Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εργαστήριο 4

Αλέξανδρος Μανουσάκης

Κρουστική ακολουθία δ

Κάθε διακριτό σήμα μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια της διακριτής συνάρτησης δέλτα ως εξής:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Άσκηση 1

- Να γραφεί σε μορφή αθροισμάτων διακριτών συναρτήσεων δέλτα και να παρασταθεί γραφικά το σήμα.

$$x(n)=\left\{-2,1,-\frac{1}{3},\underset{\uparrow}{\frac{1}{2}},2,1,0,1,0,0,3\right\}$$

Άσκηση 1

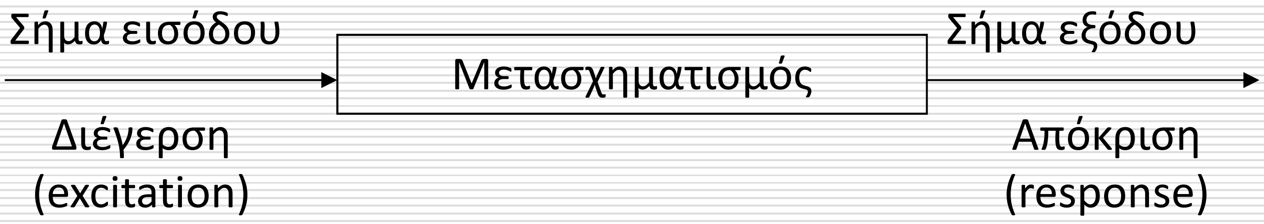
$$x(n) = \left\{ -2, 1, -\frac{1}{3}, \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}}, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 3 \right\}$$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
x(n)	-2	1	- ⅓	½	2	1	0	1	0	0	3

$$x(n) = -2\delta(n+3) + \delta(n+2) - \tfrac{1}{3}\delta(n+1) + \tfrac{1}{2}\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-4) + 3\delta(n-7)$$

Συστήματα διακριτού χρόνου

- Σύστημα είναι μία συνάρτηση της μορφής:



που επιφέρει ένα μετασχηματισμό σε ένα σήμα.

- Αυτή η διαδικασία συμβολίζεται ως εξής:

$$y(n) = T[x(n)]$$

Ιδιότητες Συστημάτων

- **Γραμμικό (linearity) :**

$$T[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 T[x_1(n)] + a_2 T[x_2(n)]$$

- **Χρονικά αμετάβλητο (time-invariant) :**

  Έστω *y(k)* η έξοδος ενός συστήματος σε είσοδο *x(k).* Το σύστημα θα λέγεται χρονικά αμετάβλητο αν για οποιαδήποτε καθυστέρηση k_0 η έξοδος του στην είσοδο $x(k-k_0)$ είναι η $y(k-k_0)$.

- Ένα σύστημα που έχει τις δύο παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται **Γραμμικό, Χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ)** σύστημα.

Ιδιότητες Συστημάτων

Αιτιατό (causal):

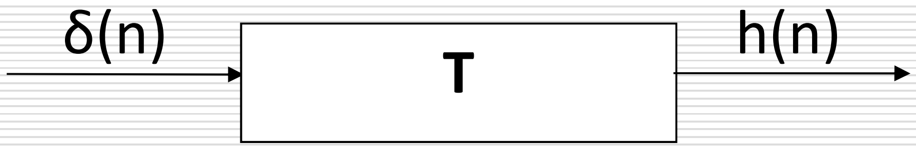
- Ένα σύστημα ονομάζεται αιτιατό αν για κάθε χρονική στιγμή n_0, η απόκριση τη χρονική στιγμή n_0 εξαρτάται μόνο από την είσοδο μέχρι τη στιγμή $n=n_0$

- Για παράδειγμα το παρακάτω σύστημα είναι αιτιατό:

$$y(n) = 0,9x(n) - 0,1x(n-1)$$

Κρουστική Απόκριση (impulse response)

Η κρουστική απόκριση *h(n)* ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου διακριτού συστήματος (ΓΧΑ) είναι η έξοδος (απόκριση) του συστήματος αν η είσοδος είναι η μοναδιαία κρουστική ακολουθία *δ(n)*.



Αιτιότητα (causality)

- Ένα σύστημα γραμμικό και αμετάβλητο στη μετατόπιση (ΓΧΑ) θα είναι αιτιατό **αν και μόνο αν** η κρουστική απόκριση $h(n)$ είναι ίση με το μηδέν για κάθε $n<0$.

