Digital Signal Processing Laboratory
Department of Electrical & Computer Engineering

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εργαστήριο 4

Δειγματοληψία

Ηράκλειο 2025

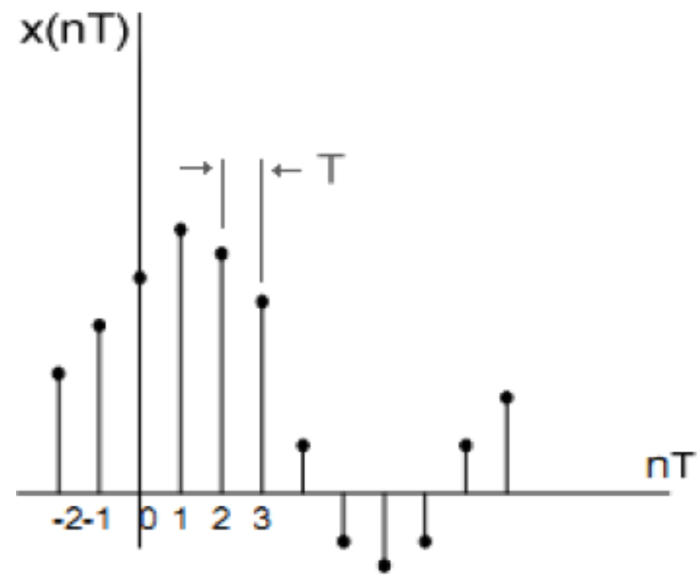
Δρ. Κωνσταντίνος Καραμπίδης

Δειγματοληψια

Με την διαδικασία της δειγματοληψίας μπορούμε να μετατρέψουμε ένα αναλογικό σήμα σε ψηφιακό.

Κατά την δειγματοληψία λαμβάνουμε τιμές (από το αναλογικό σήμα) ανά τακτά χρονικά διαστήματα T τις οποίες τις ονομάζουμε δείγματα.

x(n) = x(nT) όπου το T
είναι η περίοδος δειγματοληψίας



Δειγματοληψια

Το βασικό ερώτημα είναι το πόσο συχνά θα πρέπει να λαμβάνουμε ένα δείγμα;
Η συχνότητα δειγματοληψίας: Fs = 1/Ts

Ένα αναλογικό σήμα x(t) με φάσμα περιορισμένου εύρους ($<F_o$) μπορεί να ανακατασκευασθεί από τα δείγματα του x(n)=x(nTs), αν η συχνότητα δειγματοληψίας Fs=1/Ts είναι διπλάσια του εύρους F_0, **$F_s \geq 2F_0$.**

Σε κάθε άλλη περίπτωση υπάρχει αλλοίωση του φάσματος (aliasing) και το σήμα δεν μπορεί να ανακατασκευασθεί.

Στο διακριτό σήμα x(n) που προκύπτει αποφεύγονται οι επικαλύψεις στη συχνότητα οπότε είναι εφικτή η ανακατασκευή του αρχικού σήματος.

