

# 9 – Ανάλυση Fourier

# Jean Baptiste Fourier (1768-1830)

- Είχε μια «τρελή» ιδέα (1807):
- *Κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να γραφτεί ως ζυγισμένο άθροισμα ημιτόνων διαφορετικών συχνοτήτων*
- ΔΕΝ ΤΟ ΠΙΣΤΕΥΕΤΕ;
  - Ούτε οι Lagrange, Laplace, Poisson και άλλα μεγάλα κεφάλια...
  - Μεταφράστηκε στα Αγγλικά το 1878!
- Αλλά είναι πραγματικότητα!
  - ονομάζεται σειρά Fourier

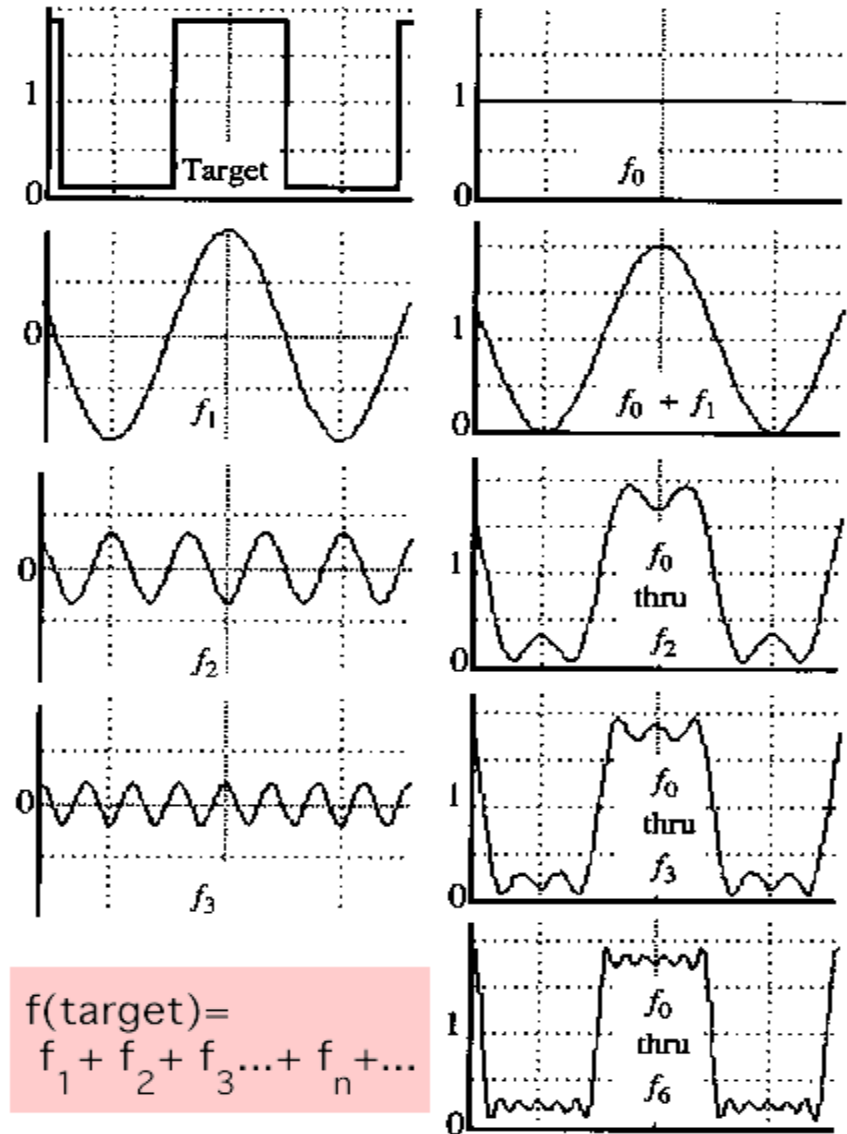


# Άθροισμα ημιτόνων

- Δομικό στοιχείο:

$$A \sin(\omega x + \phi)$$

- Προσθέστε αρκετά από αυτά και θα έχετε όποια  $f(x)$  θέλετε!
- Πόσοι βαθμοί ελευθερίας;
- Τι ελέγχει ο καθένας;
- Ποιός ελέγχει τη λεπτομέρεια ενός σήματος;



$$f(\text{target}) = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n + \dots$$

# Μετασχηματισμός Fourier

- Θέλουμε να καταλάβουμε τη συχνότητα  $\omega$  του σήματός μας. Ας παραμετροποιήσουμε με βάση το  $\omega$  αντί για το  $x$ :



- Για κάθε  $\omega$  από το 0 στο άπειρο, η  $F(\omega)$  περιέχει το πλάτος  $A$  και τη φάση  $\phi$   $A \sin(\omega x + \phi)$ 
  - Πως γίνεται αυτό; Χρήση μιγαδικών!

$$F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega)$$

$$A = \pm \sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{I(\omega)}{R(\omega)}$$

Μπορούμε να γυρίσουμε πίσω:

