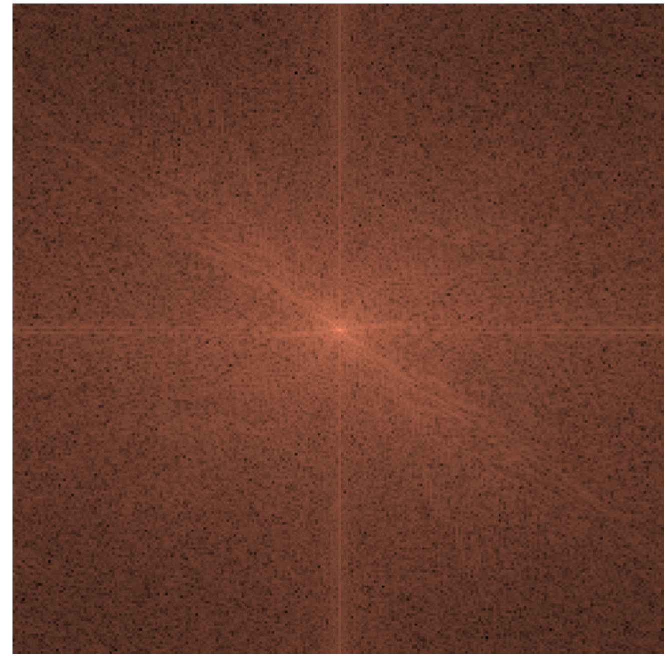
Advances in Digital Imaging and Computer Vision

Lecture and Lab 5th lecture

Κώστας Μαριάς
Αναπληρωτής Καθηγητής Επεξεργασίας Εικόνας

Βασικές έννοιες Μετασχηματισμού Fourier
Basic Concepts of Fourier Transform

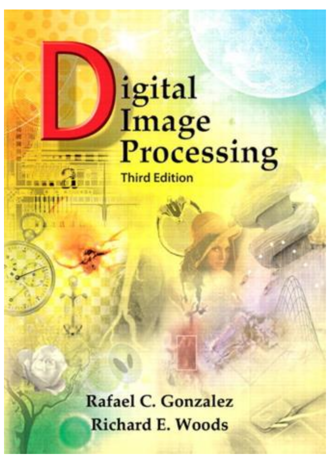


Basic special filtering and processing

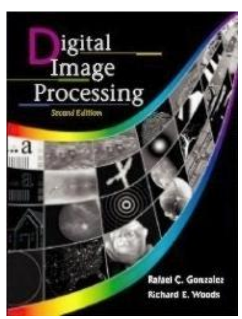
For ERASMUS (and all the rest) please study chapter 4 (page 199) from Gonzalez and Woods book (3rd edition).

Αναφορές/References

- An Introduction to Digital Image Processing with Matlab, Alasdair McAndrew
- Peters, Richard Alan, II, "The Fourier Transform", Lectures on Image Processing, Vanderbilt University, Nashville, TN, April 2008, Available on the web at the Internet Archive, http://www.archive.org/details/Lectures_on_Image_Processing.
- Nicolas Tsapatsoulis, “Βελτίωση Ποιότητας Εικόνας: Επεξεργασία στο πεδίο της Συχνότητας, Lecture notes in Digital Image Processing”, Image Processing Lectures, 2005.
-



“Digital Image Processing”, Rafael C.Gonzalez & Richard E. Woods, Addison-Wesley, 3rd edition

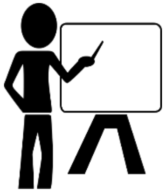


“Digital Image Processing”, Rafael C. Gonzalez & Richard E. Woods, Addison-Wesley, 2002

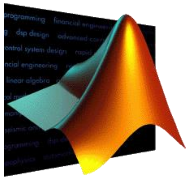
Περιεχόμενα Διάλεξης

- Μετασχηματισμός Fourier
- Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier στην εικόνα.
- Θεωρητική περιγραφή και παραδείγματα Matlab

Για την καλύτερη παρακολούθηση έχουμε 3 ειδών διαφάνειες: Βασική πληροφορία (για προπτυχιακούς), Παραδείγματα Matlab για προπτυχιακούς και προχωρημένα ερευνητικά θέματα (research)



Basic



Matlab

Research

Συστήματα στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας

x(t) → **H(s) = Ƒ {h(t)}** → y(t)

X(s) =Ƒ{x(t)} Y(s)= Ƒ{y(t)}

- x(t): *σήμα εισόδου στο πεδίο του χρόνου*, X(s) *στο πεδίο της συχνότητας*
- y(t): *σήμα εξόδου στο πεδίο του χρόνου*, Y(s) *στο πεδίο της συχνότητας*
- h(t): *κρουστική απόκριση του συστήματος*, H(s): *απόκριση συχνότητας*

<u>Εξισώσεις του συστήματος:</u>

Στο πεδίο του χρόνου: $y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) dt$