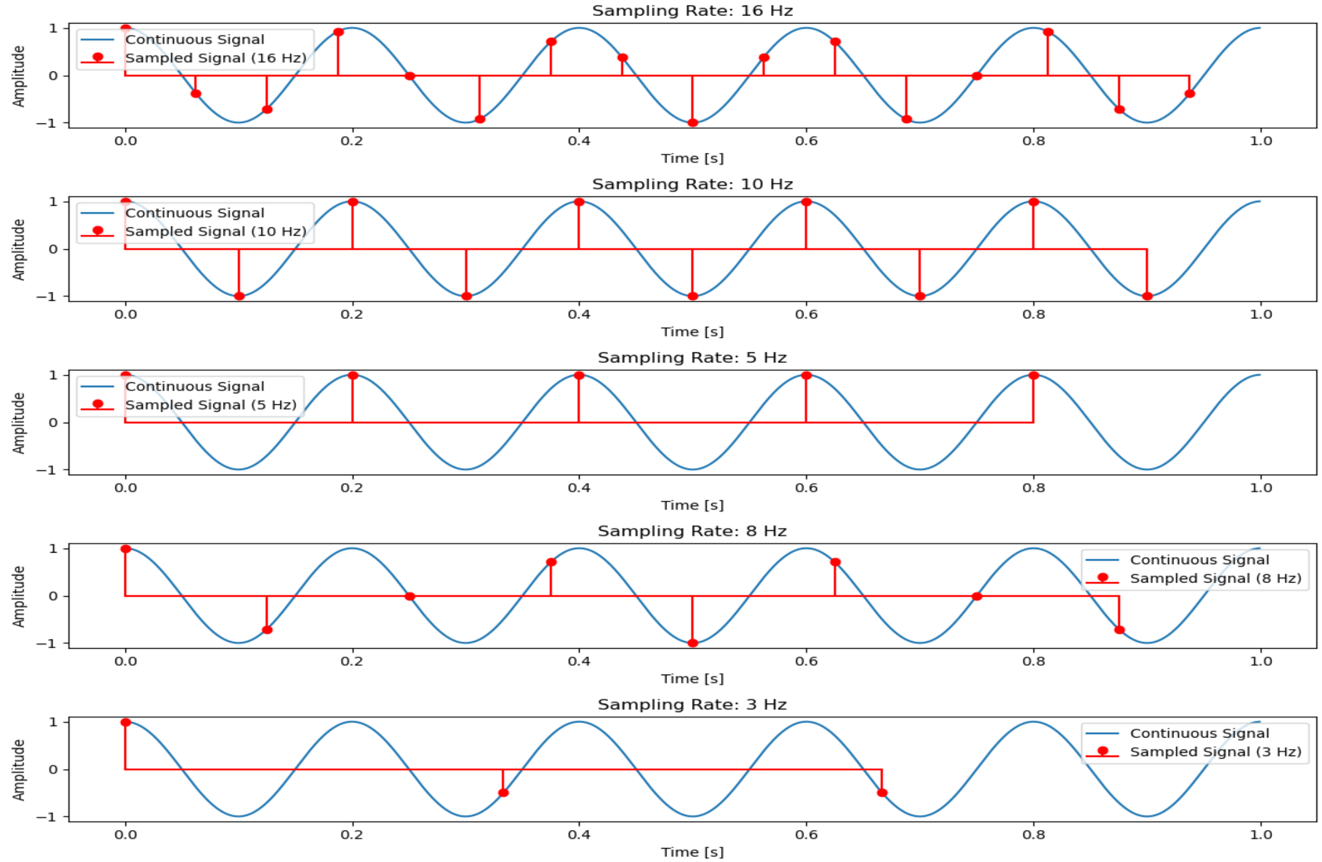
Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $2F_0$ ονομάζεται ρυθμός Nyquist (Nyquist Rate).

Τυπικές συχνότητες δειγματοληψίας για συνήθη σήματα

Τύπος Σήματος	**Μέγιστη Συχνότητα Σήματος**	**Συχνότητα δειγματοληψίας**
Γεωφυσικά	500Hz	1KHz
Βιοϊατρικά	1KHz	2KHz
Μηχανικά	2KHz	4KHz
Φωνή	4KHz	8KHz
Ήχος (audio)	20KHz	40KHz
Εικόνα (video)	4MHz	8MHz

Παράδειγμα 1

Έστω σήμα με μέγιστη συχνότητα 5Hz. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η αναπαράσταση του σήματος για διαφορετική συχνότητα δειγματοληψίας.

