Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εργαστήριο 3

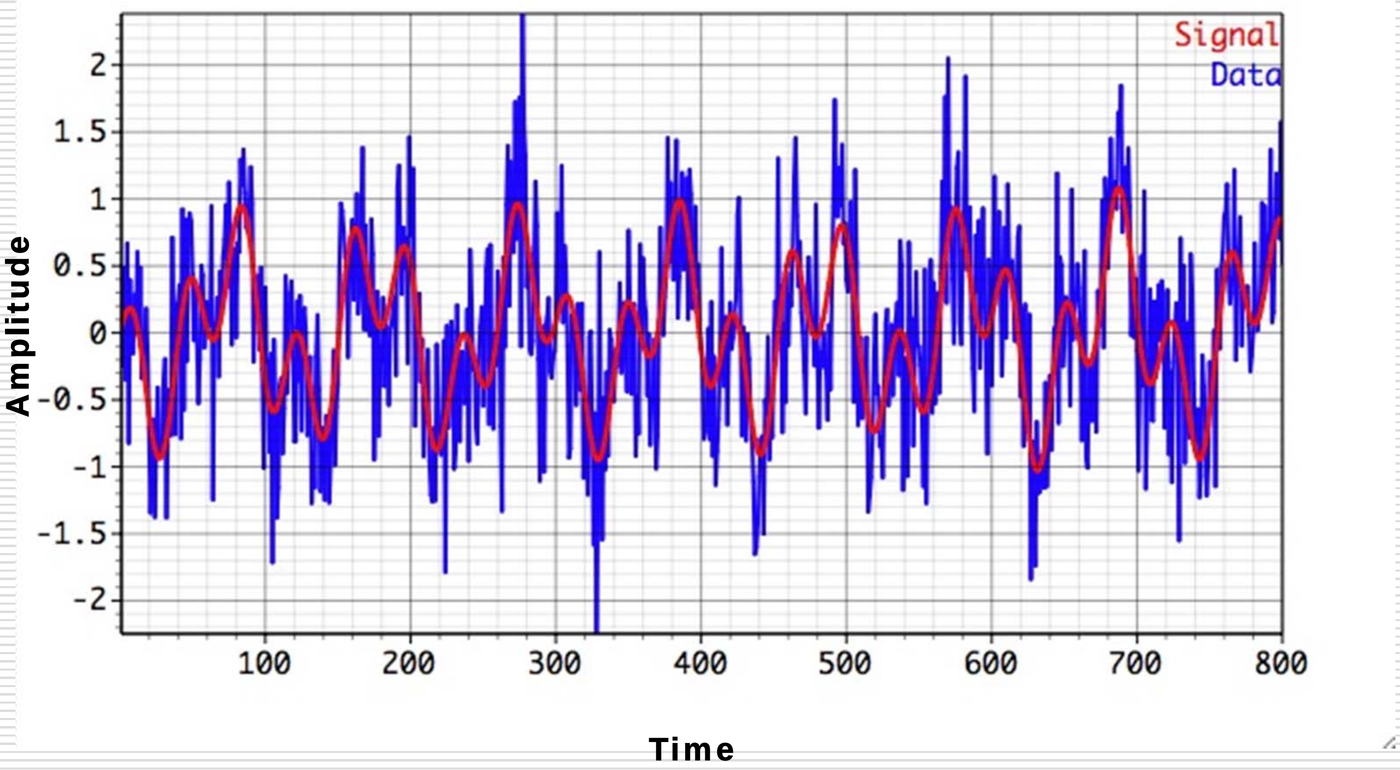
Εισαγωγή στα Σήματα

Αλέξανδρος Μανουσάκης

Τι είναι σήμα;

- Ως **σήμα** ορίζουμε το σύνολο των τιμών που λαμβάνει μια ποσότητα (εξαρτημένη μεταβλητή) όταν αυτή μεταβάλλεται συναρτήσει άλλων ποσοτήτων (ανεξάρτητες μεταβλητές).
- Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως συνάρτηση ή ακολουθία μιας ή περισσοτέρων ανεξάρτητων μεταβλητών.
- Τα σήματα περιέχουν πληροφορία σχετικά με την συμπεριφορά ή τη φύση ενός φαινομένου.

Ένα παράδειγμα σήματος



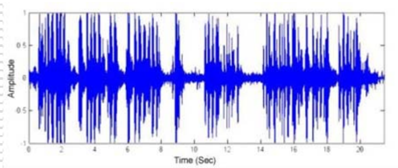
Εξαρτημένη μεταβλητή

Ανεξάρτητη μεταβλητή

Διαστάσεις Σημάτων

- Ανάλογα με το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών έχουμε σήματα μιας μεταβλητής ή διάστασης (μονοδιάστατα, 1-D), δύο μεταβλητών ή διαστάσεων (δισδιάστατα, 2-D) και πολλών μεταβλητών ή διαστάσεων (πολυδιάστατα, N-D).

- Η ομιλία, η μουσική, η μεγίστη ημερήσια θερμοκρασία είναι παραδείγματα **μονοδιάστατων σημάτων**, όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος.



- Μια εικόνα (φωτογραφία) αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα **σήματος δύο διαστάσεων**. Η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η φωτεινότητα της εικόνας και οι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι δύο χωρικές συντεταγμένες.

- **Σήμα τριών διαστάσεων** μπορεί να είναι η ακολουθία εικόνων (video), όπου οι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι χωρικές συντεταγμένες και η τρίτη είναι ο χρόνος.

Είδη Σημάτων

Κάθε χρονική στιγμή *t* (ανεξάρτητη μεταβλητή) υπάρχει μία μοναδική τιμή της συνάρτησης (εξαρτημένη μεταβλητή).

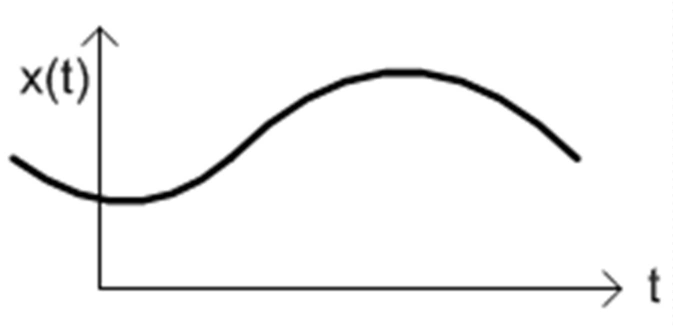
Η ανεξάρτητη μεταβλητή *t* μπορεί να είναι:

- **συνεχής** (αναλογικό σήμα – analog signal)
- **διακριτή** (διακριτό σήμα– discrete signal)

Αναλογικό σήμα

Ένα αναλογικό σήμα είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου

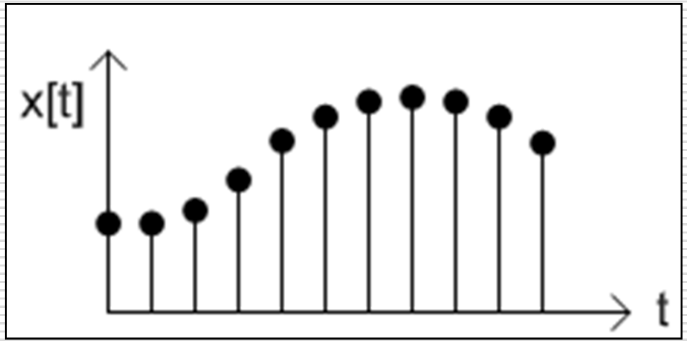
- Αναλογικά σήματα δημιουργούνται όταν μία φυσική κυματομορφή (όπως π.χ. φωνή ή μουσική) μετατρέπεται σε ηλεκτρικό σήμα. (για παράδειγμα το μικρόφωνο μετατρέπει ηχητικές μεταβολές της πίεσης στη μεμβράνη σε αντίστοιχες μεταβολές τάσης ή ρεύματος.
- Στην καθημερινότητά μας, τα σήματα που συναντάμε πιο συχνά είναι αναλογικά σήματα (τηλεφωνία, ραδιόφωνο, τηλεόραση).
- Ένα αναλογικό σήμα θα το συμβολίζουμε ως ***x(t)***, όπου ***t*** θεωρούμε ότι είναι ο χρόνος, αν και μπορεί να αναπαριστά οποιαδήποτε άλλη ποσότητα.