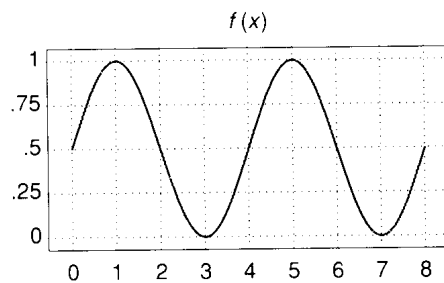


# Χρησιμότητα Μετασχηματισμού

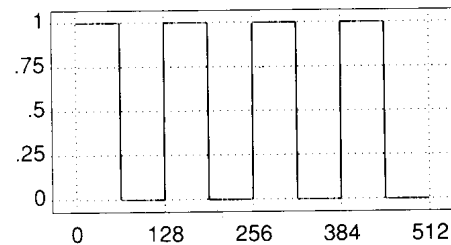
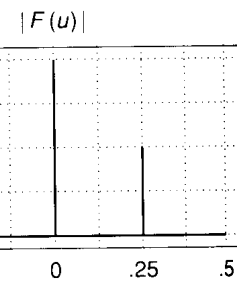
- Ανάλυση εικόνων
- Συμπίεση
- Ανακατασκευή
- Φιλτράρισμα

# Φάσμα συχνοτήτων

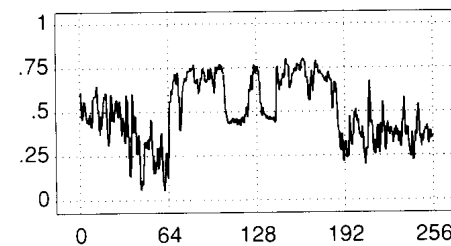
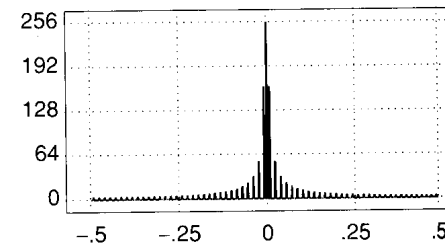
- Συνήθως αναπαριστούμε το πλάτος :



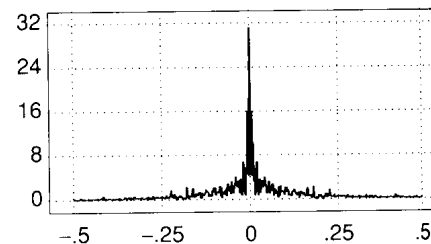
(a)



(b)



(c)



# Μαθηματική αναπαράσταση

$$\text{Fourier Transform : } F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

$$\text{Inverse Fourier Transform : } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

Σταθερά  
κανονικοποίησης  
(μπορεί να  
παραλειφθεί)

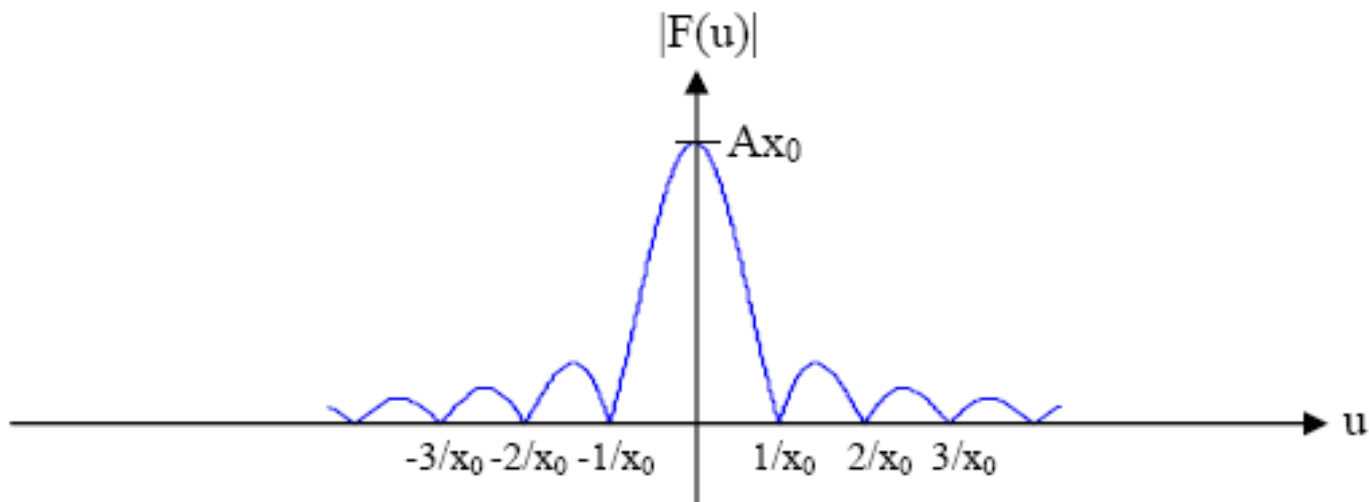
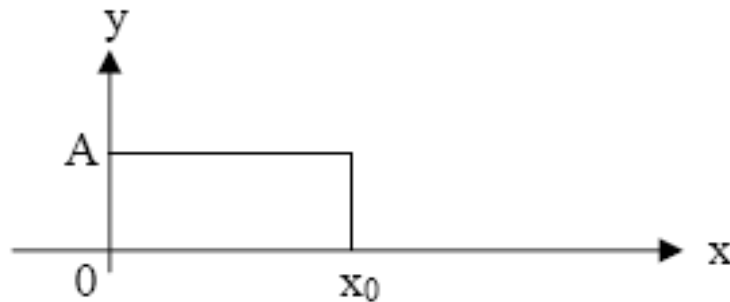
$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$$