Άσκηση

- Να υπολογίσετε και να παραστήσετε γραφικά την κρουστική απόκριση του παρακάτω **αιτιατού** συστήματος για $n=0,\dots 100$.

  - $y(n)=-0.9y(n-1) + x(n)$

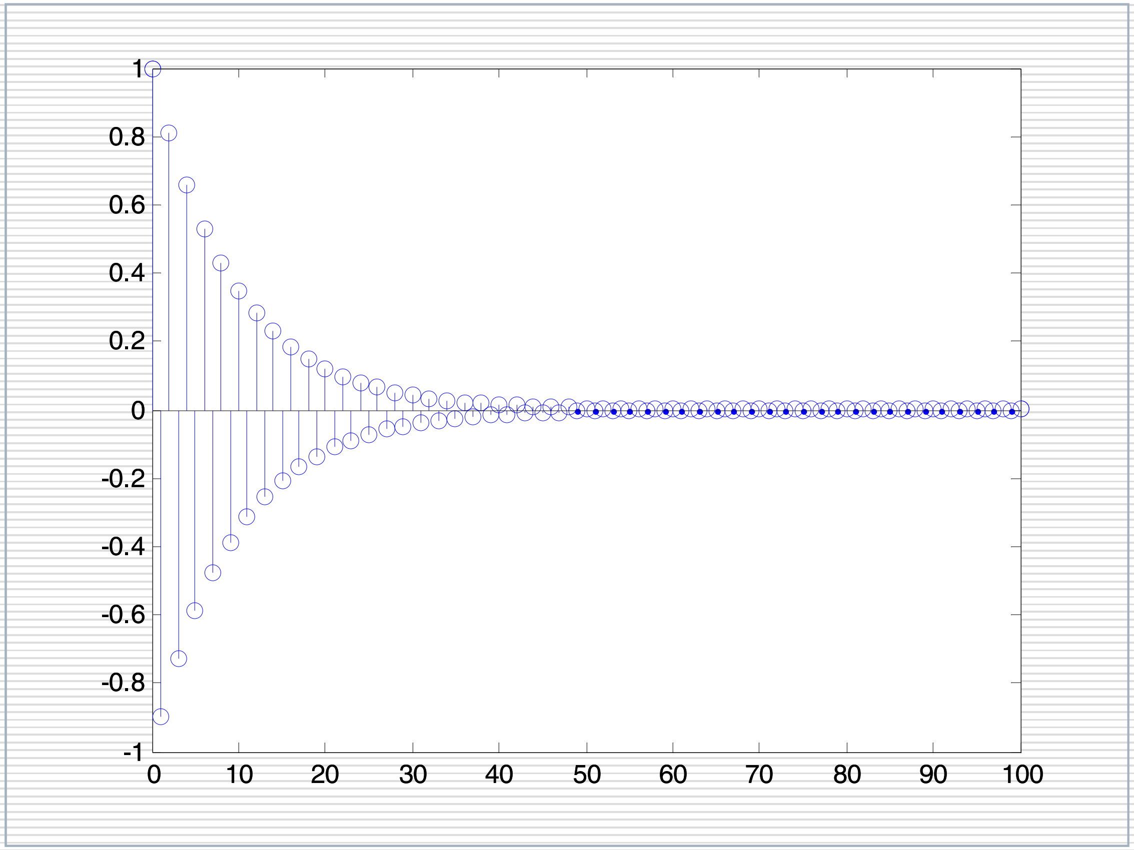
$y(n)=-0.9y(n-1) + x(n) \quad \rightarrow \quad h(n)=-0.9h(n-1) + \delta(n)$

n=0	$h(0)=-0.9h(-1)+\delta(0)$	**1**	Το σύστημα είναι αιτιατό άρα $h(n)=0$ για κάθε n<0 ενώ το $\delta(0)=1$
n=1	$h(1)=-0.9h(0)+\delta(1)$	**-0.9**	Το $h(0)=1$ το οποίο έχει υπολογιστεί από το προηγούμενο βήμα ενώ το $\delta(1)=0$
n=2	$h(2)=-0.9h(1)+\delta(2)$	**0.81**	Το $h(1)=-0.9$ το οποίο έχει υπολογιστεί από το προηγούμενο βήμα ενώ το $\delta(2)=0$

Όμοια υπολογίζουμε τους όρους έως το $n=100$ της κρουστικής απόκρισης

$y(n)=-0.9y(n-1) + x(n)$

```
clear
n=[0:100];
h=zeros(1,length(n));
d=mydelta(0,0,100);
for i=1:length(n)
    if i==1
        h(i)=d(i);
    else
        h(i)=-0.9*h(i-1)+d(i);
    end
end
figure(1)
stem(n,h)
```



filter(b,a,x)

- Η συνάρτηση ***filter*** στο Matlab μας βοηθά να επιλύσουμε εξισώσεις διαφορών της παραπάνω μορφής με στόχο να βρούμε την απόκριση του συστήματος.