Διακριτό σήμα

- Ορίζεται μόνο σε διακριτές χρονικές τιμές. Έτσι, η ανεξάρτητη μεταβλητή λαμβάνει μόνο διακριτές τιμές.
- Ένα διακριτό σήμα θα το συμβολίζουμε ως ***x(n)***, όπου ***n*** ακέραιος αριθμός που αντιστοιχεί σε διακριτές χρονικές στιγμές, γι' αυτό και αποκαλείται και σήμα διακριτού χρόνου. Τα σήματα διακριτού χρόνου περιγράφονται ως ακολουθίες δειγμάτων της μορφής:

$$x(n) = \{x(n)\} = \{\dots, x(-1), \underset{\uparrow}{x(0)}, x(1), \dots\}$$

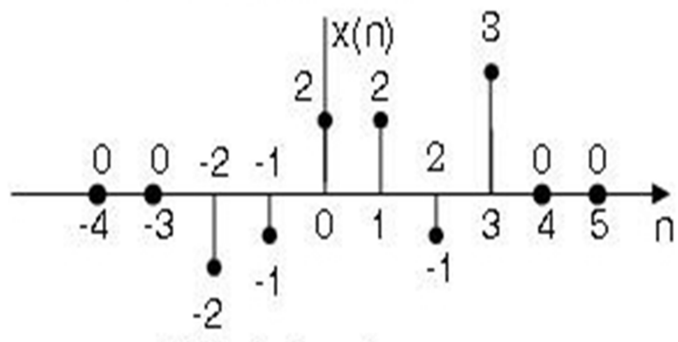


όπου το "↑" δείχνει το δείγμα τη χρονική στιγμή ***n=0***.

Ψηφιακό σήμα

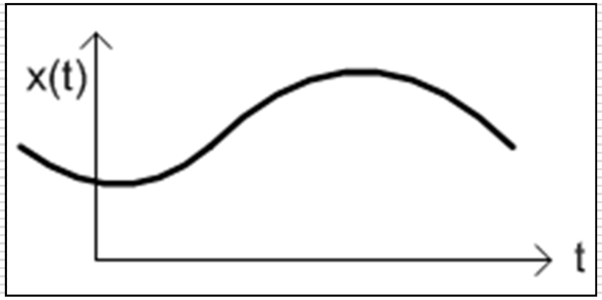
- Όταν κάθε δείγμα ενός σήματος διακριτού χρόνου είναι κβαντισμένο (δηλαδή το πλάτος του επιτρέπεται να λαμβάνει μόνο ένα πεπερασμένο σύνολο διακριτών τιμών) και στη συνέχεια κωδικοποιημένο, το τελικό σήμα αναφέρεται ως ψηφιακό σήμα (digital signal).

- Η έξοδος από έναν υπολογιστή είναι ένα παράδειγμα ψηφιακού σήματος. Φυσικά ένα αναλογικό σήμα μπορεί να μετατραπεί σε ψηφιακό με δειγματοληψία στο χρόνο, κβαντισμό και κωδικοποίηση, έτσι μόνο μπορεί να παρασταθεί σε bits. Η διαδικασία επεξεργασίας ψηφιακών σημάτων ονομάζεται Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

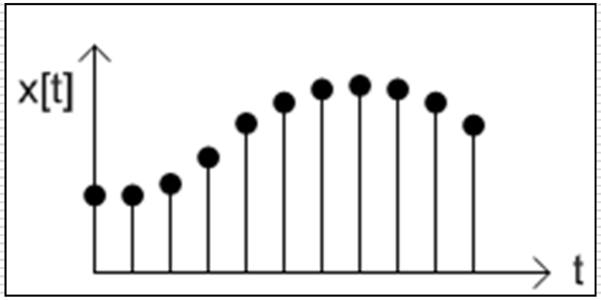


(b) Finite duration

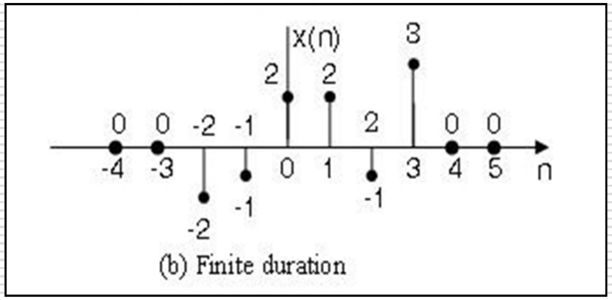
Είδη σημάτων



Σήμα συνεχούς χρόνου



Σήμα διακριτού χρόνου



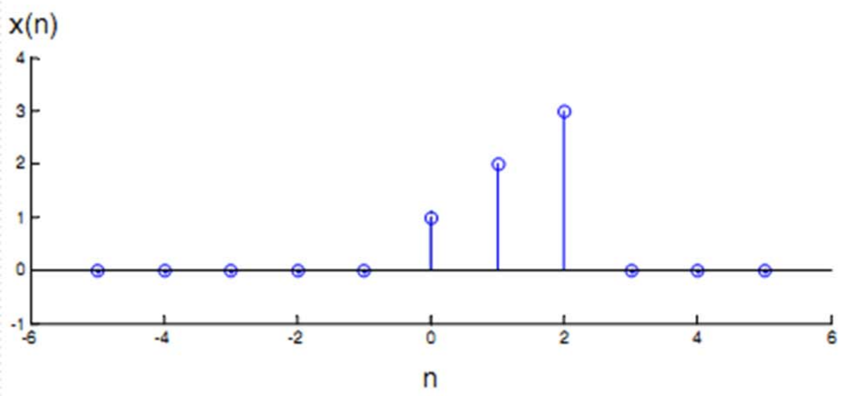
Ψηφιακό σήμα

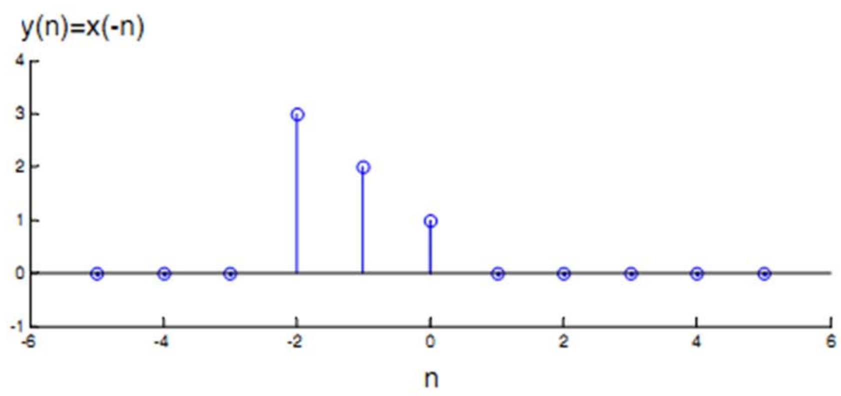
Μετασχηματισμοί Σημάτων

Γενικά, εάν σε ένα σήμα *x(n)* εφαρμοσθεί ένας μετασχηματισμός *f(n)* στην ανεξάρτητη μεταβλητή *n*, τότε προκύπτει το σήμα *x(f(n))*.

