

Χωρικά Φίλτρα

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΦΙΛΤΡΑΡΙΣΜΑΤΟΣ

Οι Τεχνικές Φιλτραρίσματος χωρίζονται σε Τεχνικές :

- ✓ στο Πεδίο του Χώρου (Spatial Domain) και
- ✓ σε Τεχνικές στο Πεδίο της Συχνότητας (Frequency Domain).

Διακρίνονται επίσης και ως Γραμμικές ή μη Γραμμικές Τεχνικές Φιλτραρίσματος.

ΕΙΔΗ ΦΙΛΤΡΩΝ

- ✓ ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (mean FILTER)
- ✓ ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΑΙΑΣ ΤΙΜΗΣ (median FILTER)
- ✓ ΦΙΛΤΡΟ max-min
- ✓ ΦΙΛΤΡΟ max/median
- ✓ ΦΙΛΤΡΟ GAUSS

ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (mean FILTER)

Η λειτουργία του φίλτρου μέσης τιμής συνίσταται με την αντικατάσταση της φωτεινότητας σε κάθε εικονοστοιχείο με τη μέση φωτεινότητα σε μια γειτονιά του.

Αν N είναι η γειτονιά του εικονοστοιχείου (i,j) μιας εικόνας I , τότε η τιμή του εικονοστοιχείου (i,j) αντικαθίσταται με τη βοήθεια της σχέσης:

$$I'(i, j) = \frac{1}{M} \sum_{(x,y) \in N} I(x, y)$$

όπου M το πλήθος των εικονοστοιχείων της γειτονιάς N .

ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (mean FILTER)

Η γειτονιά N είναι συνήθως καθορισμένη για κάθε επεξεργασία και συνήθως αντιστοιχεί σε τετράγωνες μάσκες. Έτσι για ακτίνα ίση με ένα έχουμε ουσιαστικά μια γειτονιά διαστάσεων 3×3 .

Ένα 3×3 φίλτρο μέσης τιμής μπορεί πρακτικά να υλοποιηθεί με μια μάσκα της μορφής:

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (mean FILTER)

Το φίλτρο μέσης τιμής μπορεί να θεωρηθεί ως ένα βαθυπερατό φίλτρο.

Αν θέλουμε να τονίσουμε περισσότερο τη συνεισφορά των εικονοστοιχείων ανάλογα με την απόστασή τους, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μάσκες εξομάλυνσης όπως η παρακάτω

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (mean FILTER)

Μια παραλλαγή του φίλτρου μέσης τιμής είναι τα φίλτρα μέσης τιμής υπό συνθήκες (conditional local averaging filters), όπου ανήκει η μέθοδος των Lev, Zucker σύμφωνα με την οποία η τιμή του εικονοστοιχείου (i,j) αντικαθίσταται με τη μέση τιμή των εικονοστοιχείων της γειτονιάς του:

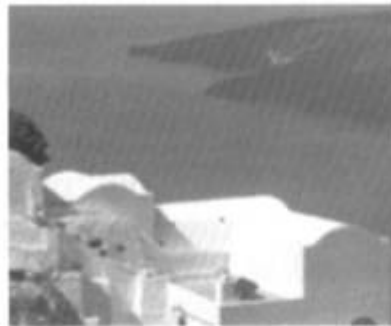
$$I'(i, j) = \frac{1}{n} \sum_{(x,y) \in S} I(x, y)$$

όπου $S = \{I(x, y) \in N : |I(i, j) - I(x, y)| < T\}$

και n το πλήθος των στοιχείων του S .



(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 1: Εφαρμογή φίλτρων μέσης τιμής (α) Αρχική εικόνα με θόρυβο, (β) φίλτρο 3×3 (γ) φίλτρο 5×5 και (δ) εφαρμογή του φίλτρου της μάσκας εξομάλυνσης.

ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΑΙΑΣ ΤΙΜΗΣ (median FILTER)

Το φιλτράρισμα με ένα φίλτρο μεσαίας τιμής είναι μια μη γραμμική τεχνική. Η τιμή median ενός συνόλου A είναι ίση με τη μεσαία τιμή του συνόλου.