# Επέκταση σε 2 διαστάσεις

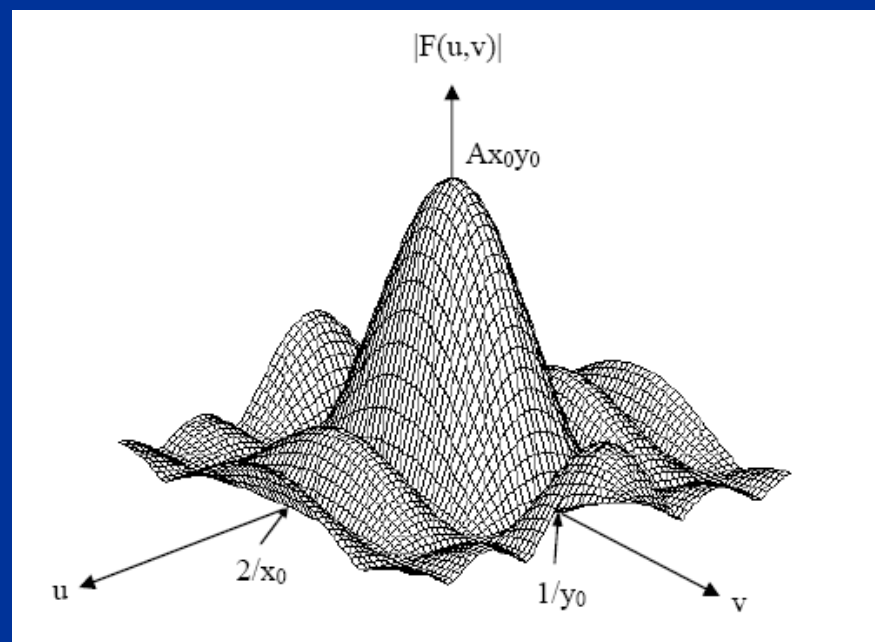
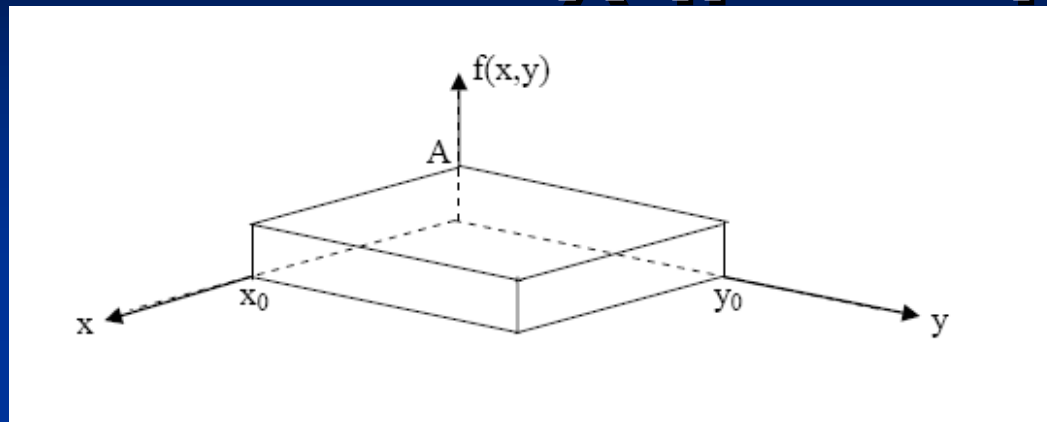
$$F(f(x,y)) = F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi ux} e^{-j2\pi vy} dx dy$$

$$F^{-1}(F(u,v)) = f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{j2\pi ux} e^{j2\pi vy} du dv$$

