Digital Signal Processing Laboratory
Department of Electrical & Computer Engineering

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εργαστήριο 6

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

Ηράκλειο 2025

Δρ. Κωνσταντίνος Καραμπίδης

Εισαγωγή

Με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z μπορούμε να υπολογίσουμε το σήμα διακριτού χρόνου x(n) όταν γνωρίζουμε το μετασχηματισμό Z αυτού, X(z).
Για να συμβολίσουμε αυτή την πράξη γράφουμε:

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$$

Υπολογισμός Αντίστροφου Μετασχηματισμού Z

Για να υπολογίσουμε την x(n) από την X(z) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις παρακάτω προσεγγίσεις:

- Ανάπτυξη σε Μερικά Κλάσματα
- Δυναμοσειρές
- Μιγαδική Ολοκλήρωση

Μια πρακτική προσέγγιση του υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Z είναι η ανάπτυξη σε άθροισμα μερικών κλασμάτων και στη συνέχεια η χρήση πινάκων με ήδη υπολογισμένους μετασχηματισμούς Z συνηθισμένων ακολουθιών.

Η συνάρτηση residuez

Με την συνάρτηση residuez μπορούμε να βρούμε τους κατάλληλους συντελεστές για να γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε άθροισμα μερικών κλασμάτων.

- ✓ Η συνάρτηση residuez δέχεται δύο ορίσματα, τους συντελεστές του αριθμητή (b) και του παρονομαστή (a) σε <u>φθίνουσα</u> τάξη του Z.
- ✓ Επιστρέφει τρεις πίνακες συντελεστών (r, p, k).

Η συνάρτηση residuez

residuez Z-transform partial-fraction expansion.

r,p,k = scipy.signal.residuez(b,a) finds the residues, poles and direct terms of the partial-fraction expansion of B(z)/A(z),

```
B(z)      r(1)                    r(n)
---- = -----------     +...  -----------     + k(1) + k(2)z^(-1) ...
A(z)   1-p(1)z^(-1)         1-p(n)z^(-1)
```

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς:

$$G(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1}$$

- Λύση:

b = [0, 1, 0]

a = [3, -4, 1]

r,p,k = scipy.signal.residuez(b,a)

Θα πάρουμε την έξοδο:

r = [0.5000 -0.5000]

p = [1.0000 0.3333]

k = [0]

Παράδειγμα 1

Αν αντικαταστήσουμε τώρα τα r, p, k που υπολογίσαμε στην σχέση

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{r(1)}{1-p(1)z^{\wedge}(-1)} + \ldots \frac{r(n)}{1-p(n)z^{\wedge}(-1)} + k(1) + k(2)z^{\wedge}(-1) \ldots$$

η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί:

$$G(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1} = 0.5\frac{1}{1-z^{-1}} - 0.5\frac{1}{1-0.333z^{-1}}$$

Παράδειγμα 1

$$G(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1} = 0.5\frac{1}{1 - z^{-1}} - 0.5\frac{1}{1 - 0.333z^{-1}}$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα γνωστών μετασχηματισμών Ζ βλέπουμε ότι:

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - z^{-1}}\right\} = 1^n u(n)$$ και $$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - 0.333z^{-1}}\right\} = 0.333^n u(n)$$

Επομένως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Ζ της G(z) είναι:

$$G(n) = 0.5u(n) - 0.5 \cdot 0.333^n u(n)$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Ζ της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{32z^2 + 4}{16z^2 + 12z + 2}$$

- Λύση

```
b = [32, 0, 4]
a = [16, 12, 2]

r,p,k = scipy.signal.residuez(b,a)
```

Θα πάρουμε την έξοδο:

r = [6 -6]

p = [-0.5 -0.25]

k = [2]

Παράδειγμα 2

Χρησιμοποιώντας τα r, p και k θα έχουμε το άθροισμα μερικών κλασμάτων:

$$H(z) = \frac{6}{1+0.5z^{-1}} - \frac{6}{1+0.25z^{-1}} + 2$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα γνωστών μετασχηματισμών Z θα έχουμε:

$$Z^{-1}\{H(z)\} = H(n) = 6\cdot(-0.5)^n u(n) - 6\cdot(-0.25)^n u(n) + 2\delta(n)$$

Σημείωση: Αν για παράδειγμα είχαμε k=[2, 4, 1], τότε

$H(z) = \cdots + 2 + 4z^{-1} + z^{-2}$

$H(n) = \cdots + 2\delta(n) + 4\delta(n-1) + \delta(n-2)$

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{18z^3}{18z^3 + 3z^2 - 4z - 1}$$