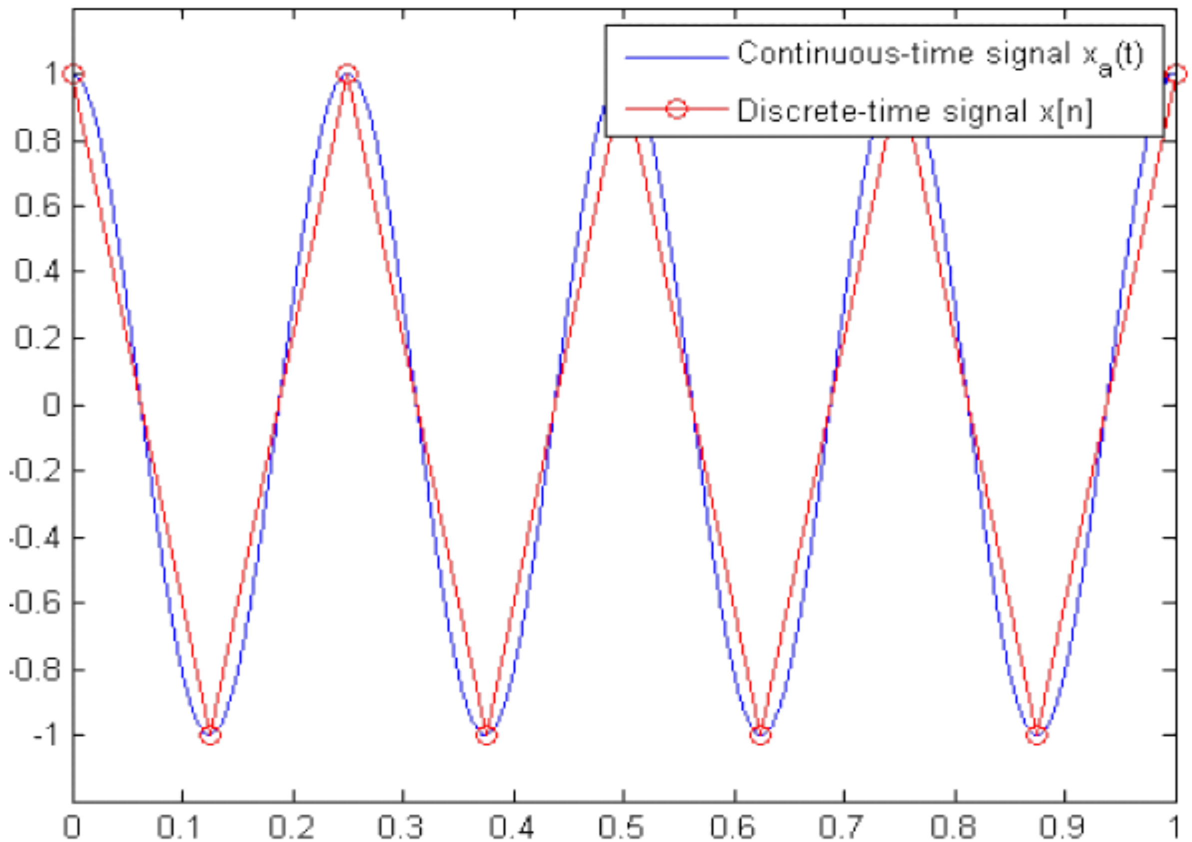


Παράδειγμα 2

Αναλογικό σήμα:

$X_a(t) = \cos(2\pi f t)$;
όπου f=4Hz, t=[0,1]

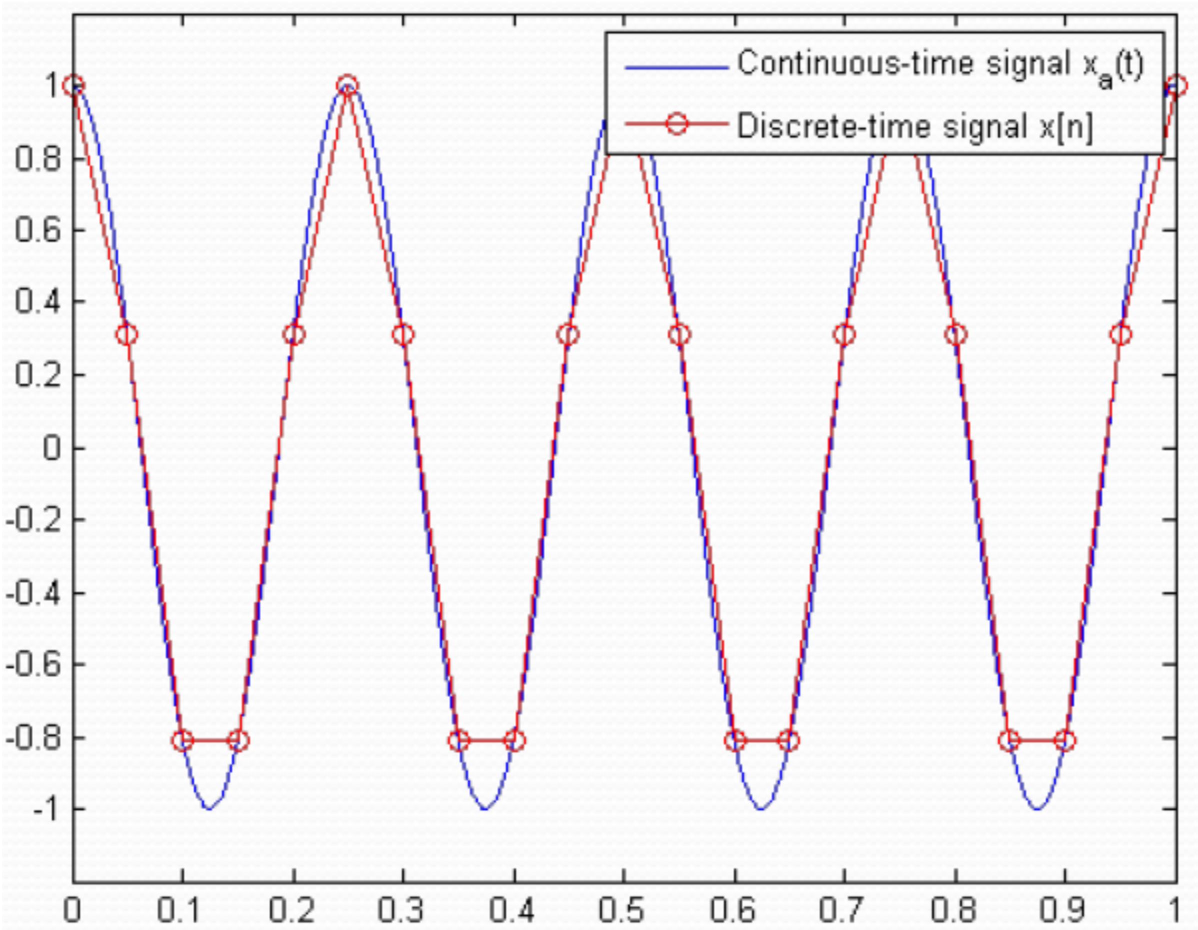
Δειγματοληψία:
Ts = 0.125
Fs = 1/Ts = 8Hz