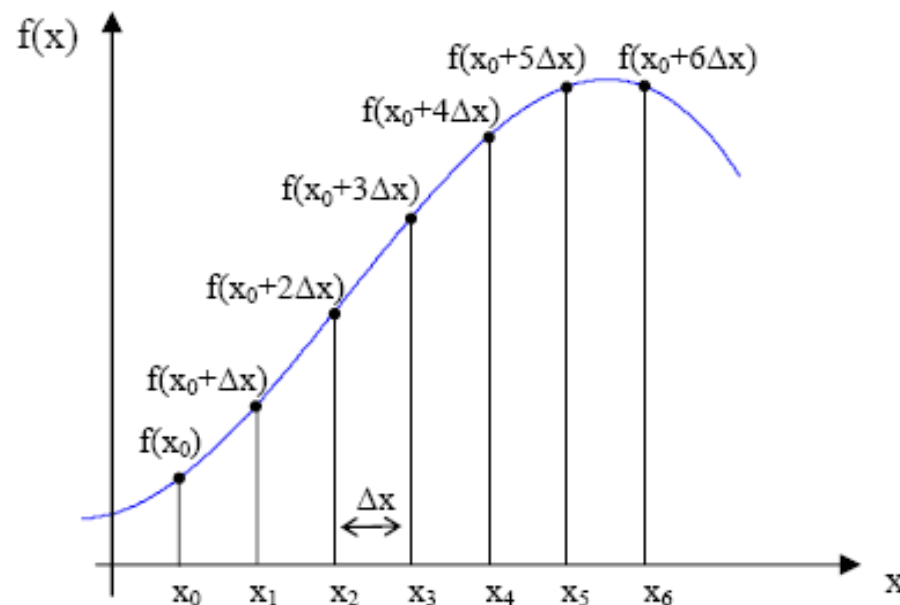
# 1-D Μετασχηματισμός



# 2-Δ Μετασχηματισμός



# 1-Δ Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier



DFT:

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j2\pi un/N} \quad \text{για } u = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

IDFT:

$$f(n) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi un/N} \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

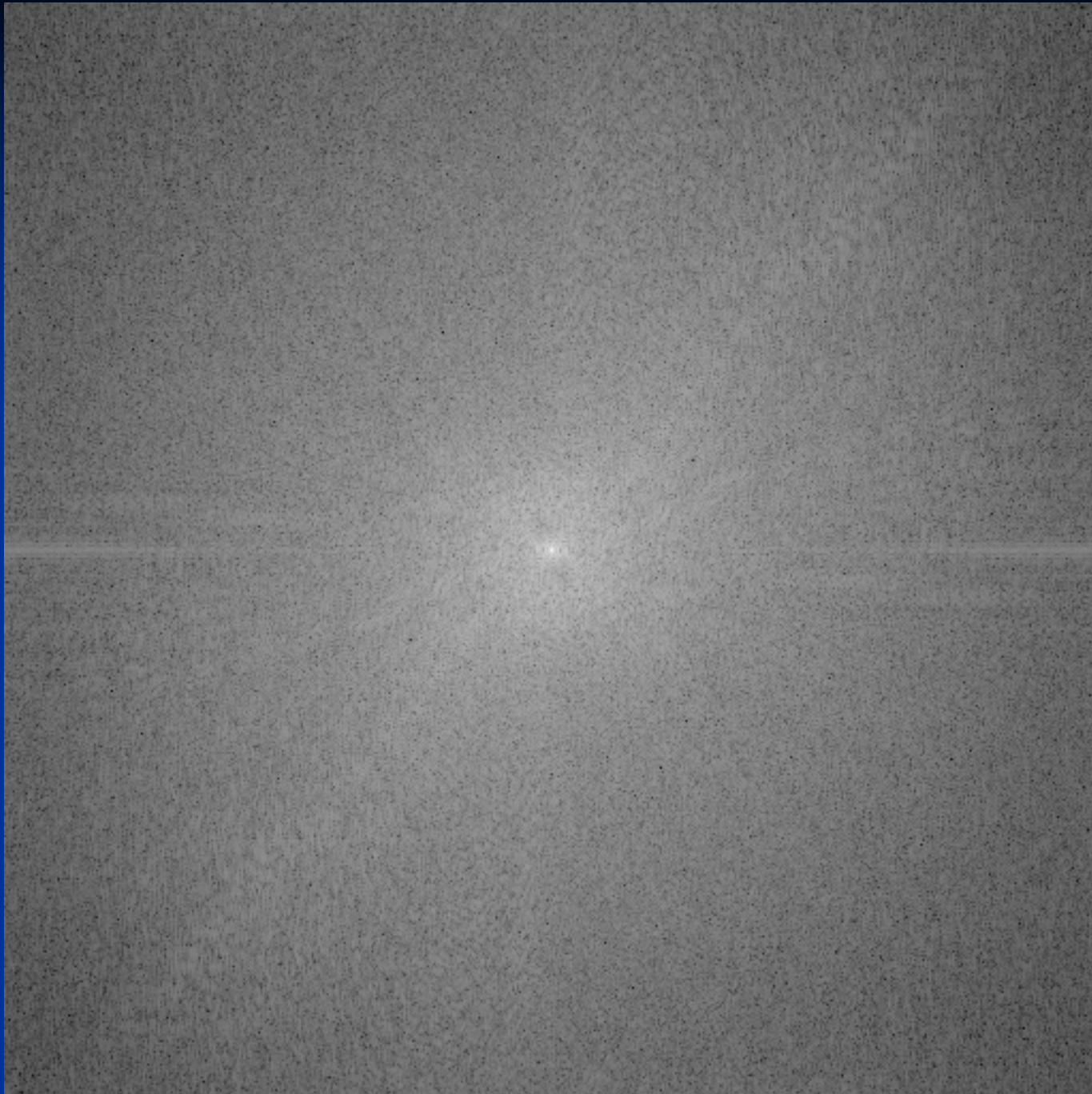
# 2-Δ Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) e^{-j2\pi(um/M + vn/N)} ; \quad u = 0, 1, \dots, M-1, \quad v = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f(m,n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi(um/M + vn/N)} ; \quad m = 0, 1, \dots, M-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$