- $b=[b_0, b_1,\ldots, b_m]$ και $\alpha=[\alpha_0, \alpha_1,\ldots, \alpha_m]$ είναι οι συντελεστές της εξίσωσης διαφορών ενώ το διάνυσμα *x* είναι ο πίνακας με τις τιμές του σήματος εισόδου του συστήματος. Το διάνυσμα *y* έχει το ίδιο μήκος με το *x*.

- Πρέπει οπωσδήποτε $\alpha_0 \neq 0$.

Εξισώσεις Διαφορών

- Ένα ΓΧΑ διακριτό σύστημα μπορεί να περιγραφεί από μία εξίσωση διαφορών της μορφής:

$$\sum_{k=0}^{N_a} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{N_b} b_m x(n-m)$$

Εξίσωση διαφορών

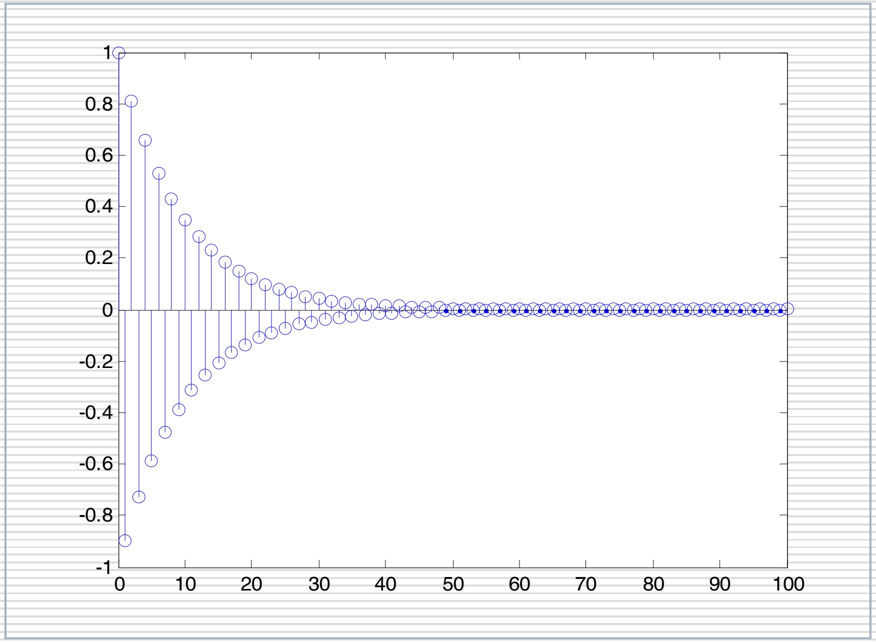
$$y(n)=-0.9y(n-1) + x(n)$$

$$\Rightarrow y(n)+0.9y(n-1) = x(n) + 0x(n-1)$$

$$\Rightarrow {\color{red}1}y(n)+{\color{red}0.9}y(n-1) = {\color{green}1}x(n) + {\color{green}0}x(n-1)$$

sy=[1 0.9]　　　　sx=[1 0]

```
n=[0:100];
d=mydelta(0,0,100);
sx=[1 0];
sy=[1 0.9];
h=filter(sx,sy,d);
figure(1)
stem(n,h)
```