Παράδειγμα 3

$X_a(t) = \cos(2\pi ft)$;
Όπου f=4Hz, t=[0,1]

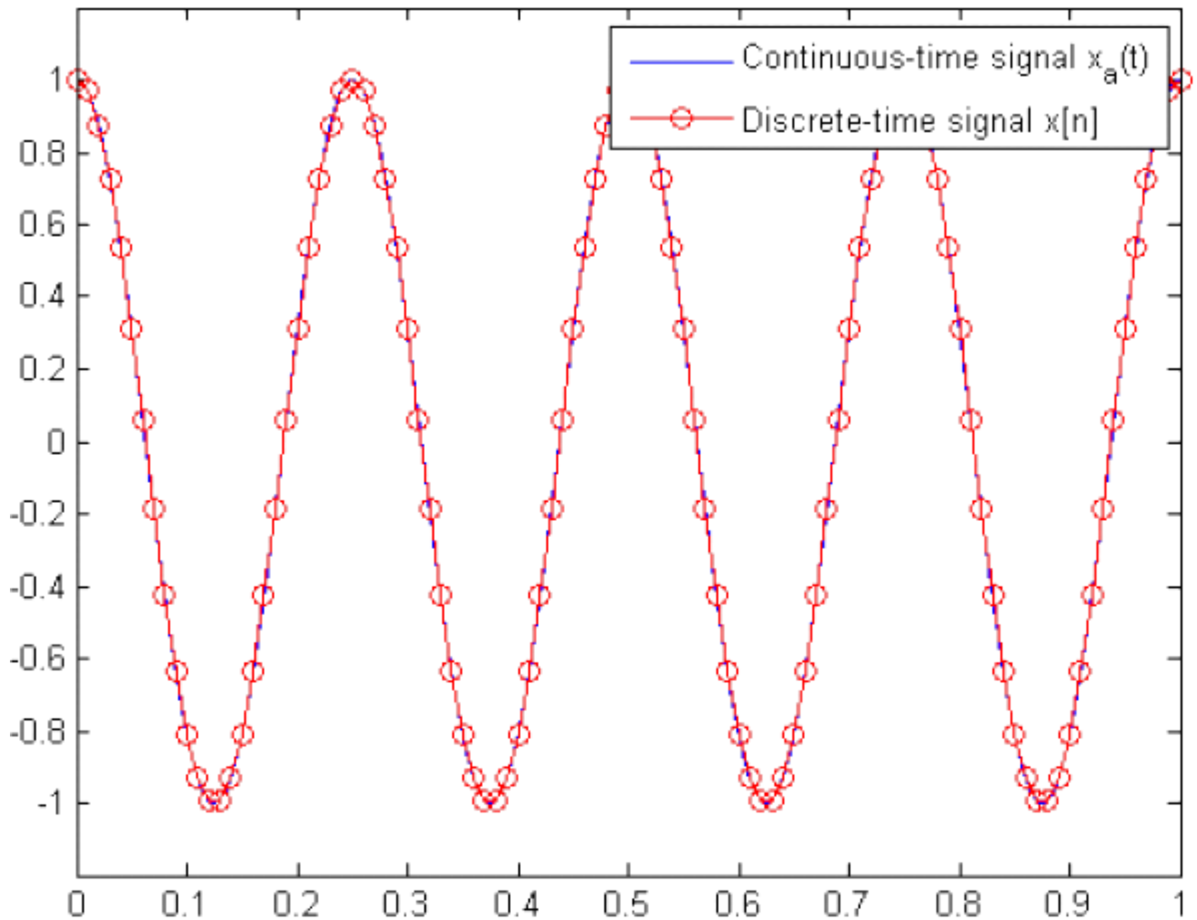
Δειγματοληψία:
Ts = 0.05
Fs = 1/Ts = 20Hz