Πλάτος

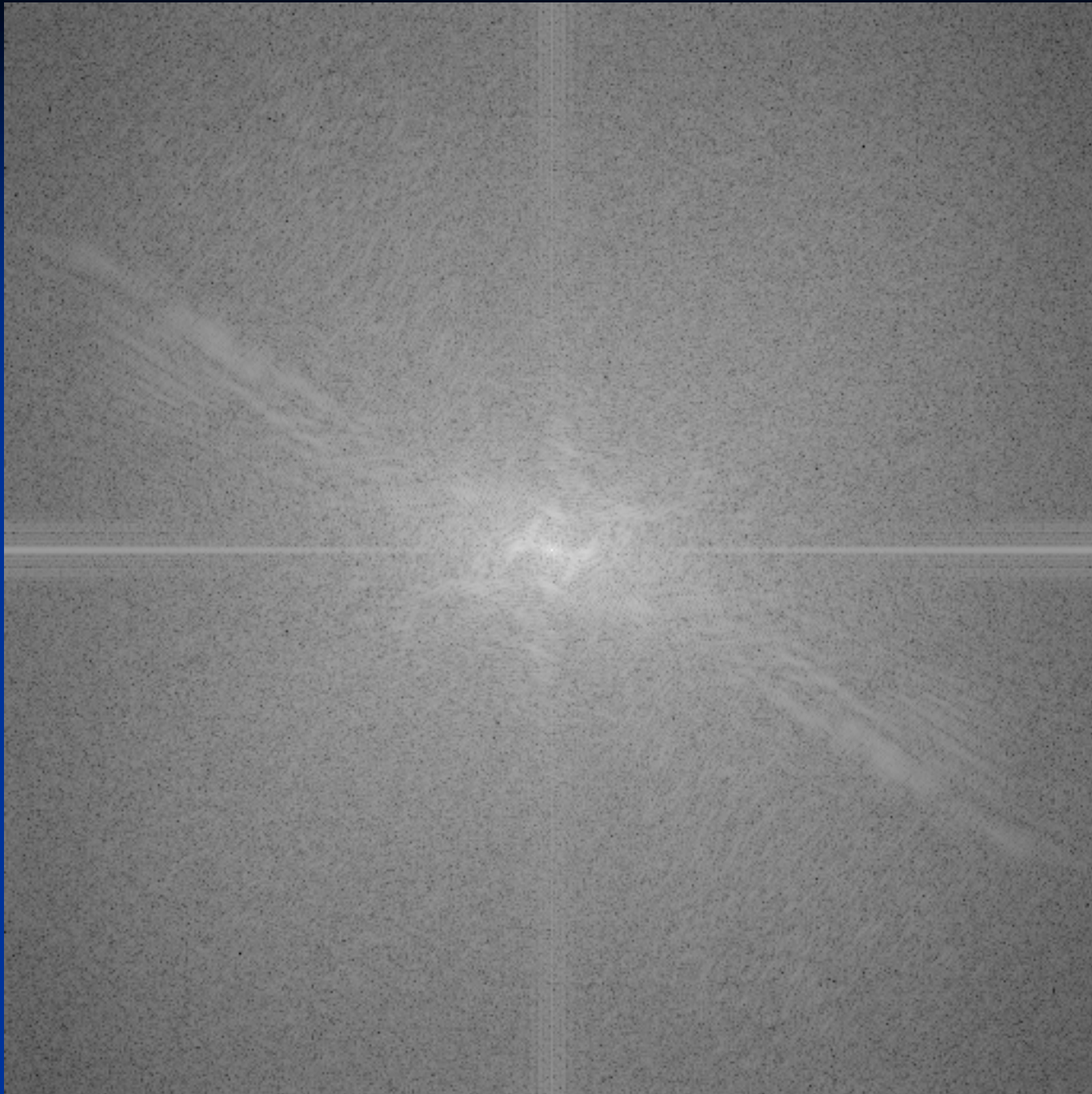


Φάση





πλάτος



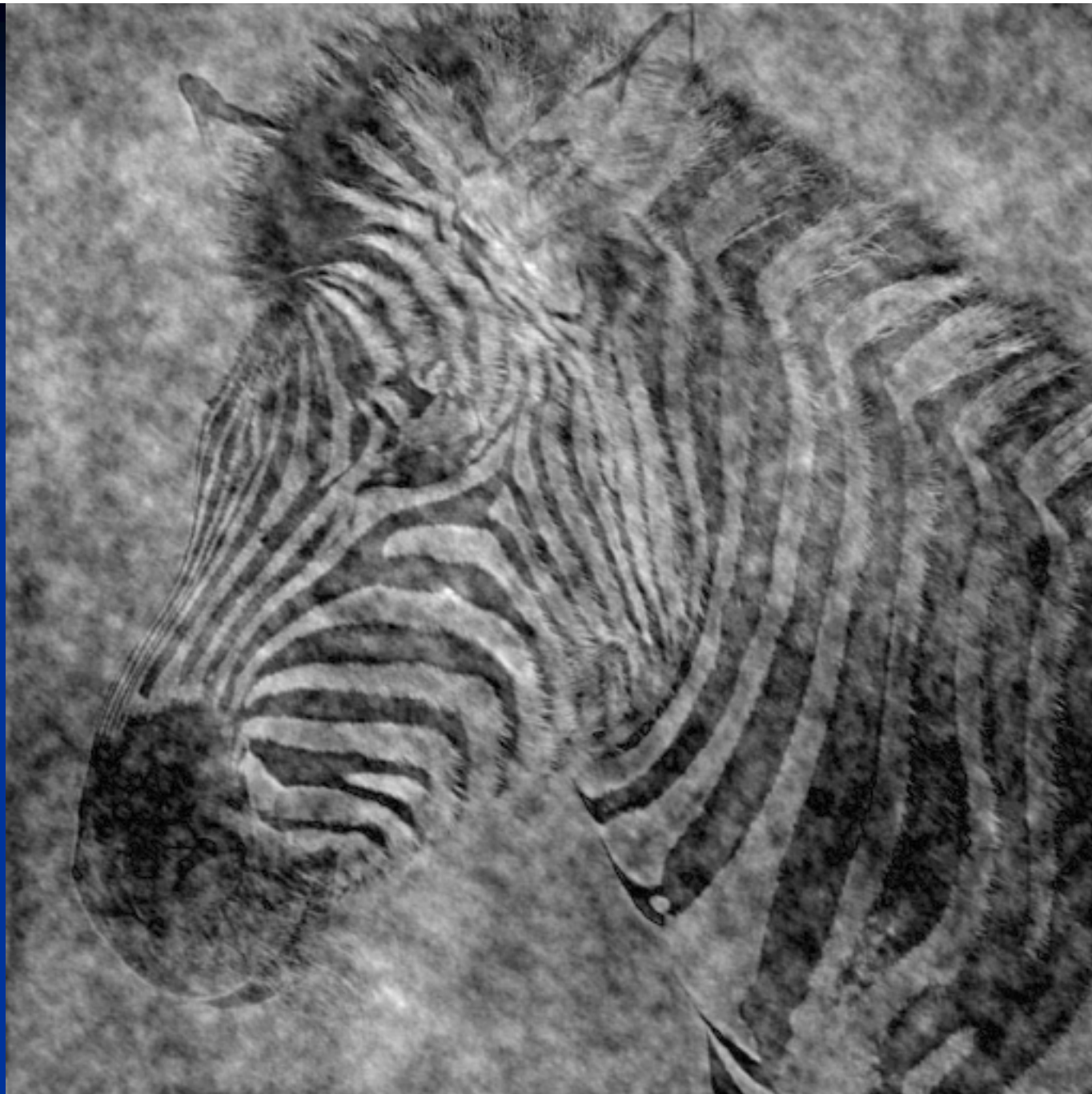
φάση



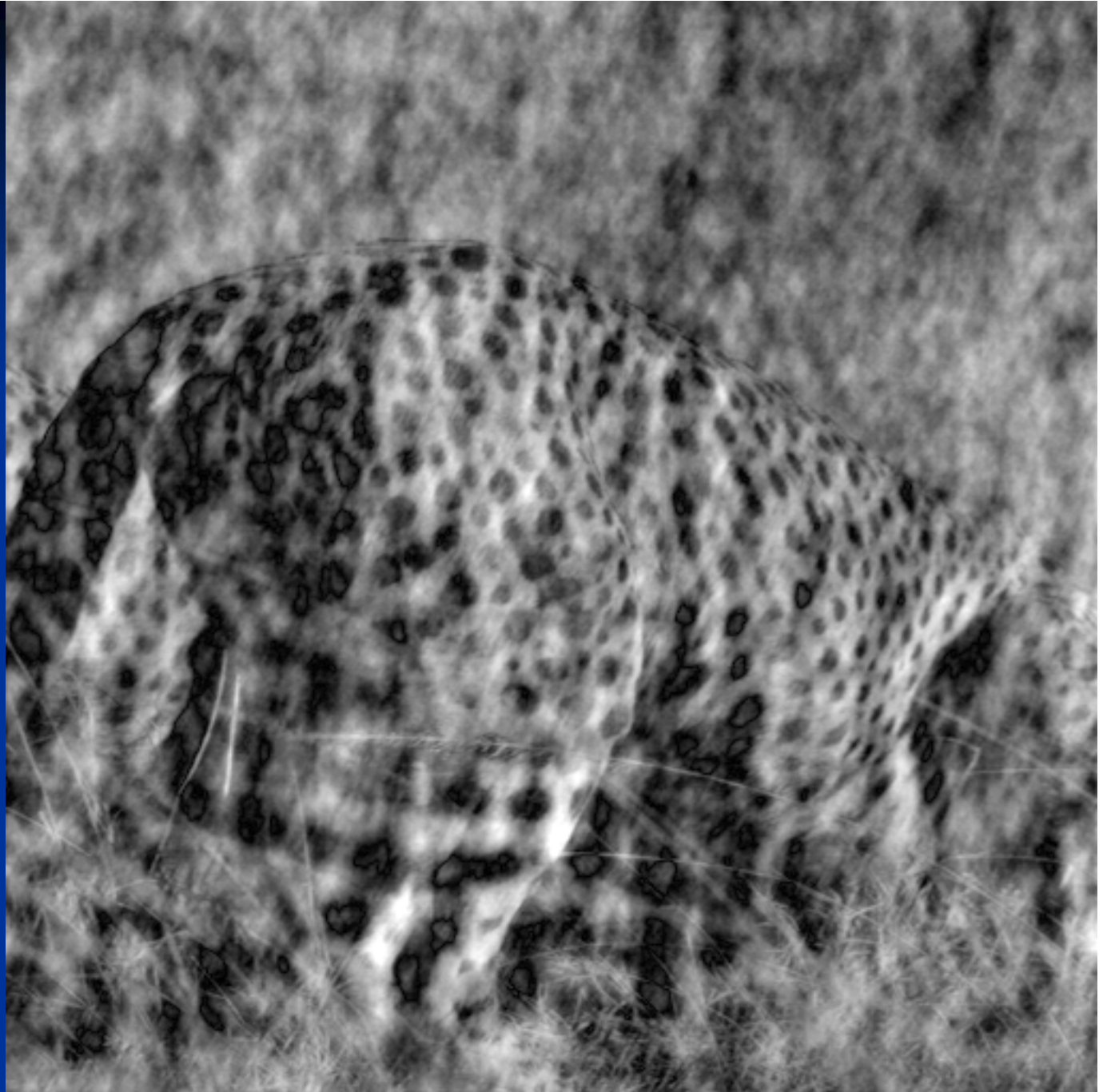
# Χαρακτηριστικές ιδιότητες

- Το φάσμα πλάτους για διαφορετικές εικόνες πολύ παρόμοιο