Χρονική Αντιστροφή

- Αν ***f(n) = -n*** τότε λέμε ότι το σήμα έχει υποστεί χρονική αντιστροφή και αλλάζει στο σήμα *y(n)=x(-n)*
- Η γραφική αναπαράσταση του *x(-n)* είναι συμμετρική ως προς τον κάθετο άξονα με αυτήν του *x(n)*.





Μετασχηματισμοί Σημάτων

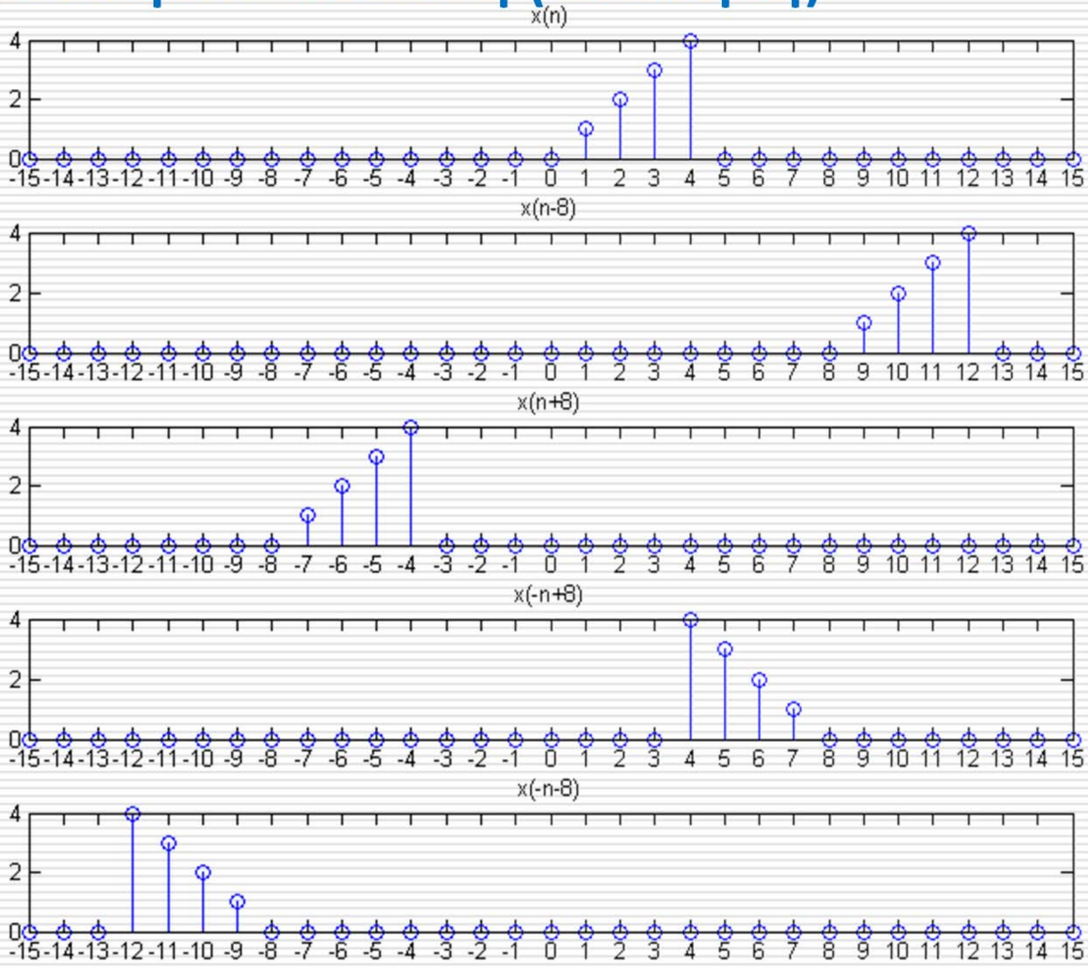
Χρονική Μετατόπιση (ολίσθηση)

- Αν ***f(n)=n−n₀***, τότε λέμε ότι το σήμα έχει υποστεί μετατόπιση ή ολίσθηση κατά n_0 και μετασχηματίζεται στο σήμα $y(n)= x(n-n_0)$
- Στην γραφική παράσταση του $x(n-n_0)$ υπάρχει μετατόπιση της γραφικής παράστασης του $x(n)$ κατά n_0, στον οριζόντιο άξονα.
  - Αν $n_0 > 0$, τότε παρατηρούμε μετατόπιση προς τα δεξιά (έχουμε καθυστέρηση)
  - Αν $n_0 < 0$, τότε παρατηρούμε μετατόπιση προς τα αριστερά (έχουμε προπόρευση) και το σήμα μπορεί να γραφεί ως

    $y(n)= x(n+n_0)$.

Μετασχηματισμοί Σημάτων

Χρονική Μετατόπιση (ολίσθηση)



- x(n)
- x(n-8)
- x(n+8)
- x(-n+8)
- x(-n-8)

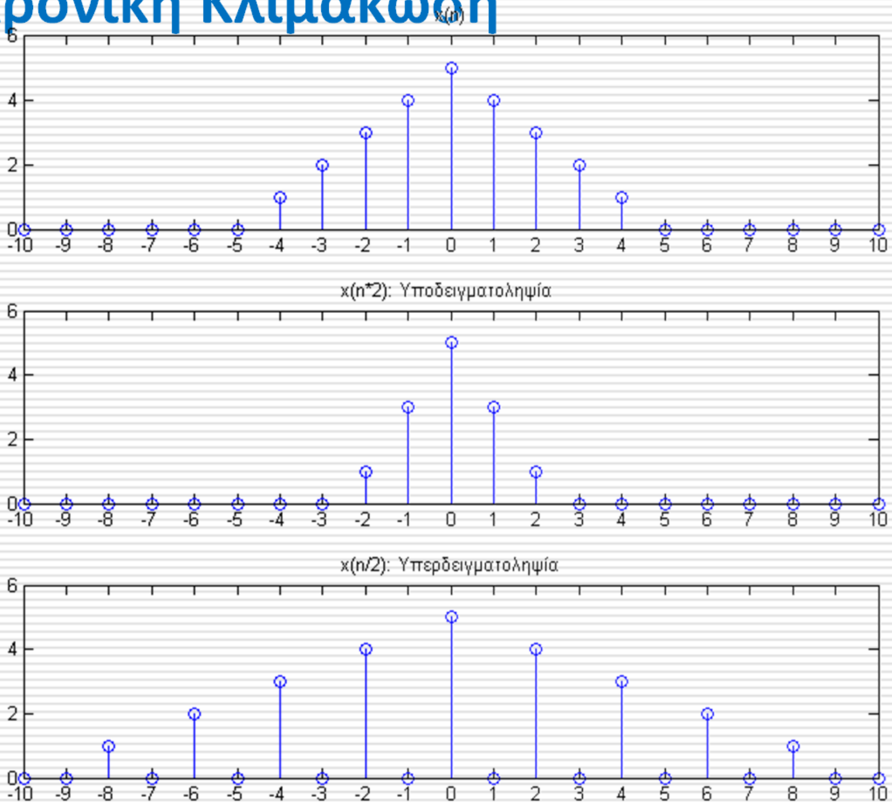
Μετασχηματισμοί Σημάτων

Χρονική Κλιμάκωση

- Κλιμάκωση υφίσταται ένα σήμα αν $\boldsymbol{f(n)=M\cdot n}$ ή $\boldsymbol{f(n)=n/M}$, όπου M ακέραιος αριθμός.
- Στην πρώτη περίπτωση το διακριτό σήμα λέμε ότι υπέστη υποδειγματοληψία και στη δεύτερη περίπτωση υπερδειγματοληψία.
- Κατά την υποδειγματοληψία προκύπτει το σήμα $y(n)= x(Mn)$ και κατά την υπερδειγματοληψία το σήμα $y(n)= x(n/M)$, όπου n/M ακέραιος.
- Το σήμα $x(n/M)$ δεν ορίζεται για τις μη ακέραιες τιμές του πηλίκου n/M.