Παράδειγμα 4

$X_a(t) = \cos(2\pi f t);$
Όπου f=4Hz, t=[0,1]

Δειγματοληψία:
Ts = 0.01
Fs = 1/Ts = 100Hz

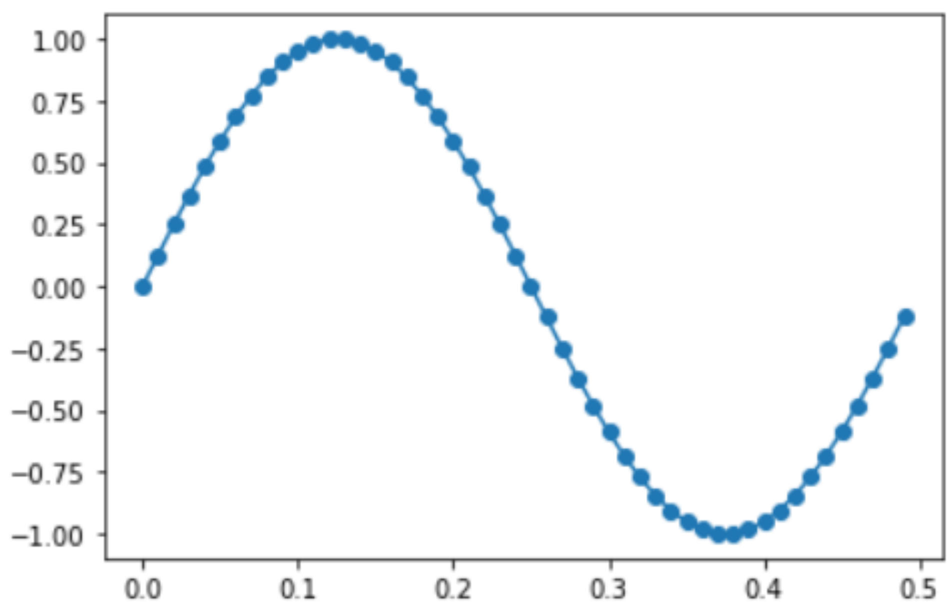


Άσκηση 1

Να κατασκευάσετε και να παραστήσετε γραφικά μία ακολουθία ημιτόνου 50 δειγμάτων, συχνότητας f=2Hz και περιόδου δειγματοληψίας T=0.01 sec (fs=100 δείγματα/sec).

Λύση

```
f = 2
t2=np.arange(0, 0.5, 0.01)
y2 = np.sin(2 * np.pi * f * t2)

plt.plot(t2, y2, 'o-')
plt.show()
```