Συγκεκριμένα, έστω

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

το σύνολο με στοιχεία $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \in \mathbb{R}$.

Το φίλτρο μεσαίας τιμής χρησιμοποιείται για την εξομάλυνση (smoothing) των ακμών και τη μείωση του θορύβου μιας εικόνας.

ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΑΙΑΣ ΤΙΜΗΣ (median FILTER)

Το median του A ισούται με

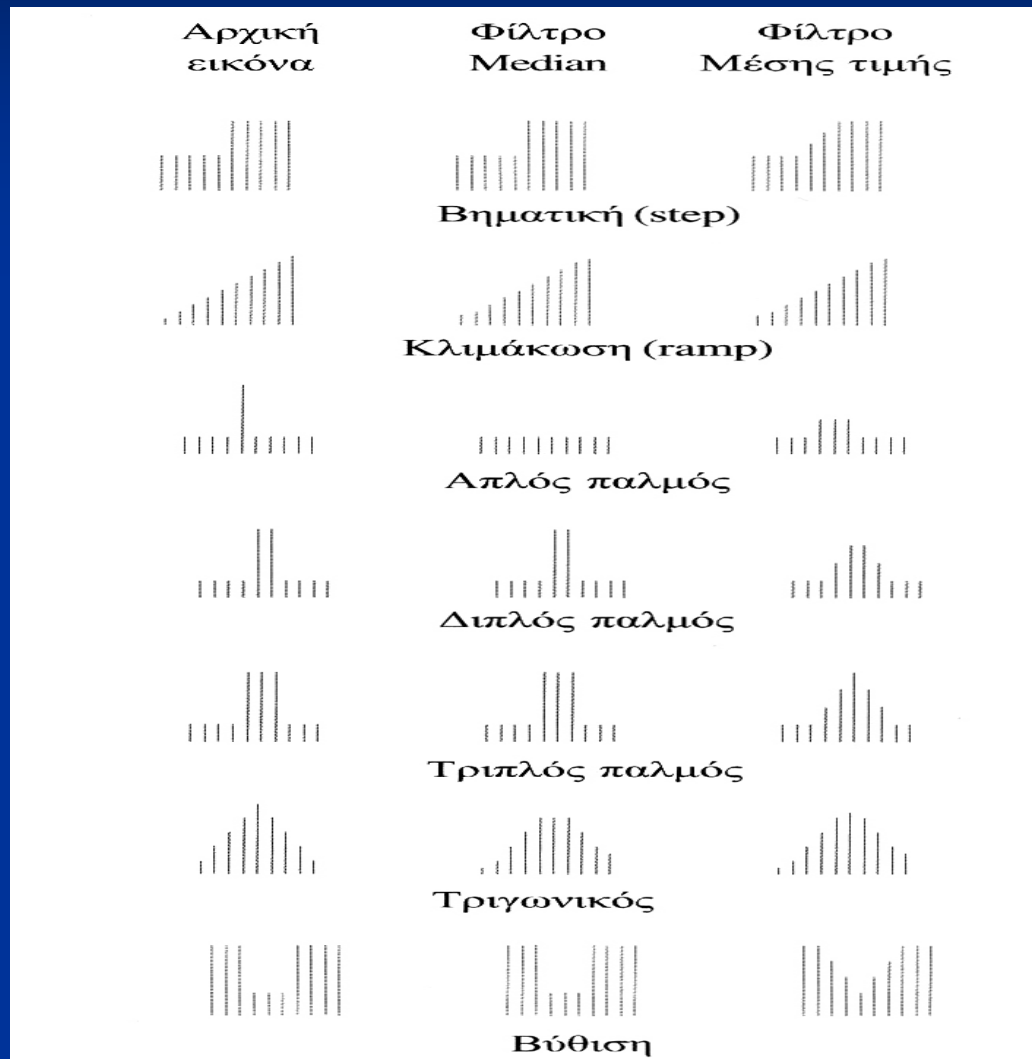
$$\text{median}(A) = \begin{cases} a_{\frac{n+1}{2}} \lfloor n, \text{περιττος} \\ \frac{1}{2} \left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1} \right) \lfloor n, \text{αρτιος} \end{cases}$$