Άσκηση 2

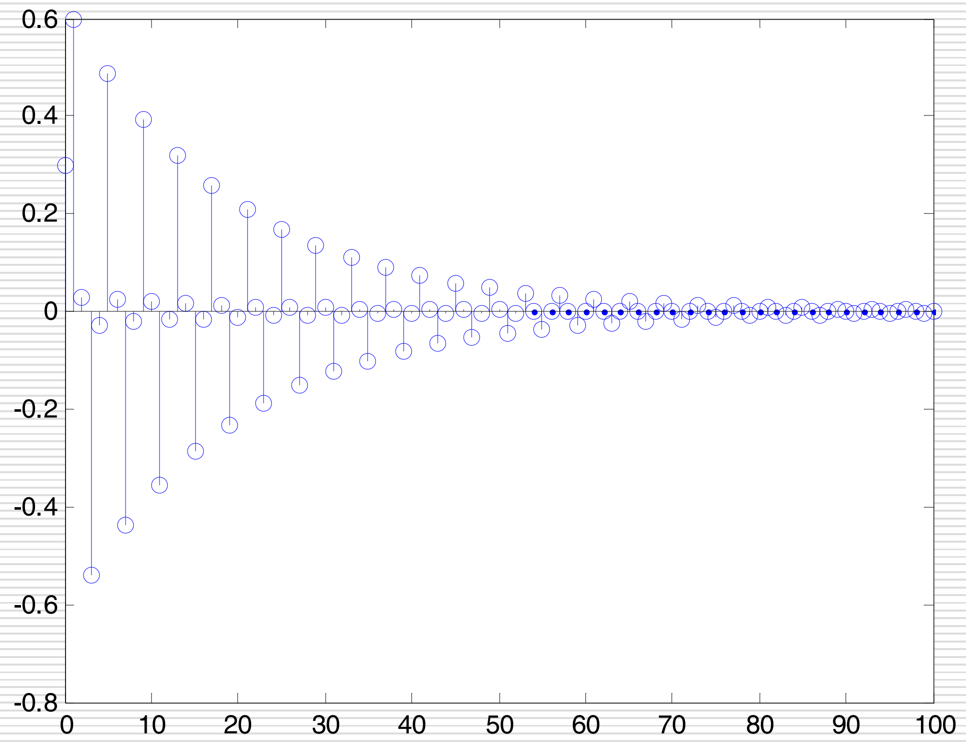
- Να υπολογίσετε και να παραστήσετε γραφικά την κρουστική απόκριση του παρακάτω αιτιατού συστήματος για $n=0,\ldots 100$.

  - $y(n)=0.3x(n)+0.6x(n-1)+0.3x(n-2)-0.9y(n-2)$

Άσκηση 2

y(n)=0.3x(n)+0.6x(n-1)+0.3x(n-2)-0.9y(n-2)

```
d=mydelta(0,0,100);
sx=[0.3 0.6 0.3]
sy=[1 0 0.9];
h=filter(sx,sy,d);
figure(1)
stem([0:100],h)
```



Βηματική Απόκριση (Step response)

- Η βηματική απόκριση ενός γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου διακριτού συστήματος (ΓΧΑ) είναι η έξοδος (απόκριση) του συστήματος αν η είσοδος είναι η μοναδιαία βηματική ακολουθία *u(n)*.

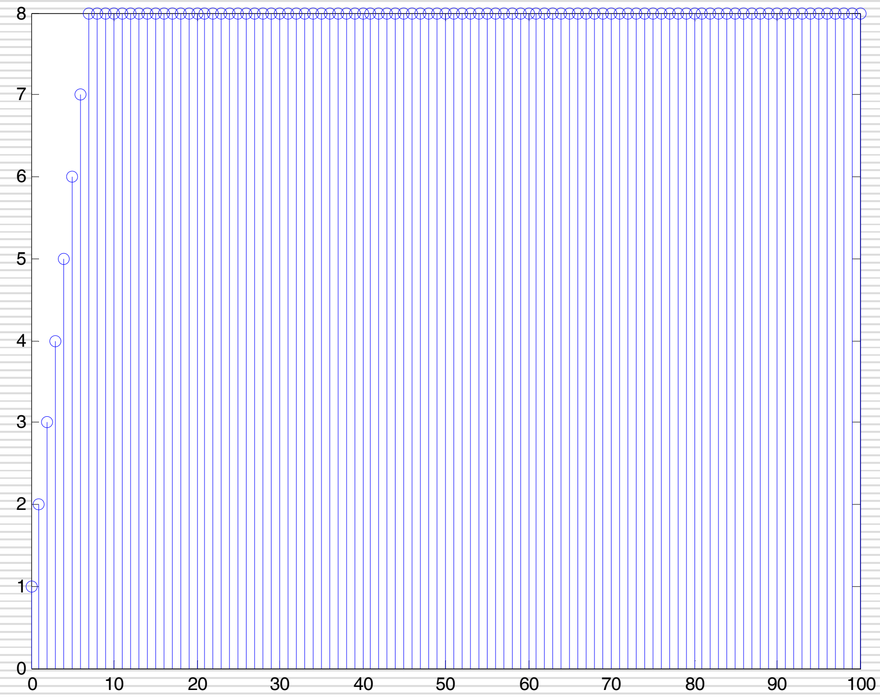
Άσκηση 3

- Να υπολογίσετε και να παραστήσετε γραφικά τη βηματική απόκριση των παρακάτω αιτιατών συστημάτων για *n=0,…100.*