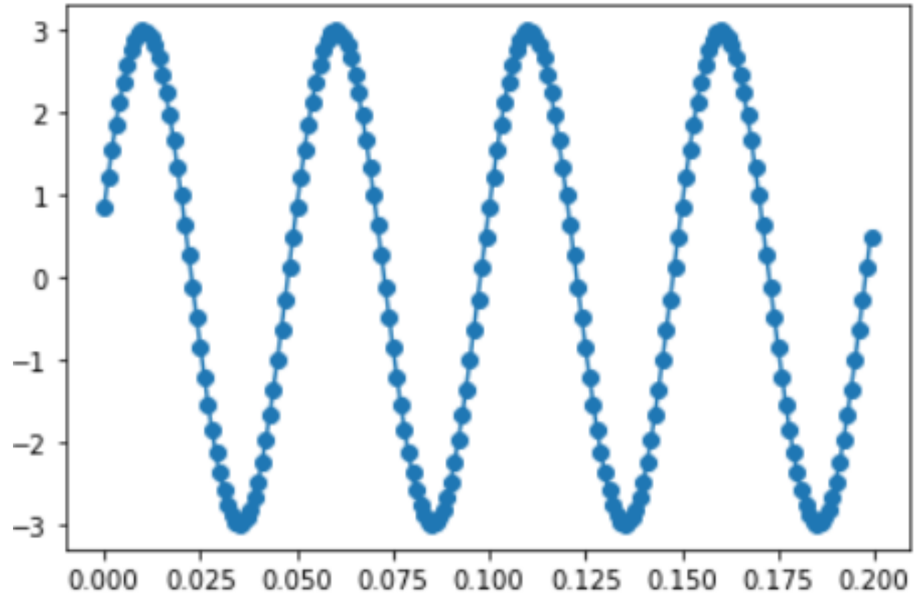


Άσκηση 2

Έστω ότι έχουμε το σήμα: y(t) = 3cos(40πt+5). Να γίνει δειγματοληψία του σήματος στα 0.5KHz και να παρουσιάσετε τα 200 πρώτα δείγματα του σήματος. Τι συχνότητας είναι το σήμα;

Λύση

```
t=np.arange(0, 0.2, 0.001)
y = 3*np.cos((40 * np.pi * t)+5)

plt.plot(t, y, 'o-')
plt.show()
```



Άσκηση 3

Έστω ότι έχουμε το σήμα:

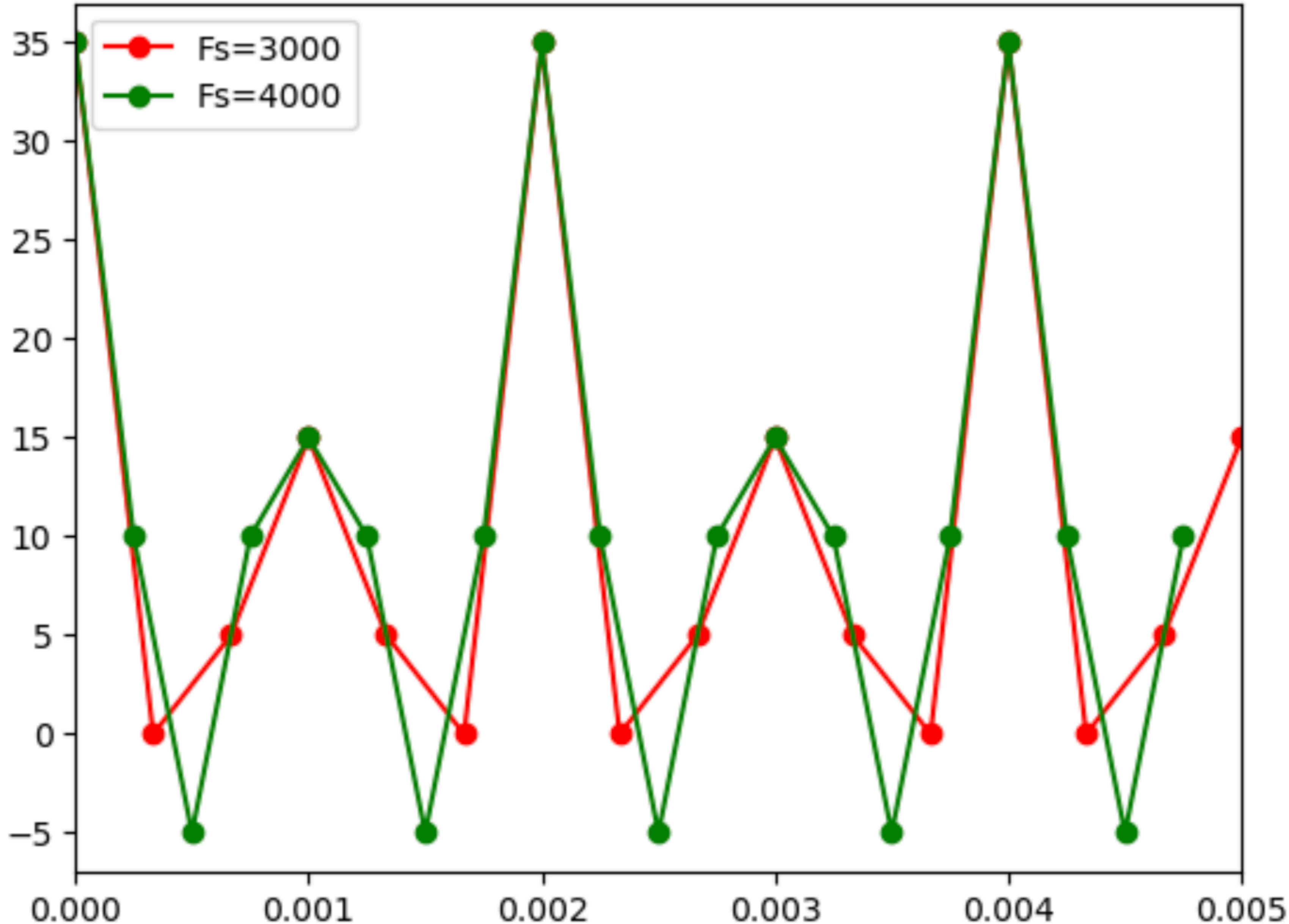
x(n) = 10 +5cos(1000πt) +15cos(2000πt) +5cos(3000πt)