- Λύση:

```
b = [18, 0, 0, 0]

a = [18, 3, -4, -1]

r,p,k = scipy.signal.residuez(b,a)
```

Θα πάρουμε την έξοδο:

r = [0.36 0.24 0.4]

p = [0.5 $\boxed{-0.33}$ $\boxed{-0.33}$]

k = [0]

Παράδειγμα 3

Αν στον πίνακα p έχουμε παραπάνω από ένα ίδιο πόλο (*όπως στην άσκηση μας που έχουμε 2 φορές το -0.333*) τότε αυτοί οι όροι θα πρέπει να γραφούν όπως φαίνεται παρακάτω.

```
     R(j)                 R(j+1)                       R(j+m-1)
 -------------    + -----------------     + ... +  -----------------
 1 - P(j)z^(-1)    (1 - P(j)z^(-1))^2               (1 - P(j)z^(-1))^m
```

όπου P(j) = ... = P(j+m-1) είναι πόλος πληθικότητας m.
Επομένως θα έχουμε :

$$H(z) = 0.36\frac{1}{1-0.5z^{-1}} + 0.24\frac{1}{1+0.33z^{-1}} + 0.4\frac{1}{\left(1+0.33z^{-1}\right)^2}$$

Παράδειγμα 3

$$H(z) = 0.36\frac{1}{1-0.5z^{-1}} + 0.24\frac{1}{1+0.33z^{-1}} + 0.4\frac{1}{\left(1+0.33z^{-1}\right)^2}$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα γνωστών μετασχηματισμών Z βλέπουμε ότι:

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\right\} = 0.5^n u(n) \quad \text{και} \quad Z^{-1}\left\{\frac{1}{1+0.33z^{-1}}\right\} = -0.33^n u(n)$$

Το κλάσμα που απομένει θυμίζει τον 5ο Μ.Ζ. από τον πίνακα γνωστών ακολουθιών, άρα:

$$\frac{1}{\left(1+0.33z^{-1}\right)^2} = \frac{1}{-0.33z^{-1}} \cdot \frac{-0.33z^{-1}}{\left(1+0.33z^{-1}\right)^2} = \frac{1}{-0.33} \cdot z \cdot \frac{-0.33z^{-1}}{\left(1+0.33z^{-1}\right)^2}$$

Άρα: $z^{-1}\left\{\dfrac{-0.33z^{-1}}{\left(1+0.33z^{-1}\right)^2}\right\} = n(-0.33)^n u(n)$

Όμως παρατηρούμε ότι έχει απομείνει ένα “z” στην προηγούμενη σχέση.

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα μετατόπισης: $x(n-n_0) \overset{Z}{\leftrightarrow} z^{-n_0} X(z$

$$\frac{1}{-0.33}\cdot z\cdot\frac{-0.33z^{-1}}{\left(1+0.33z^{-1}\right)^2} = \frac{1}{-0.33}\cdot z^{-(-1)}X(z)$$

Άρα βλέπουμε ότι **n_0 = -1**, αυτό σημαίνει ότι ο όρος $n(-0.33)^n u(n)$ θα γίνει $(n+1)(-0.33)^{n+1}u(n+1)$

Έτσι τελικά η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$H(n) = 0.36\cdot 0.5^n u(n) + 0.24(-0.33)^n u(n) - \frac{0.4}{0.33}(n+1)(-0.33)^{n+1}u(n+1)$$

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς:

$$X(z) = \frac{z^2}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2}$$

- Λύση:

b = [0, 1, 0, 0]

a = [1, -4, 5, -2]

r,p,k = scipy.signal.residuez(b,a)

Θα πάρουμε την έξοδο:

```
r =
  2.0000
 -1.0000 - 0.0000i
 -1.0000 + 0.0000i

p =
  2.0000
  1.0000 + 0.0000i
  1.0000 - 0.0000i

k =
   0
```

Παράδειγμα 4

- Άρα χρησιμοποιώντας τα r, p και k θα έχουμε το άθροισμα μερικών κλασμάτων:

$$X(z) = \frac{2}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)^2} = \frac{2}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}} - z \cdot \frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

- Χρησιμοποιώντας τον πίνακα γνωστών μετασχηματισμών Ζ θα έχουμε:

$$x(n) = 2 \cdot 2^n u(n) - u(n) - (n+1) \cdot u(n+1)$$