Για παράδειγμα $\text{median}\{4,3,5,8,2\} = 4$,
 $\text{median}\{4,3,5,8,2,6\} = 4.5$

Από τον ορισμό του median προκύπτει:

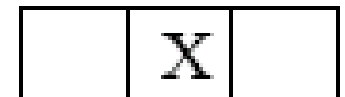
- ✓ $\text{median}(k+A) = k + \text{median}(A)$
- ✓ $\text{median}(k \cdot A) = k \cdot \text{median}(A)$
- ✓ $\text{median}(A+B) \neq \text{median}(A) + \text{median}(B)$

ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΑΙΑΣ ΤΙΜΗΣ (median FILTER)



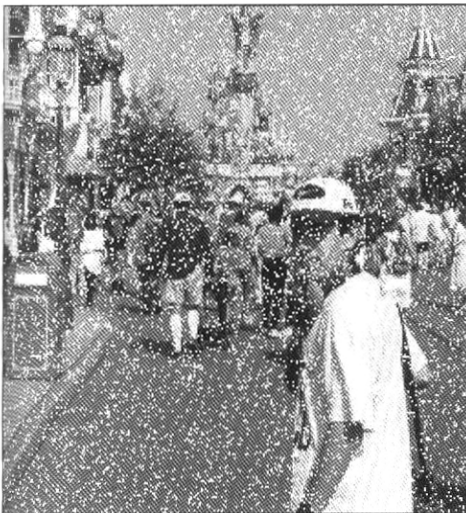
Εφαρμογή
του
φίλτρου
median σε
μονοδιάστα
τα σήματα.

η ακτίνα του
παραθύρου είναι ίση
με ένα, δηλαδή έχει
τη μορφή



ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΑΙΑΣ ΤΙΜΗΣ (median FILTER)

- ✓ Τα φίλτρα median μπορούν να θεωρηθούν ως ειδική περίπτωση των φίλτρων rank (κατάταξης).



(α)



(β)

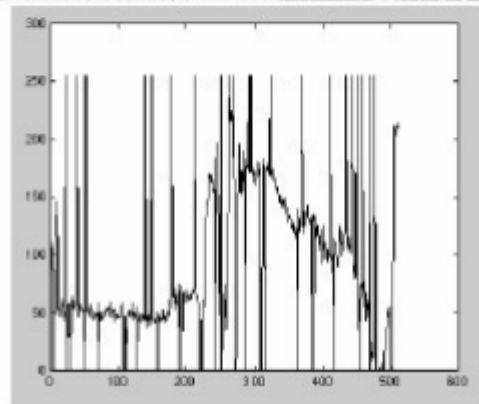
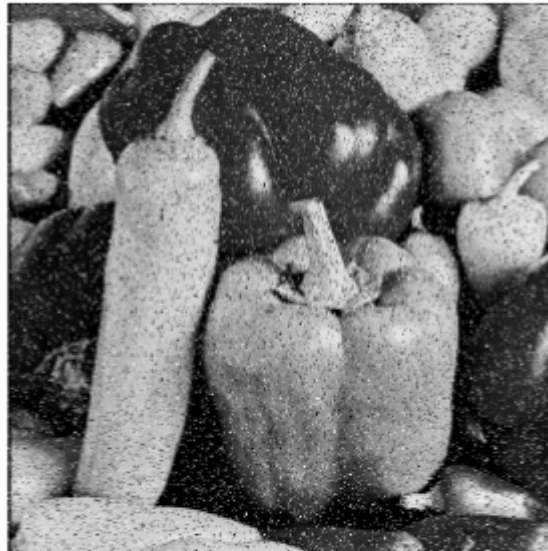
Εφαρμογή φίλτρου
median

(α) αρχική εικόνα
με κρουστικό
θόρυβο,

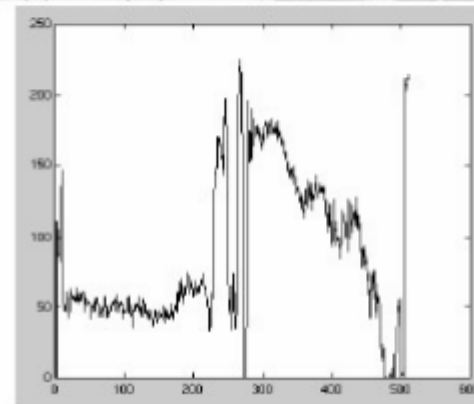
(β) αποτέλεσμα της
εφαρμογής ενός
φίλτρου median
ακτίνασης με ένα.

ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΑΙΑΣ ΤΙΜΗΣ (median FILTER)

Salt-and-pepper noise



Median filtered



ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΑΙΑΣ ΤΙΜΗΣ (median FILTER)



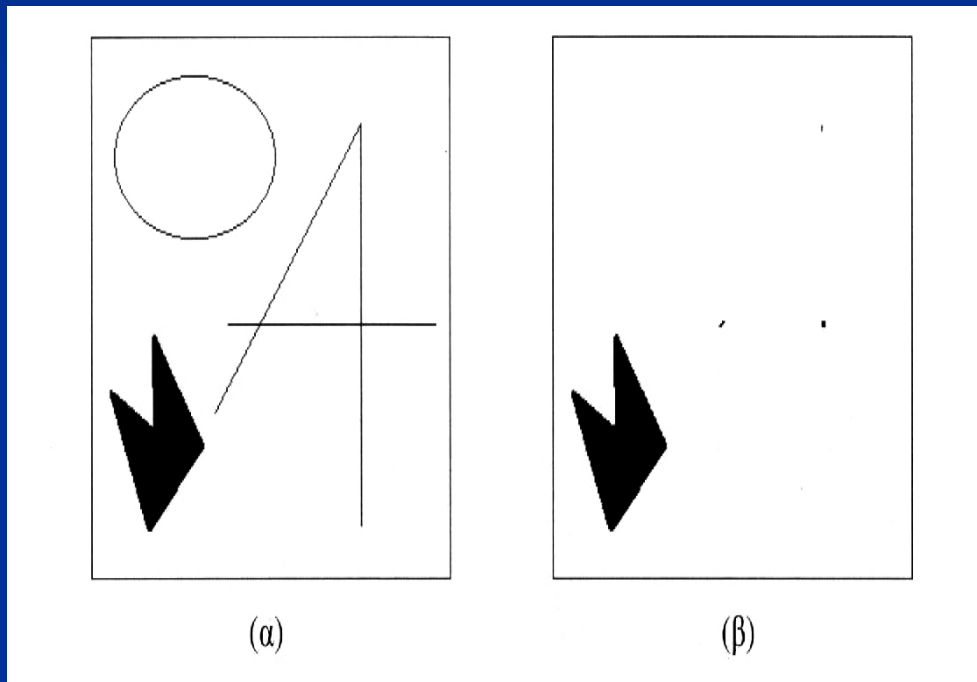
(a) 20% salt & pepper noise



(b) After median filtering



ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΑΙΑΣ ΤΙΜΗΣ (median FILTER)



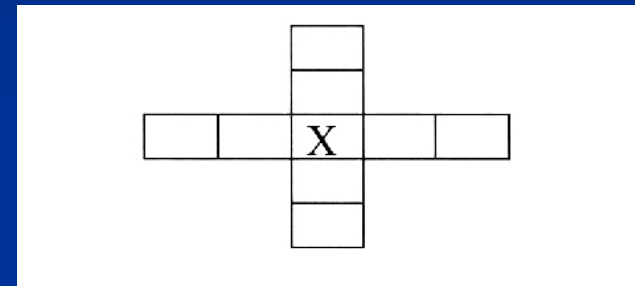
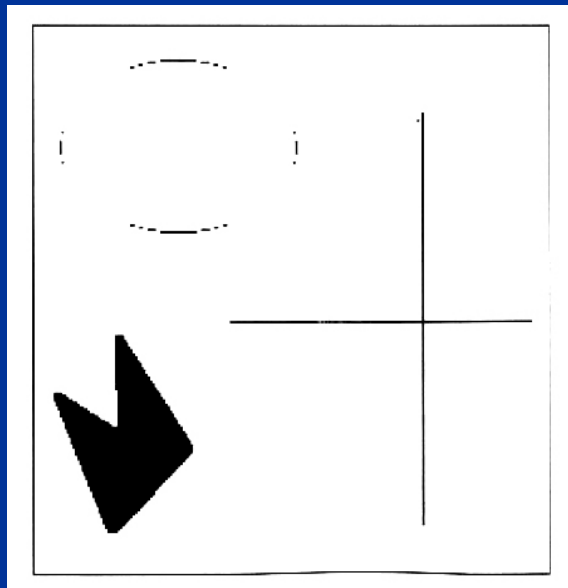
Σχήμα 5: Εφαρμογή φίλτρου median:

(α) αρχική εικόνα με θόρυβο και λεπτές γραμμές

(β) αποτέλεσμα της εφαρμογής ενός φίλτρου median ακτίνας ίσης με ένα.

ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΑΙΑΣ ΤΙΜΗΣ (median FILTER)

Εναλλακτική
μορφή μάσκας.



Εφαρμογή φίλτρου median
με γειτονιά αυτή του
προηγούμενου σχήματος

ΦΙΛΤΡΑ $\min$ και $\max$

- ✓ Τα φίλτρα $\min$ και $\max$ (ελαχίστου και μεγίστου) είναι μη γραμμικά φίλτρα τάξης.
- Το φίλτρο ελαχίστου έχει ως αποτέλεσμα να απλώνει μαύρες περιοχές και να συρρικνώνει λευκές.
- Το φίλτρο μεγίστου απλώνει λευκές περιοχές και συρρικνώνει μαύρες.

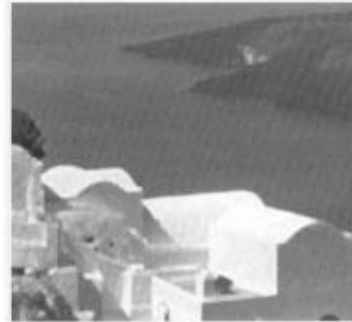
ΦΙΛΤΡΑ $\min$ και $\max$



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 8: Υλοποίηση των φίλτρων $\min/\max$

ΦΙΛΤΡΟ *max / median*

Διατήρηση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών

$$y_{m_1, m_2, \dots, m_N} = \max(z_1, z_2, \dots, z_k)$$

$$z_i = \text{rank}[S_i] \quad \text{π.χ. median}$$

ΦΙΛΤΡΟ *max / median*

Τα υβριδικά φίλτρα *max/median* ανήκουν και αυτά στην κατηγορία των φίλτρων τάξης (*ranked order filters*). η απόκριση ενός *max/ranked* φίλτρου στο N -δισδιάστατο χώρο ορίζεται ως

$$y_{m_1, m_2, \dots, m_N} = \max(z_1, z_2, \dots, z_k)$$

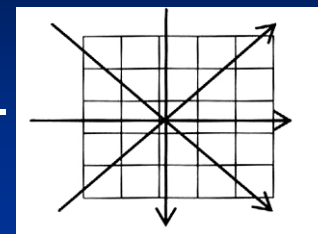
όπου τα z_i είναι το χαρακτηριστικό τάξης του υποσυνόλου i μιας γειτονιάς. Δηλαδή

$$z_i = \text{rank}[S_i]$$

με k το πλήθος των υποσυνόλων και S_i , το υποσύνολο i .

ΦΙΛΤΡΟ max / median

Οι τέσσερις ευθείες των υποσυνόλων.