  - Μεγάλες τιμές για μικρές συχνότητες, εξασθένηση για μεγάλες
- Η περισσότερη πληροφορία βρίσκεται στη φάση, όχι στο πλάτος
  - Φαίνεται να ισχύει στη γενική περίπτωση
  - Δεν είναι σαφές γιατί

Ανακατασκευή:  
Φάση zebra,  
πλάτος cheetah



Ανακατασκευή:  
Φάση cheetah,  
πλάτος zebra



# Βαθυπερατά Φίλτρα

- Διδιάστατα Φίλτρα

- Κατωδιαβατό φιλτράρισμα – ιδανικό φίλτρο

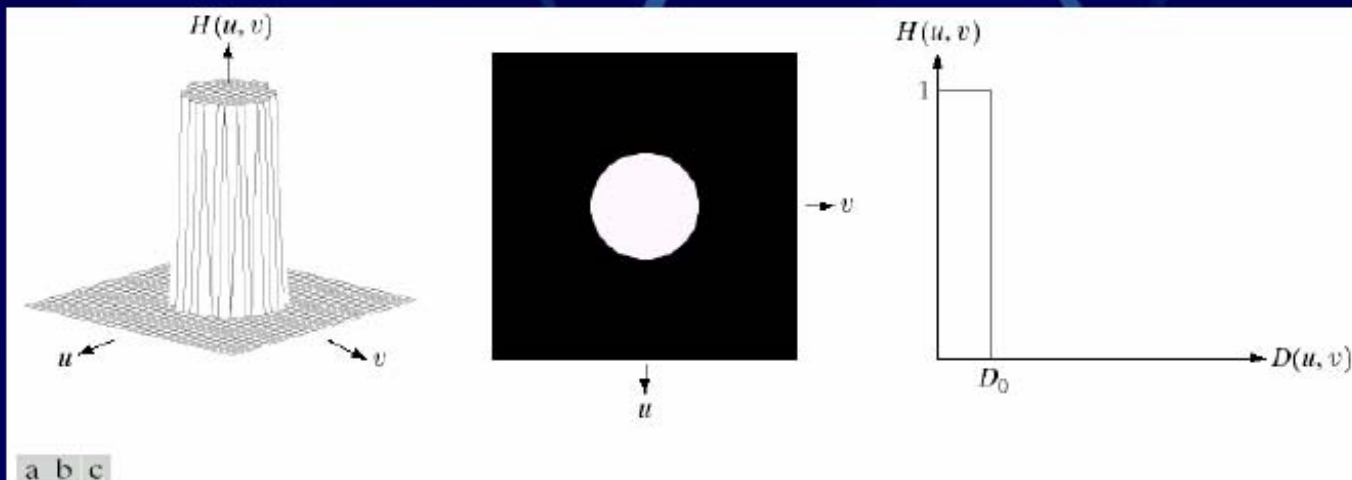
$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

