεδο αποκοπής: Ότι βρίσκεται πίσω από αυτό δεν θα συμπεριληφθεί στην σκηνή.
- Τα δυο αυτά επίπεδα αποκοπής μαζί με τα τμήματα που τα ενώνουν ορίζουν το χώρο που «βλέπει» η κάμερα (view frustum).
- Η προβολή στο εμπρός επίπεδο αποκοπής γίνεται με διαίρεση των συντεταγμένων κάθε σημείου με το z

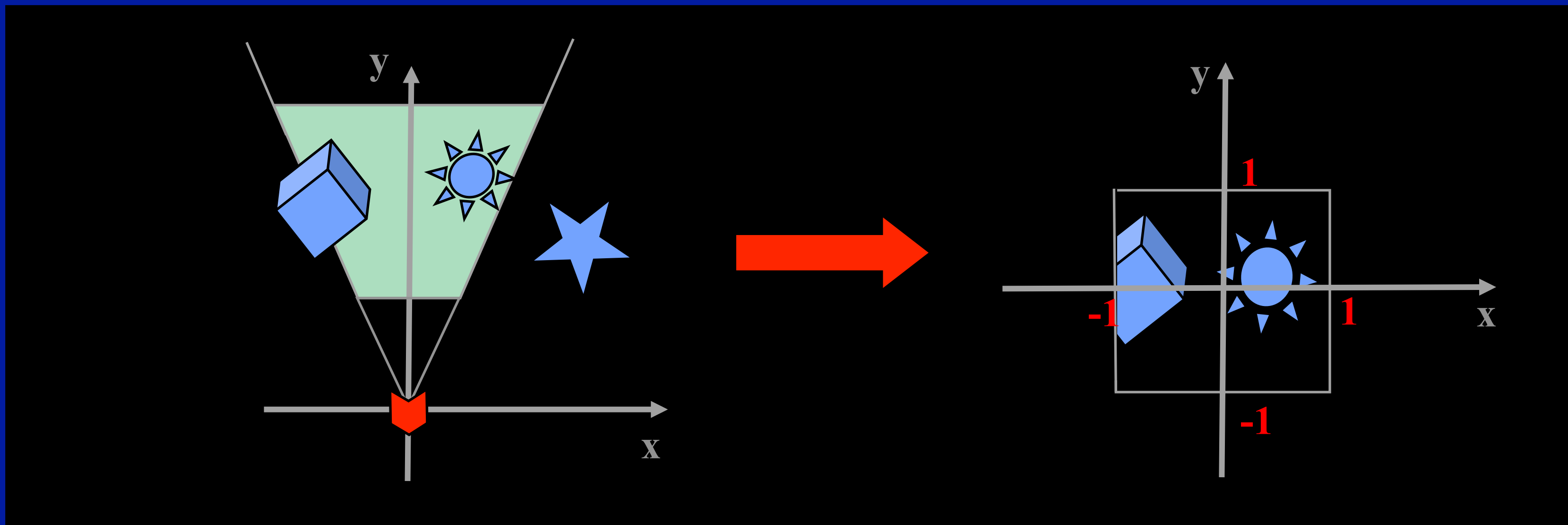


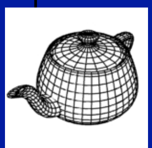
Σύστημα συντεταγμένων κόσμου → Σύστημα συντεταγμένων κάμερας → Σύστημα συντεταγμένων προβολής → Σύστημα συντεταγμένων οθόνης →

Μετασχηματισμός προβολής

Μετασχηματισμός Προβολής

Για να διευκολυνθεί η διαγραφή τμημάτων της σκηνής που δεν είναι ορατά από την κάμερα, το οπτικό πεδίο της κάμερας (frustum) προβάλλεται σε ένα κανονικοποιημένο κύβο με ακμή μήκους 2 τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων (αυτό γίνεται και με την ορθογραφική κάμερα)





Σύστημα συντεταγμένων κόσμου → Σύστημα συντεταγμένων κάμερας → Σύστημα συντεταγμένων προβολής → Σύστημα συντεταγμένων οθόνης

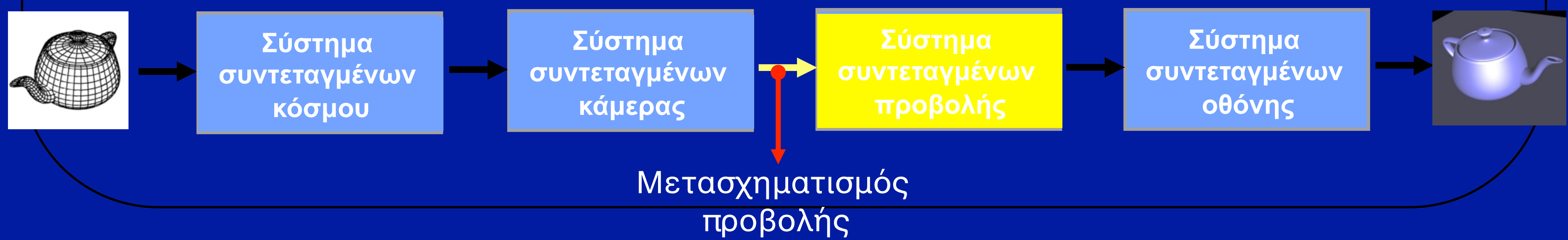
Μετασχηματισμός προβολής

Μετασχηματισμός Προβολής

Τι γίνεται με την z συντεταγμένη (βάθος σκηνής);