Αν ορίσουμε με $a_{m,n}$ και $y_{m,n}$ την είσοδο και την έξοδο αντίστοιχα ενός $2N+1$ max/median φίλτρου στη θέση (m,n) τότε

$$y_{m,n} = \max [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

όπου

$$z_1 = \text{median}(a_{m,n-N}, \dots, a_{m,n}, \dots, a_{m,n+N})$$

$$z_2 = \text{median}(a_{m-N,n}, \dots, a_{m,n}, \dots, a_{m+N,n})$$

$$z_3 = \text{median}(a_{m+N,n-N}, \dots, a_{m,n}, \dots, a_{m-N,n+N})$$

$$z_4 = \text{median}(a_{m-N,n-N}, \dots, a_{m,n}, \dots, a_{m+N,n+N})$$

Άρα για ένα παράθυρο, διαστάσεων $(2N + 1) \times (2N + 1)$, το φίλτρο max/median χρησιμοποιεί $8N + 1$ τιμές.

ΦΙΛΤΡΟ *max / median*

Για παράδειγμα, αν το παράθυρο είναι ίσο με

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

τότε

$$z_1 = \text{median}(4 \ 5 \ 2) = 4, \quad z_2 = \text{median}(1 \ 5 \ 3) = 3,$$

$$z_3 = \text{median}(0 \ 5 \ 5) = 5, \quad z_4 = \text{median}(2 \ 5 \ 7) = 5,$$

οπότε η έξοδος του *max/median* φίλτρου ισούται με

$$y_{n,n} = \max[4 \ 3 \ 5 \ 5] = 5$$

σε αντίθεση με το $\text{median}(C) = 3$.



(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 4.28 Εφαρμογή φίλτρων max/median: (α) Αρχική εικόνα με θόρυβο. Εφαρμογή φίλτρων: (β) median 3×3, (γ) max/median 3×3, και (δ) max/median 5×5

ΦΙΛΤΡΟ $\max / \text{median}$



(α)



(β)