Μετασχηματισμοί Σημάτων

Χρονική Κλιμάκωση



- x(n)

- Υποδειγματοληψία x(n*2)

- Υπερδειγματοληψία x(n/2)

n	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x(n)	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0
x(n*2)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	5	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x(n/2)	0	0	1	0	2	0	3	0	4	0	5	0	4	0	4	0	2	0	1	0	0

Πράξεις διακριτών Σημάτων

Πρόσθεση	x(n) + y(n)
Αφαίρεση	x(n) – y(n)
Πολλαπλασιασμός	x(n) · y(n)
Διαίρεση	x(n) / y(n) με y(n)≠0

- Οι πράξεις εκτελούνται **ανά στοιχείο** και για την ίδια τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Πρόσθεση Σημάτων

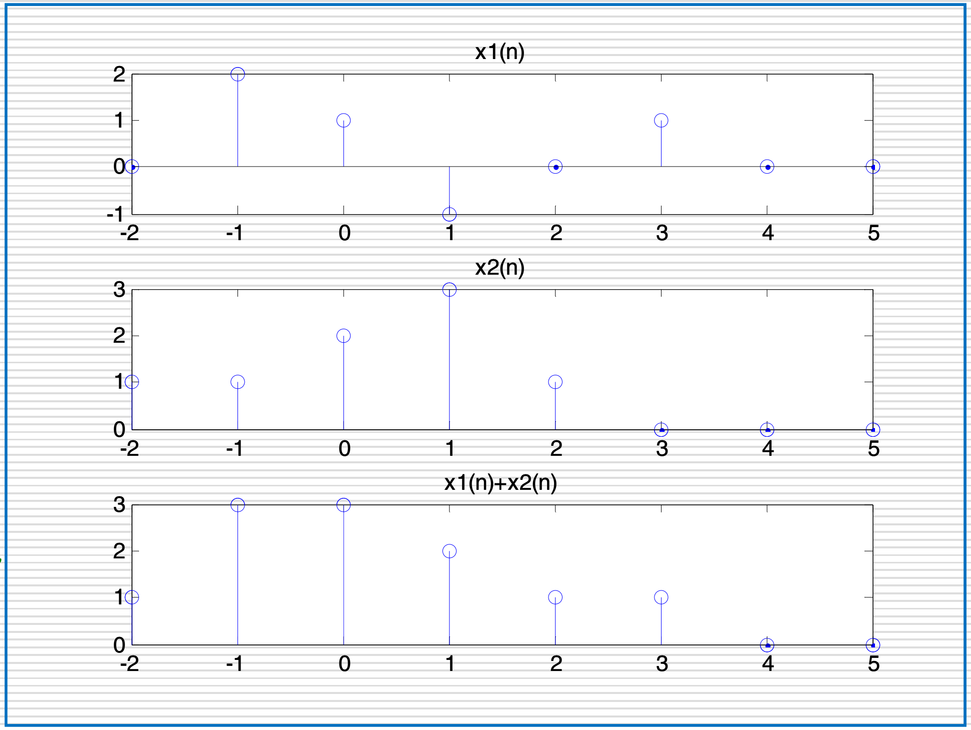
Να υπολογιστεί και να παρασταθεί γραφικά το άθροισμα των 2 παρακάτω σημάτων:

$x1(n)=\{0,\underset{\uparrow}{2},1,-1,0,1,0,0\}$ &

$x2(n)=\{1,\underset{\uparrow}{1},2,3,1,0,0,0\}$

Το άθροισμα τους:

$x1(n)+x2(n)=\{1,\underset{\uparrow}{3},3,2,1,1,0,0\}$



Θεμελιώδεις ακολουθίες στην Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

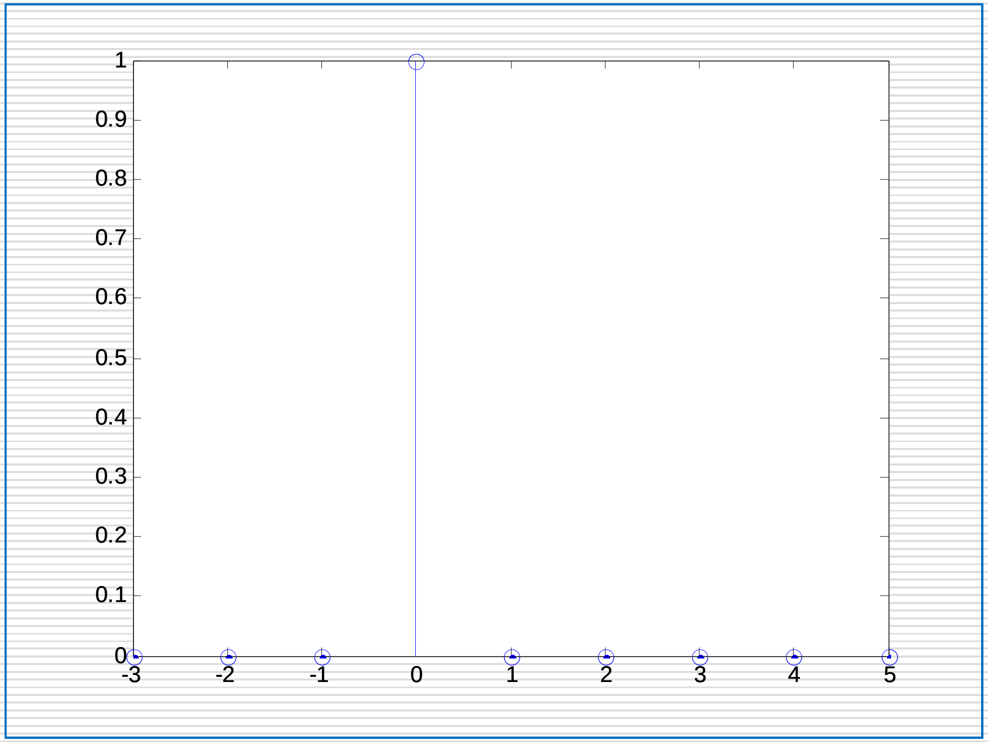
Διακριτή ακολουθία δέλτα ή μοναδιαία κρουστική ακολουθία

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \mathrm{n} = 0 \\ 0 & \mathrm{n} \neq 0 \end{cases}$$

Διακριτή ακολουθία δέλτα ή μοναδιαία κρουστική ακολουθία

Να παρασταθεί γραφικά στο διάστημα [-3,5]