Να βρεθεί η ελάχιστη δειγματοληπτική συχνότητα Nyquist Fs.

Λύση

```
Fs=3000;

Ts=1/Fs;

t=np.arange(0, 20*Ts, Ts)

x=10+5*np.cos(1000*np.pi*t)+15*np.cos(2000*np.pi*t)+5*np.cos(
3000*np.pi*t);
```

```
Fs2=4000;
Ts2=1/Fs2;
t2=np.arange(0, 20*Ts2, Ts2)
x2=10+5*np.cos(1000*np.pi*t2)+15*np.cos(2000*np.pi*t2)+5*np.
cos(3000*np.pi*t2);
plt.plot(t, x, 'ro-', label="Fs=3000")
plt.plot(t2, x2, 'go-', label="Fs=4000")
plt.legend()
plt.xlim([0, 0.005])
plt.show()
```


Fs=3000
Fs=4000
35
30
25
20
15
10
5
0
−5
0.000
0.001
0.002
0.003
0.004
0.005

Άσκηση 4

Με δεδομένο ένα σήμα συνημίτονου με μέγιστη συχνότητα F=1000Hz να σχεδιάσετε στο ίδιο σχήμα

α) το αρχικό σήμα

β) το σήμα που προκύπτει αν γίνει δειγματοληψία με συχνότητα i) μικρότερη του ρυθμού Nyquist ii) ίση με τον ρυθμό Nyquist iii) μεγαλύτερη του ρυθμού Nyquist