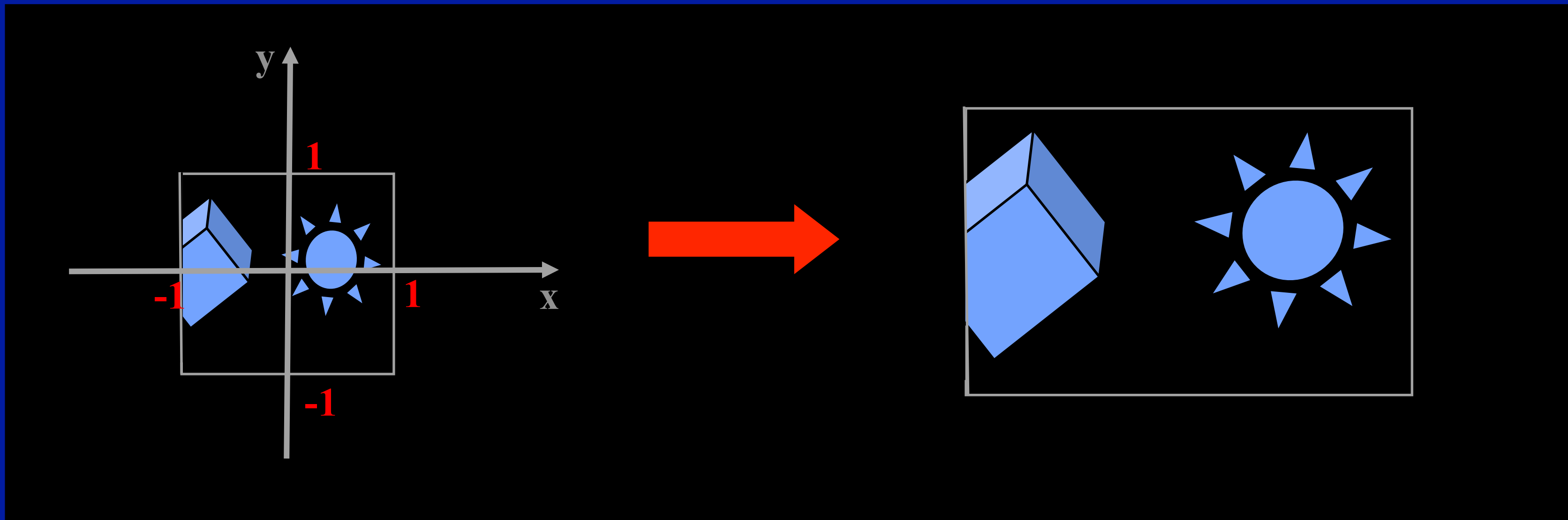
- Το βάθος σκηνής κάθε σημείου είναι μια πολύ σημαντική παράμετρος που διατηρούμε κατά τον μετασχηματισμό προβολής.

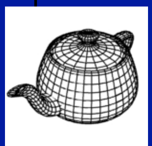
- Αργότερα θα το χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τη σειρά που πρέπει να ζωγραφίσουμε κάθε pixel στην οθόνη ώστε να έχουμε σωστή επικάλυψη.



Σύστημα συντεταγμένων οθόνης

Ο τελευταίος μετασχηματισμός στην ουρά παίρνει την 2διάστατη κανονικοποιημένη εικόνα από το προηγούμενο βήμα, την μετακινεί και αλλάζει την κλίμακα ώστε να χωράει σε ένα δεδομένο παράθυρο στην οθόνη (viewport)





Σύστημα συντεταγμένων κόσμου → Σύστημα συντεταγμένων κάμερας → Σύστημα συντεταγμένων προβολής → Σύστημα συντεταγμένων οθόνης →

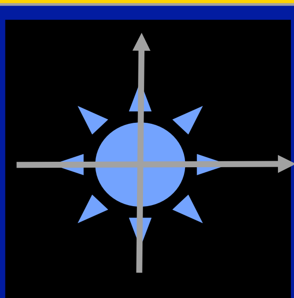
Μετασχηματισμός οθόνης

Περιληπτικά

Σύστημα συντεταγμένων αντικειμένου → **Σύστημα συντεταγμένων κόσμου** → **Σύστημα συντεταγμένων κάμερας** → **Σύστημα συντεταγμένων προβολής** → **Σύστημα συντεταγμένων οθόνης**

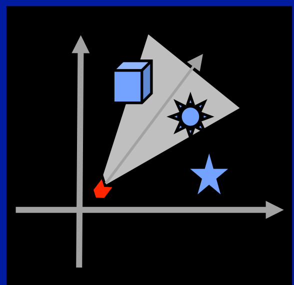
Σύστημα συντεταγμένων αντικειμένου

Το μοντέλο μας στο χώρο του, μη μετασχηματισμένο



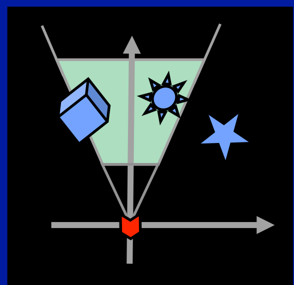
Σύστημα συντεταγμένων κόσμου

Το μοντέλο μας στη σκηνή με την σωστή τοποθεσία και κατεύθυνση



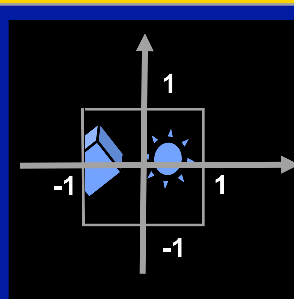
Σύστημα συντεταγμένων κάμερας

Το μοντέλο μας στο χώρο της κάμερας, στο οπτικό της πεδίο



Σύστημα συντεταγμένων προβολής

Το μοντέλο μας στον κανονικοποιημένο κύβο



Σύστημα συντεταγμένων οθόνης

Το μοντέλο μας στο παράθυρο της οθόνης σε 2 διαστάσεις