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
δ(n)	0	0	0	1	0	0	0	0	0

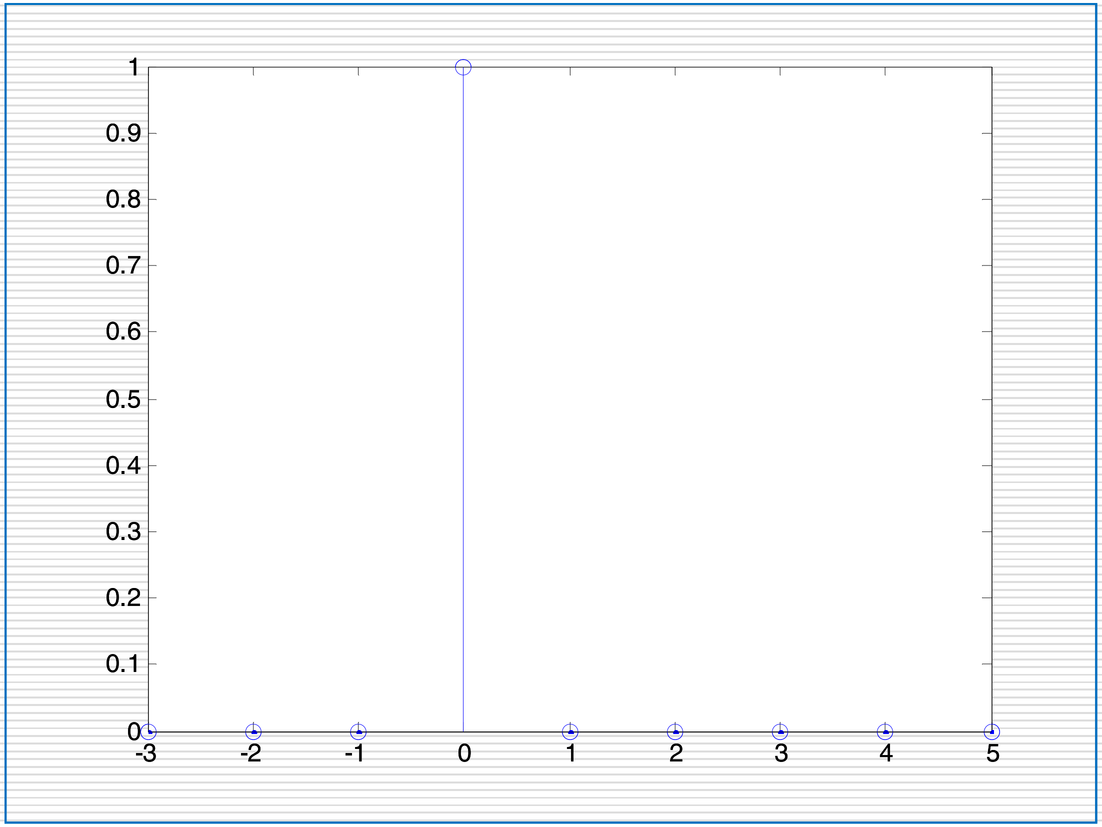


Άσκηση

- Γράψτε ένα πρόγραμμα στο Matlab που θα δίνει την γραφική παράσταση της ακολουθίας $\delta(n)$ στο διάστημα [-3,5]

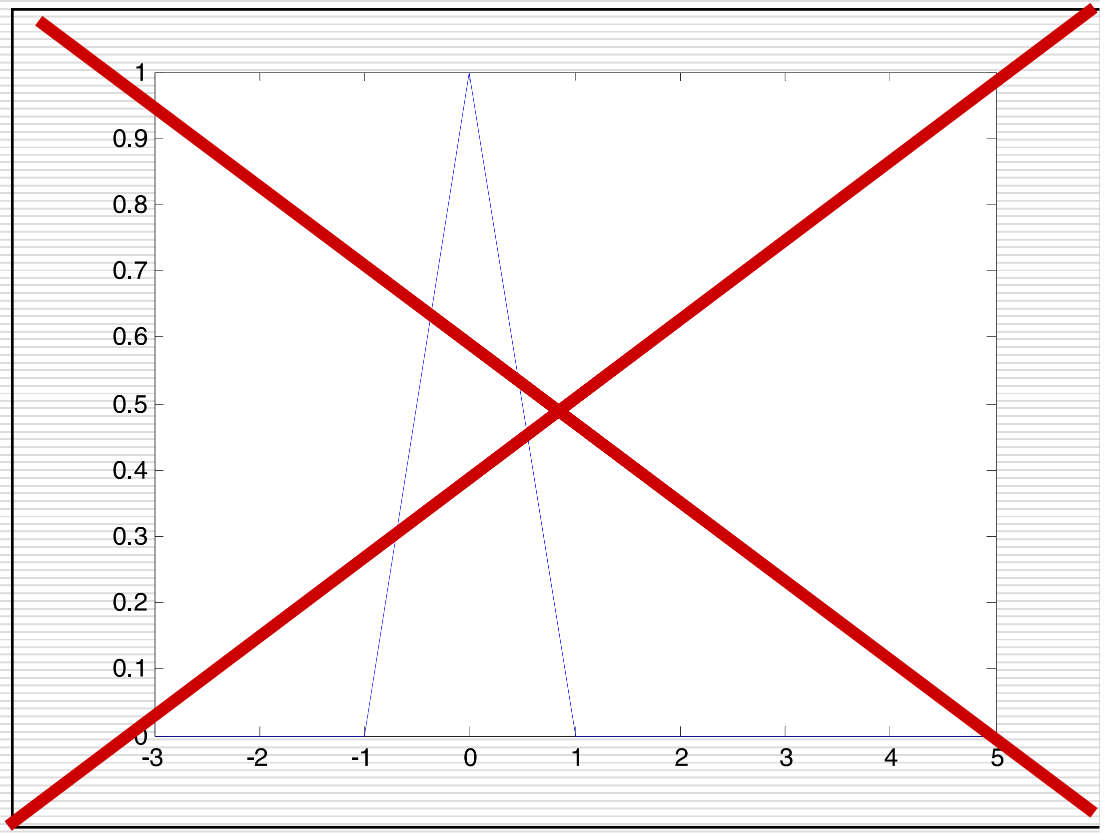
Άσκηση

```
n=[-3:5];
d=zeros(1,length(n));
for i=1:length(n)
   if n(i)==0
        d(i)=1;
    end
end
figure(1)
stem(n,d)
```



Άσκηση

```
n=[-3:5];
d=zeros(1,length(n));
for i=1:length(n)
    if n(i)==0
        d(i)=1;
    end
end
figure(1)
plot(n,d)
```



Διακριτή ακολουθία επιβράδυνσης

Η διακριτή ακολουθία επιβράδυνσης αποτελεί μια γενίκευση της μοναδιαίας κρουστικής ακολουθίας

$$\delta(n-k) = \begin{cases} 1 & \mathrm{n} = \mathrm{k} \\ 0 & \mathrm{n} \neq \mathrm{k} \end{cases}$$

Άσκηση 1

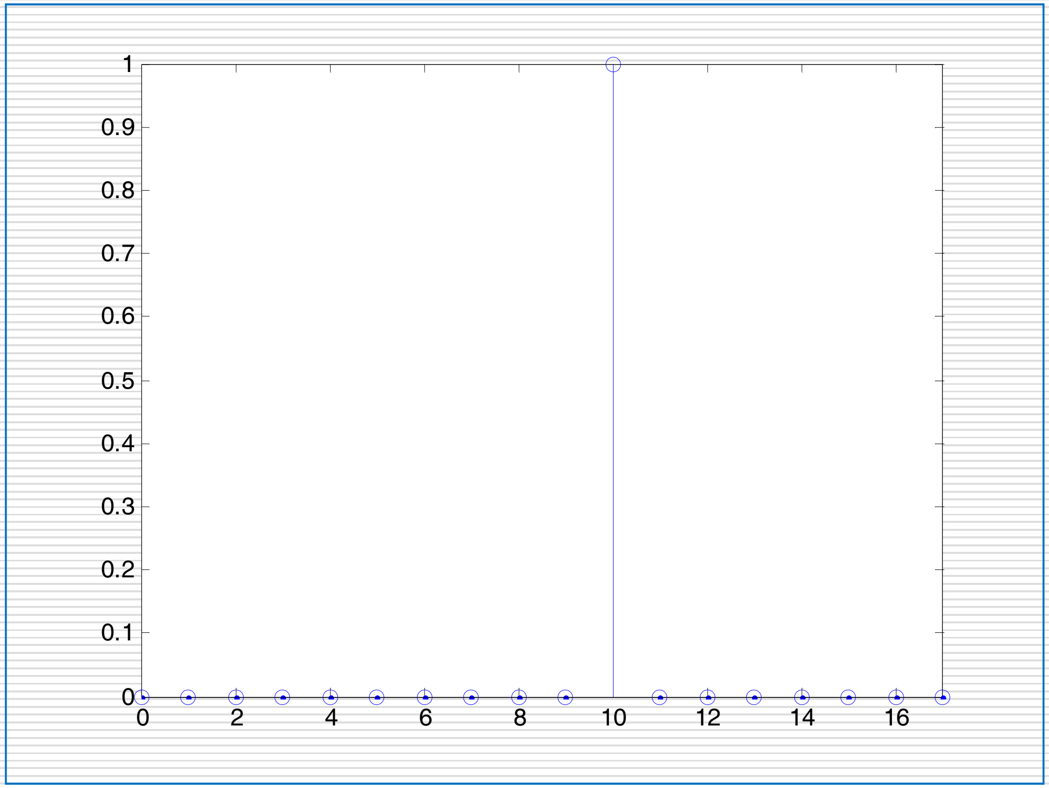
- Να παραστήσετε γραφικά τα παρακάτω διακριτά σήματα χρησιμοποιώντας την εντολή *stem*