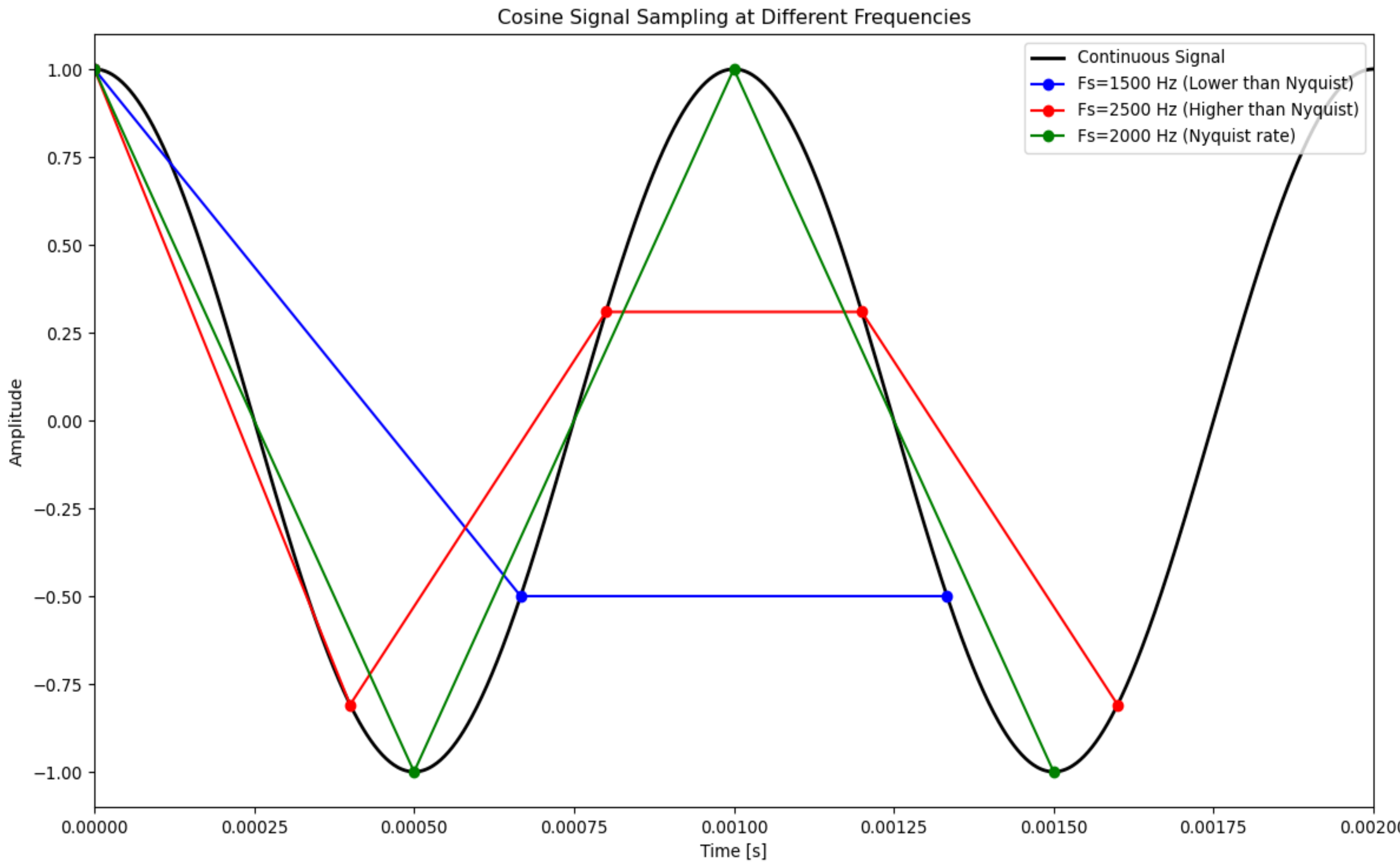
Λύση

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameters
F = 1000  # Frequency of the cosine wave
T = 1 / F

# Sampling rates (lower and higher than the Nyquist rate)
Fs1 = 1500  # Lower than Nyquist rate
Fs2 = 2500  # Higher than Nyquist rate
Fs3 = 2000  # Nyquist rate
```

```
# Sampling intervals
Ts1 = 1 / Fs1
Ts2 = 1 / Fs2
Ts3 = 1 / Fs3

# Time vectors
t_continuous = np.linspace(0, 2 * T, 1000, endpoint=False)
# Adjusted time vector to focus on a smaller portion
t1 = np.arange(0, 2 * T, Ts1)
t2 = np.arange(0, 2 * T, Ts2)
t3 = np.arange(0, 2 * T, Ts3)

# Cosine signals
x_continuous = np.cos(2 * np.pi * F * t_continuous)
```

```
x1 = np.cos(2 * np.pi * F * t1)
x2 = np.cos(2 * np.pi * F * t2)
x3 = np.cos(2 * np.pi * F * t3)

# Plotting
plt.figure(figsize=(14, 8))

plt.plot(t_continuous, x_continuous, 'k-', linewidth=2, label='Continuous Signal')
plt.plot(t1, x1, 'bo-', label='Fs=1500 Hz (Lower than Nyquist)')
plt.plot(t2, x2, 'ro-', label='Fs=2500 Hz (Higher than Nyquist)')
plt.plot(t3, x3, 'go-', label='Fs=2000 Hz (Nyquist rate)')

plt.legend(loc='upper right')
```

```
plt.xlim([0, 0.002])
plt.xlabel('Time [s]')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title('Cosine Signal Sampling at Different Frequencies')

# Save the plot as an image
plt.savefig('cosine_signal_sampling.png')

# Show the plot
plt.show()
```


Cosine Signal Sampling at Different Frequencies
Continuous Signal
Fs=1500 Hz (Lower than Nyquist)
Fs=2500 Hz (Higher than Nyquist)
Fs=2000 Hz (Nyquist rate)
Amplitude
Time [s]
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0.00000
0.00025
0.00050
0.00075
0.00100
0.00125
0.00150
0.00175
0.00200