a. $y(n)=y(n-1)+x(n)-x(n-8)$
b. $y(n)=0.3x(n)+0.6x(n-1)+0.3x(n-2)-0.9y(n-2)$

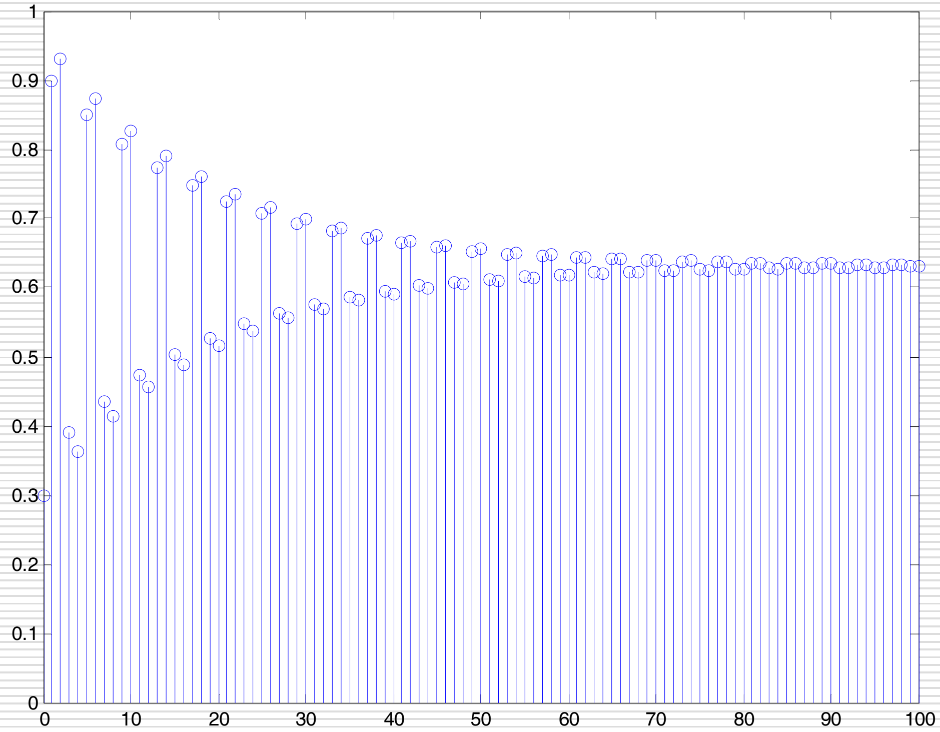
Άσκηση 3a

```
n=[0:100];
sx=[1 0 0 0 0 0 0 0 -1];
sy=[1 -1 0 0 0 0 0 0 0];
a=-1;
x=mystep(0,0,100);
y=filter(sx,sy,x);
figure(1)
stem(n,y)
```



Άσκηση 3b

```
u=mystep(0,0,100);
sx=[0.3 0.6 0.3]
sy=[1 0 0.9];
h=filter(sx,sy,u);
figure(1)
stem([0:100],h)
```



Άσκηση 4

- Σχεδιάστε την **απόκριση** του συστήματος:

$$y(n)=y(n-1)+x(n)-x(n-8)$$

στο διάστημα n=[*0,…100*] για είσοδο:

$$x(n)=a^n \cdot u(n) \text{ και για } a=-1,\ a=1.$$

Άσκηση 4a

- Θα πάρουμε την περίπτωση που *a=-1* έτσι η είσοδος του συστήματος είναι:

$$x(n)=-1^n u(n)$$

```
n=[0:100];
sx=[1 0 0 0 0 0 0 0 -1];
sy=[1 -1 0 0 0 0 0 0 0];
a=-1;
x=((a).^n).*mystep(0,0,100);
y=filter(sx,sy,x);
figure(1)
stem(n,y)
```