a. $x1(n)=\delta(n-10) \quad 0<=n<=17$

b. $x2(n)=0.9\delta(n-5) \quad -3<=n<=8$

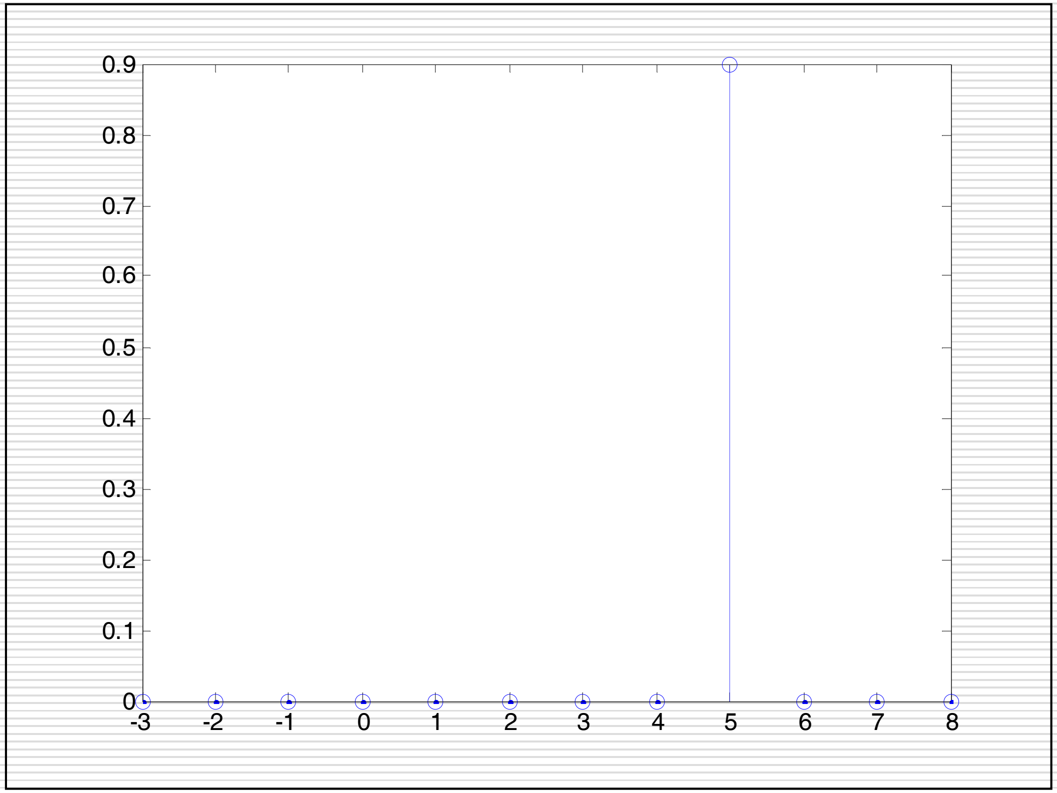
Άσκηση 1a

```
n=[0:17];
d=zeros(1,length(n));
for i=1:length(n)
    if n(i)==10
        d(i)=1;
    end
end
figure(1)
stem(n,d)
axis tight
```



Άσκηση 1b

```
n=[-3:8];
d=zeros(1,length(n));
for i=1:length(n)
    if n(i)==5
        d(i)=1;
    end
end
x=0.9*d;
figure(1)
stem(n,x)
axis tight
```



Άσκηση 2

- Να παραστήσετε γραφικά στο διάστημα $-6 \leq n \leq 8$ τα παρακάτω διακριτά σήματα καθώς και το άθροισμα τους $(x1(n)+x2(n)+x3(n))$ στο ίδιο figure αλλά σε διαφορετικά συστήματα αξόνων.

  a. $x1(n)=\delta(n+3)$

  b. $x2(n)= \delta(n)$

  c. $x3(n)= \delta(n-6)$

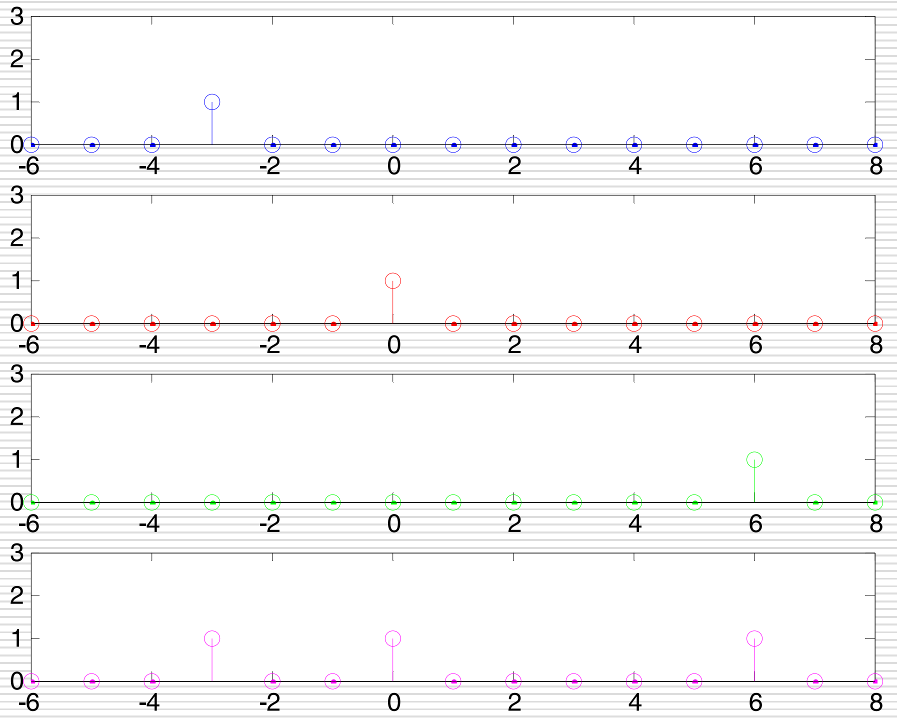
Άσκηση 2

n	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
X1(n)=δ(n+3)	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X1(n)=δ(n)	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
X1(n)=δ(n-6)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
x(n)=δ(n+3)+ δ(n)+δ(n-6)	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0

Άσκηση 2

```
clear
n=[-6:8];
x1=zeros(1,length(n));
x2=x1; x3=x1;
for i=1:length(n)
   if n(i)==-3
      x1(i)=1;
   end
   if n(i)==0
      x2(i)=1;
   end
   if n(i)==6
      x3(i)=1;
   end
end
x=x1+x2+x3;
```

```
figure(1)
% x1(n)
subplot(4,1,1)
stem(n,x1,'b')
axis ([-6 8 0 3])
% x2(n)
subplot(4,1,2)
stem(n,x2,'r')
axis ([-6 8 0 3])
% x3(n)
subplot(4,1,3)
stem(n,x3,'g')
axis ([-6 8 0 3])
% x1(n)+x2(n)+x3(n)
subplot(4,1,4)
stem(n,x,'m')
axis ([-6 8 0 3])
```



Συμπέρασμα

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n-k) = \mathrm{x}(\mathrm{k})$$

Άσκηση 3*

- Φτιάξτε μια συνάρτηση στο MATLAB η οποία θα δημιουργεί μια διακριτή συνάρτηση επιβράδυνσης. Η συνάρτηση θα έχει 3 ορίσματα: το k, και τα όρια του *n* και θα επιστρέφει ένα διάνυσμα με την ακολουθία *δ*.