- Butterworth φίλτρο

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

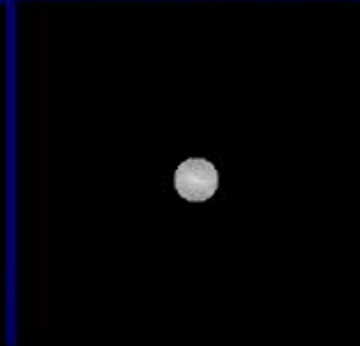
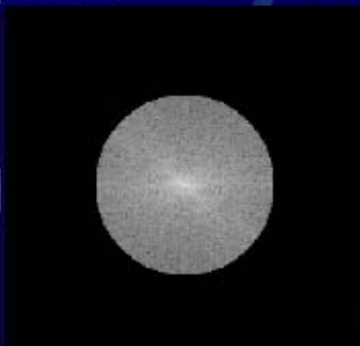
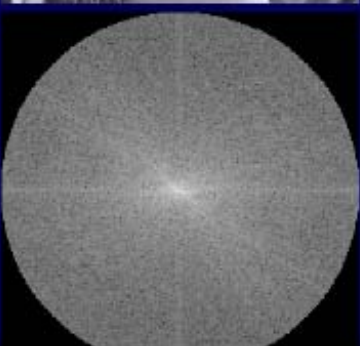
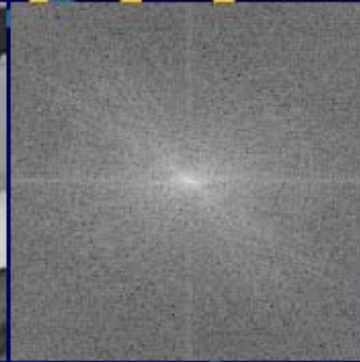
- Κατωδιαβατό Gaussian φίλτρο

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$



**FIGURE 4.10** (a) Perspective plot of an ideal lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross section.

# Βαθυπερατά Φίλτρα



# Υψιπερατά Φίλτρα

- Διδιάστατα Φίλτρα
  - Ανωδιαβατό φιλτράρισμα  
ιδανικό φίλτρο

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

- Butterworth φίλτρο

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$

- Ανωδιαβατό Gaussian φίλτρο

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v) / 2D_0^2}$$

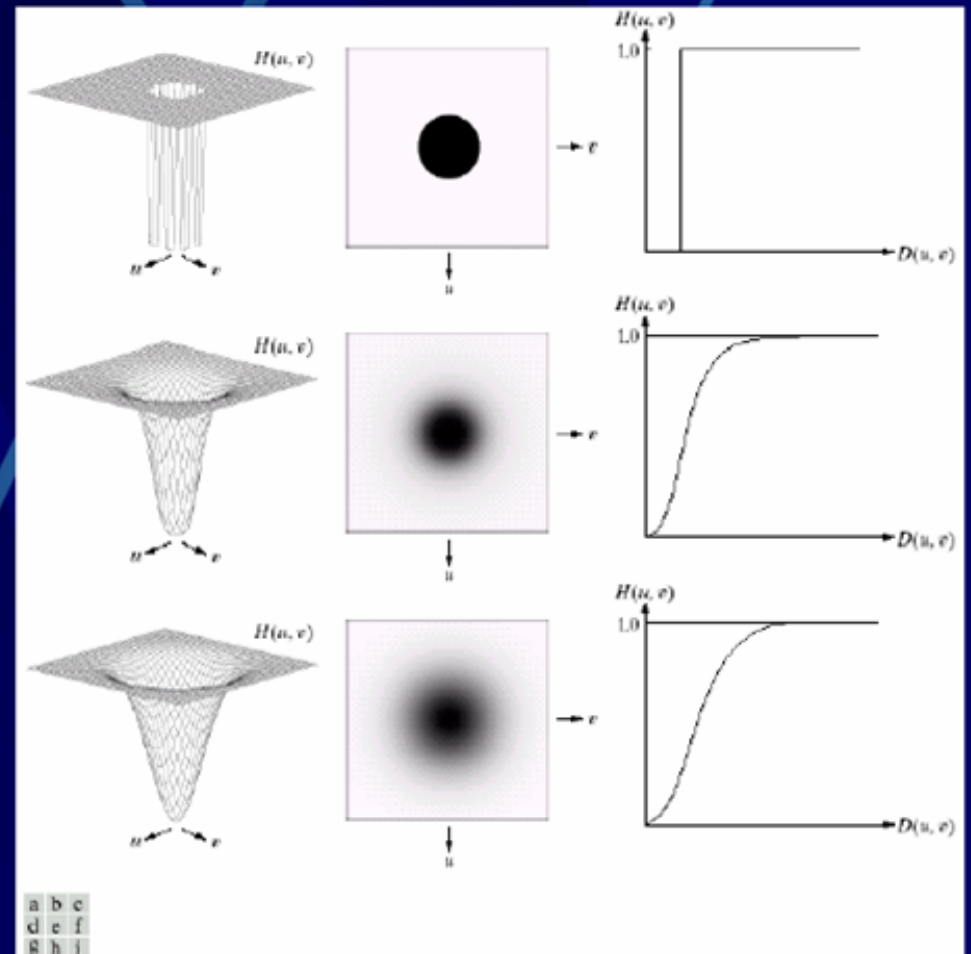


FIGURE 4.22 Top row: Perspective plot, image representation, and cross section of a typical ideal highpass filter. Middle and bottom rows: The same sequence for typical Butterworth and Gaussian highpass filters.

# Υψιπερατά Φίλτρα