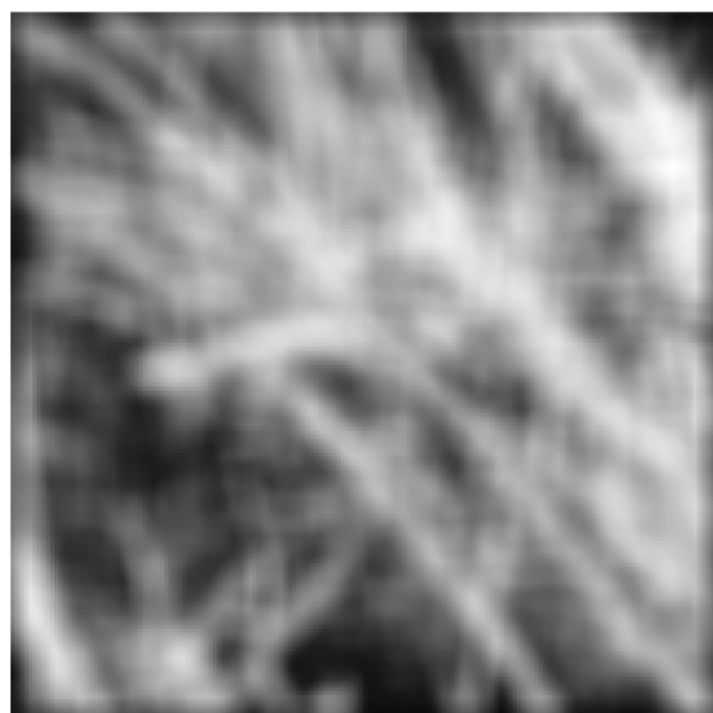


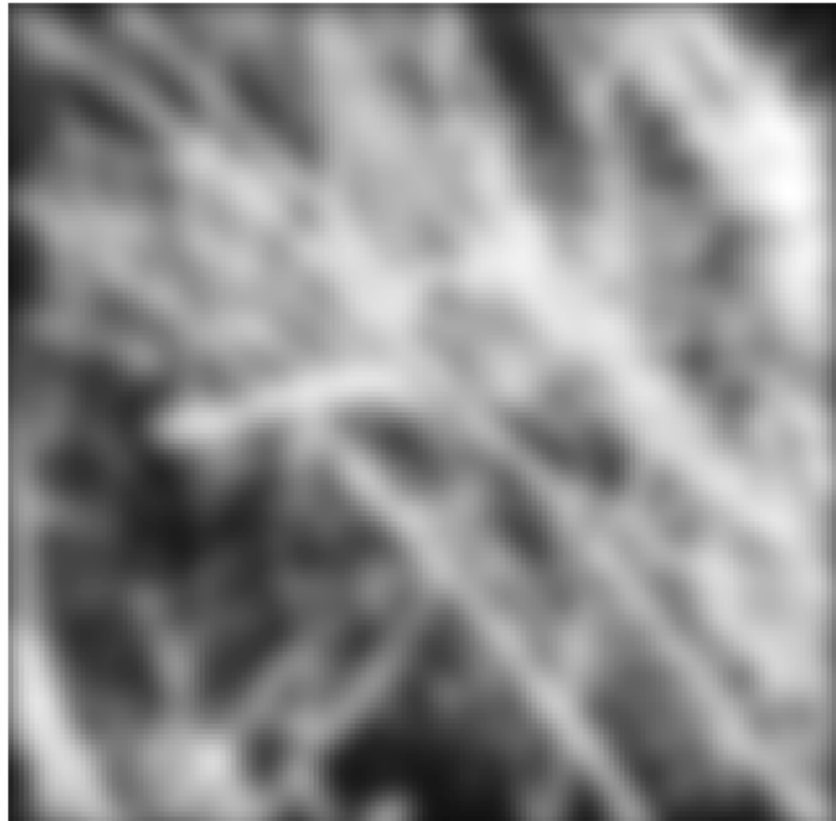
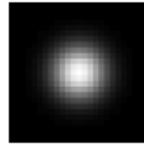
(γ)



(δ)

Σχήμα 11: Εφαρμογή φίλτρων $\max/\text{median}$: (α) Αρχική εικόνα με θόρυβο. Εφαρμογή φίλτρων: (β) $\text{median } 3 \times 3$, (γ) $\max/\text{median } 3 \times 3$ και, (δ) $\max/\text{median } 5 \times 5$.





ΦΙΛΤΡΑ GAUSS

Τα φίλτρα Gauss είναι βαθυπερατά (low-pass) φίλτρα και συνεπώς εκτός της ικανότητας φιλτραρίσματος θορύβου επιφέρουν θάμπτωση στην εικόνα.

- Για τον προσεγγιστικό σχεδιασμό των φίλτρων Gauss μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους συντελεστές του διωνυμικού αναπτύγματος:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

ΦΙΛΤΡΑ GAUSS

- Μια άλλη προσέγγιση στο σχεδιασμό φίλτρων Gauss είναι να υπολογίσουμε τα βάρη της μάσκας απευθείας από την ασυνεχή κατανομή Gauss:

$$g[i, j] = ce^{\frac{-(i^2 + j^2)}{2\sigma^2}}$$

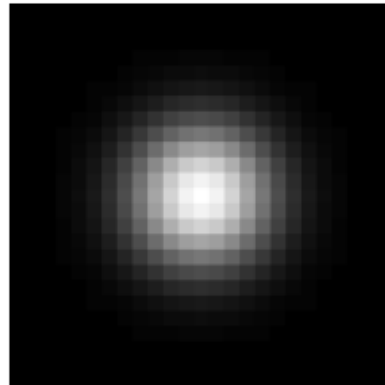
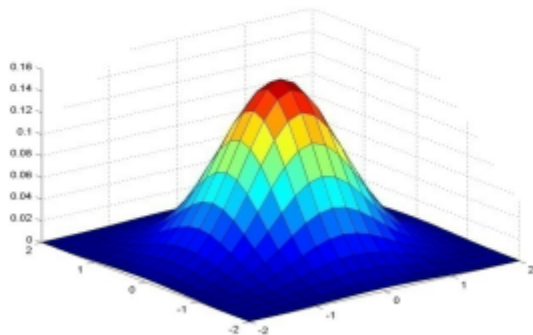
Όπου το c είναι σταθερά κανονικοποίησης. Έτσι:

$$\frac{g[i, j]}{c} = e^{\frac{-(i^2 + j^2)}{2\sigma^2}}$$

και επιλέγοντας μια τιμή για το σ^2 , μπορούμε να το υπολογίσουμε σε ένα $n \times n$ παράθυρο για να πάρουμε μια μάσκα για την οποία η τιμή στο $[0, 0]$ είναι 1.