Άσκηση 4*

- Εφαρμόστε την συνάρτηση που υλοποιήσατε στην άσκηση 3 για να παραστήσετε γραφικά την παρακάτω ακολουθία:

$$x(n) = \sqrt{\pi} \cdot \left(\delta(n+10) - 3\delta(n-7)\right) \qquad -20 \le \mathrm{n} \le 20$$

Μοναδιαία βηματική ακολουθία (unit step)

$$u(n-k) = \begin{cases} 1 & \mathrm{n} \geq \mathrm{k} \\ 0 & \mathrm{n} < \mathrm{k} \end{cases}$$

Άσκηση 5

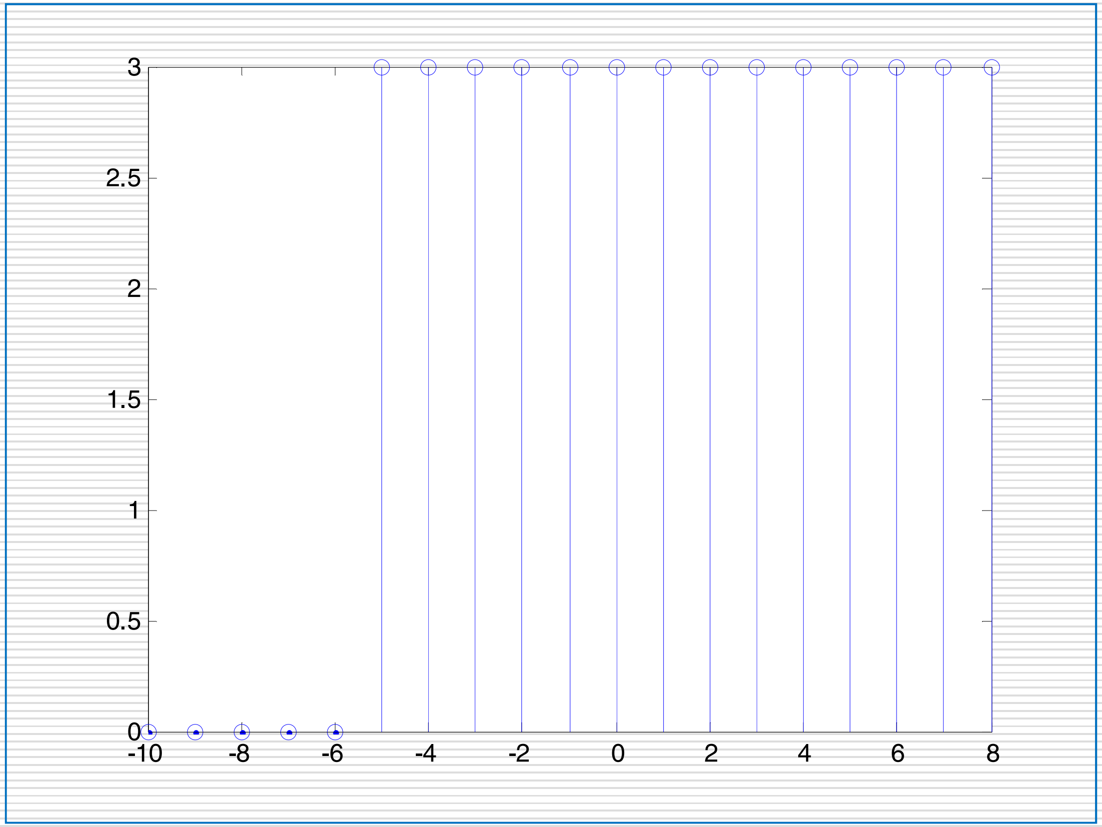
- Να παραστήσετε γραφικά τα παρακάτω διακριτά σήματα χρησιμοποιώντας την εντολή *stem*.

a. $3u(n+5)$ $\quad -10<=n<=8$

b. $x(n)=u(n)-u(n-10)$ $\quad -2<=n<=12$

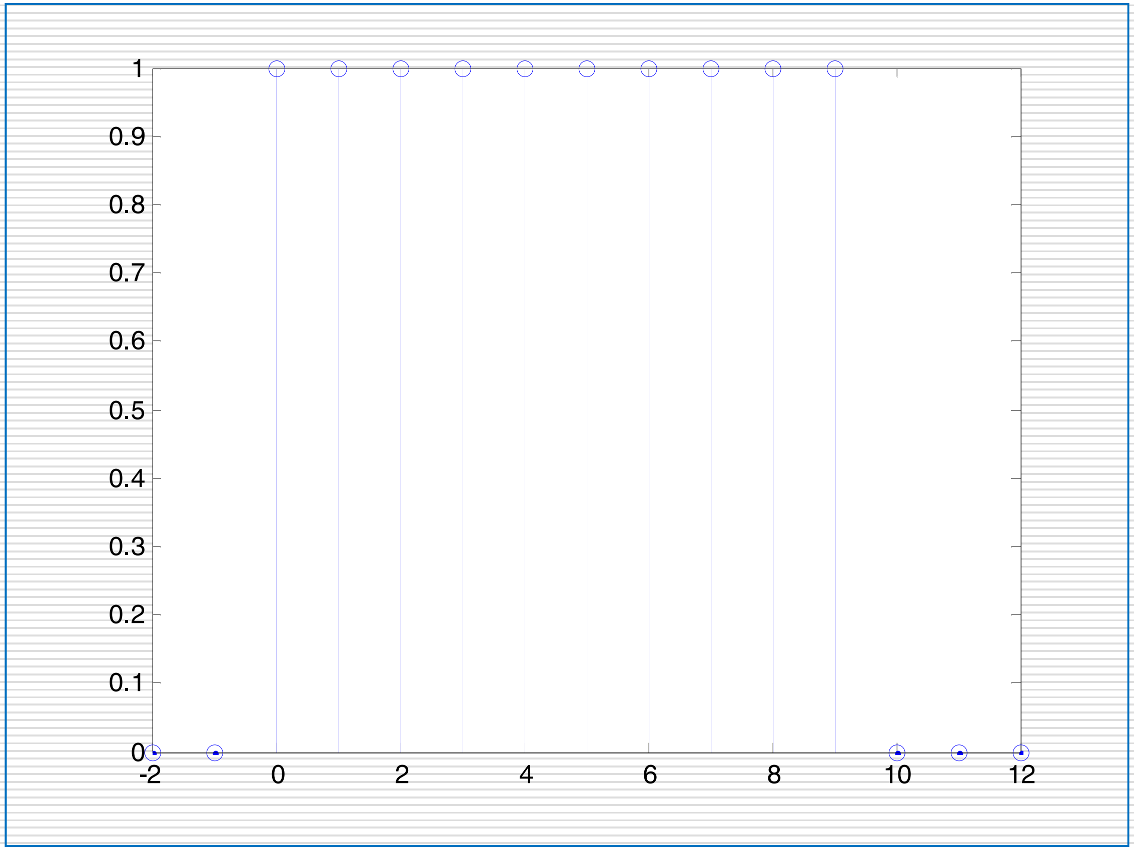
Άσκηση 5a

```
n=[-10:8];
u=zeros(1,length(n));
for i=1:length(n)
    if n(i)>=-5
        u(i)=1;
    end
end
figure(1)
stem(n,3*u)
axis tight
```