ΦΙΛΤΡΑ GAUSS

$$G_{\sigma} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$



0.003	0.013	0.022	0.013	0.003
0.013	0.059	0.097	0.059	0.013
0.022	0.097	0.159	0.097	0.022
0.013	0.059	0.097	0.059	0.013
0.003	0.013	0.022	0.013	0.003

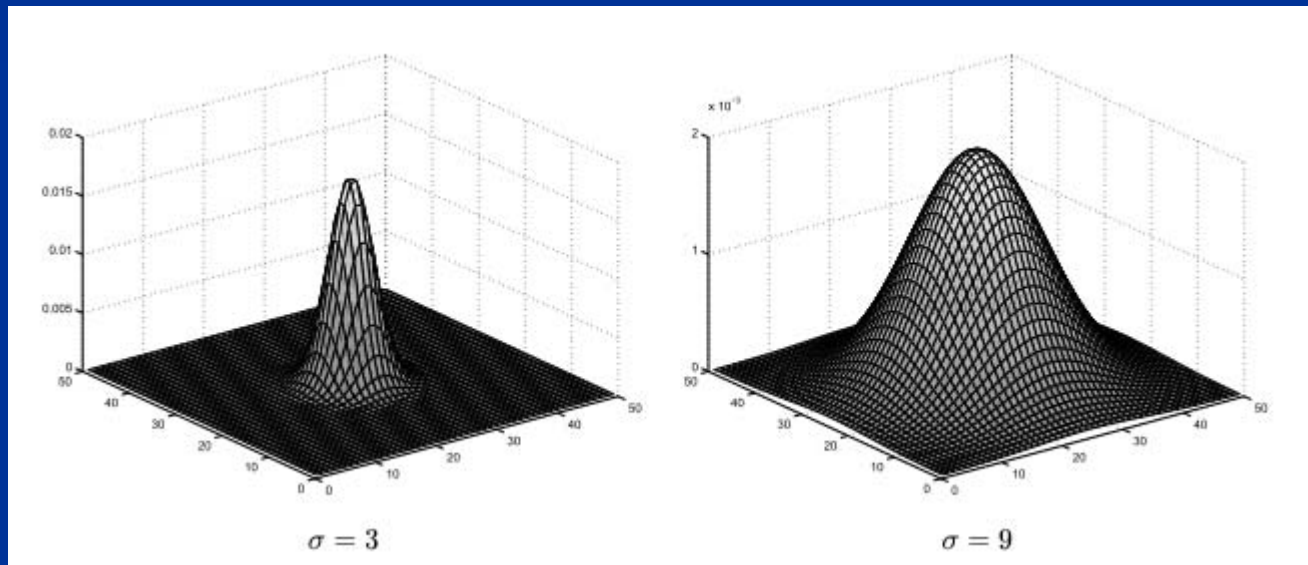
5 x 5, $\sigma = 1$

ΦΙΛΤΡΑ GAUSS

$[i,j]$	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3	0.011	0.039	0.082	0.105	0.082	0.039	0.011
-2	0.039	0.135	0.287	0.368	0.287	0.135	0.039
-1	0.082	0.287	0.606	0.779	0.606	0.287	0.082
0	0.105	0.368	0.779	1	0.779	0.368	0.105
1	0.082	0.287	0.606	0.779	0.606	0.287	0.082
2	0.039	0.135	0.287	0.368	0.287	0.135	0.039
3	0.011	0.039	0.082	0.105	0.082	0.039	0.011

$\Gamma_{\ell \alpha} \sigma^2 = 2 \kappa_{\alpha \ell}$
 $n=7$.

ΦΙΛΤΡΑ GAUSS



ΦΙΛΤΡΑ GAUSS



$5 \times 5, \sigma = 0.5$



$5 \times 5, \sigma = 2$



$11 \times 11, \sigma = 1$



$11 \times 11, \sigma = 5$