Άσκηση 5b

```
n=[-2:12];
u1=zeros(1,length(n));
u2=u1;
for i=1:length(n)
   if n(i)>=0
      u1(i)=1;
   end
   if n(i)>=10
      u2(i)=1;
   end
end
x=u1-u2;
figure(1)
stem(n,x)
axis tight
```



Άσκηση 6*

- Φτιάξτε μια συνάρτηση στο MATLAB η οποία θα δημιουργεί τη μοναδιαία βηματική ακολουθία . Η συνάρτηση θα έχει 3 ορίσματα: το k, τα όρια του *n* και θα επιστρέφει ένα διάνυσμα με την βηματική ακολουθία.

Άσκηση 7*

- Εφαρμόστε την συνάρτηση που υλοποιήσατε στην άσκηση 6 για να παραστήσετε γραφικά την παρακάτω ακολουθία:

$$x(n) = \big(u(n+5) + u(n+5)\cdot u(n-2)\big) \qquad -10 \le n \le 10$$

Πραγματική εκθετική ακολουθία

$$x(n) = a^n \forall n, a \in N$$

Η ακολουθία είναι φθίνουσα για ***|α|<1***, αύξουσα για ***|α|>1*** και σταθερή *x(n)=u(n)* για ***α=1***.

Άσκηση 8

- Να παραστήσετε γραφικά τα παρακάτω διακριτά σήματα σε μια γραφική παράσταση χρησιμοποιώντας την εντολή *stem.*

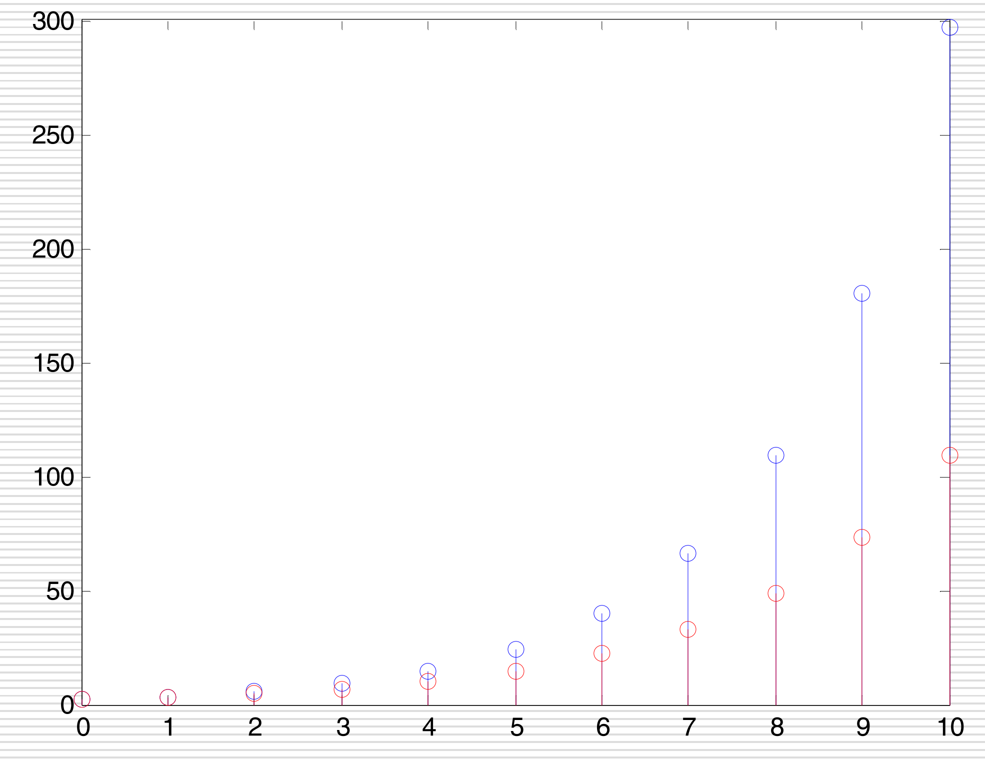
  a. $x(n)=2e^{0.5n}$

  b. $x(n)=2e^{0.4n}$

  στο διάστημα $0<=n<=10$

Άσκηση 8

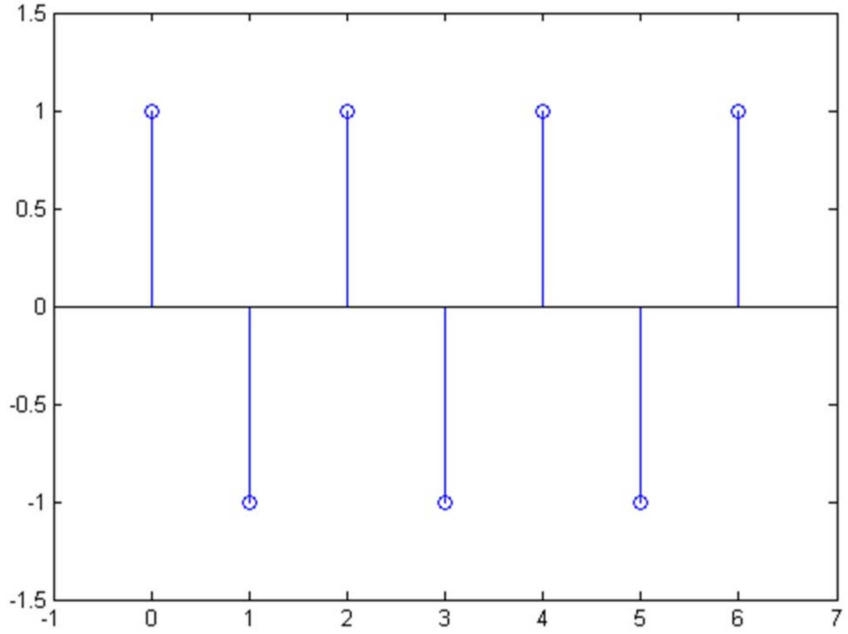
```
clear
n=[0:10];
x1=2*exp(0.5*n);
x2=2*exp(0.4*n);
figure(1)
stem(n,x1)
hold on
stem(n,x2,'r')
```



Μοναδιαία Εναλλασσόμενη

Η μοναδιαία εναλλασσόμενη ακολουθία ορίζεται από την σχέση:

$$x(n) = (-1)^n, n \geq 0$$



Ημιτονοειδής ακολουθία

$$x(n) = \cos(\omega_o n + \theta), \forall n \in N$$

$$x(n) = \sin(\omega_o n + \theta), \forall n \in N$$

Άσκηση 9

- Να παραστήσετε γραφικά τα παρακάτω διακριτά σήματα χρησιμοποιώντας την εντολή *stem*. Οι δυο γραφικές παραστάσεις θα γίνουν στο ίδιο figure με subplot.

  a. x(n)=cos(2πn/4)

  b. x(n)=cos(2πn/16)

  στο διάστημα -15<=n<=15

Άσκηση 9

```
clear
n=[-15:15];
x1=cos(2*pi*n/4);
x2=cos(2*pi*n/16);
figure(1)
subplot(2,1,1)
stem(n,x1)
subplot(2,1,2)
stem(n,x2,'r')
```