Στο πεδίο της συχνότητας: $Y(s) = X(s) \cdot H(s)$

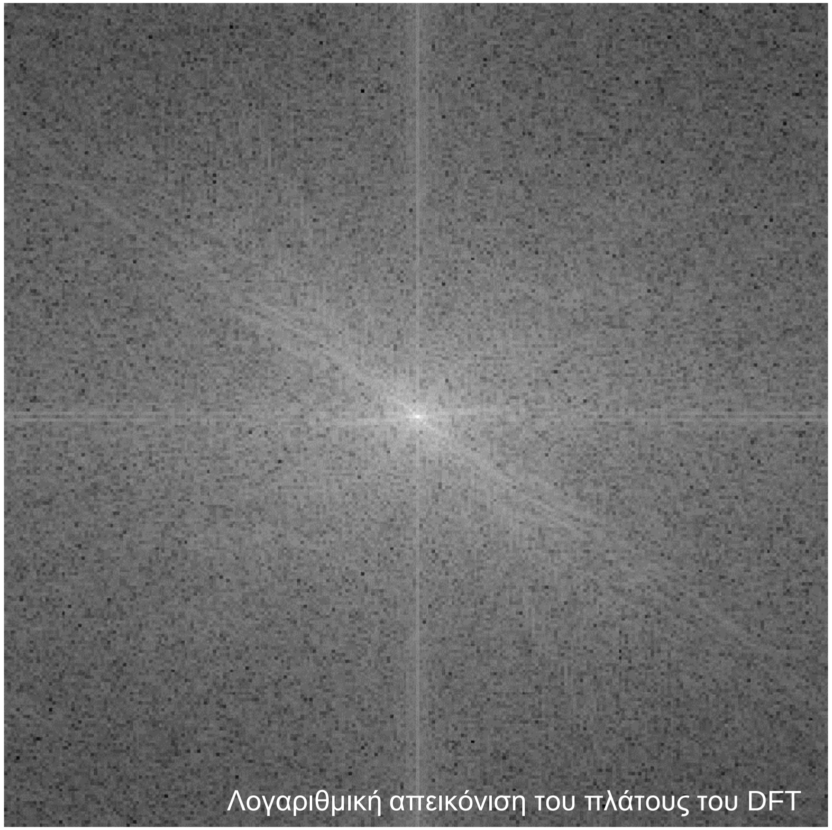
Κρουστική Απόκριση: y(t) == h(t) για x(t) == δ(t)

Μετασχηματισμοί στο πεδίο των συχνοτήτων

- Συνήθεις μετασχηματισμοί: *DFT (FFT), DCT*
- Γιατί οι μετασχηματισμοί στο πεδίο των συχνοτήτων είναι χρήσιμοι στην επεξεργασία εικόνας;
  - *Βελτίωση εικόνας λαμβάνοντας υπόψιν το συχνοτικό περιεχόμενο*
  - *Φιλτράρισμα, αφαίρεση θορύβου, κυκλική μετατόπιση, συμπίεση, περιγραφή σχήματος*
  - *Πλεονεκτήματα: μικρότερη υπολογιστική πολυπλοκότητα / εναλλακτική ερμηνεία*

Η μορφή της εικόνας στο πεδίο των συχνοτήτων

- Αριστερά φαίνεται το συχνοτικό περιεχόμενο του DFT (συγκέντρωση ενέργειας γύρω από το (0,0))

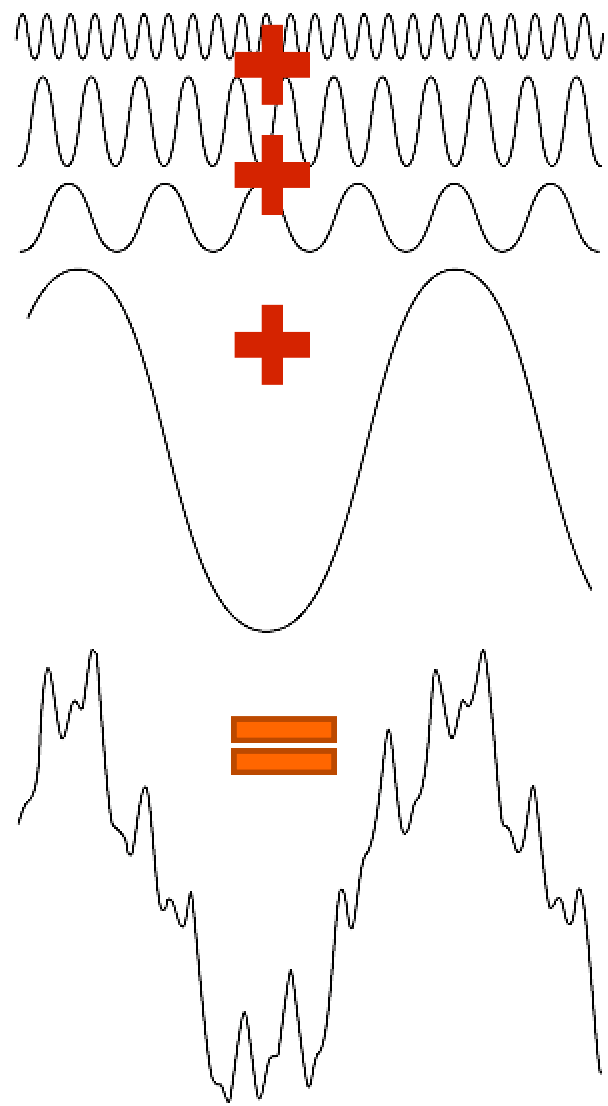


Ποιος ήταν ο Fourier?

- Ο *Jean Baptiste Joseph Fourier* γεννήθηκε στη Γαλλία το1768 και ήταν μαθηματικός/φυσικός.
- Στο μεγάλο του έργο συμπεριλαμβάνονται η ανάλυση Fourier:
- Κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ημιτόνων και συνημίτονων διαφορετικών συχνοτήτων, κάθε ένα από τα οποία είναι πολλαπλασιασμένο με κάποιο συντελεστή (σειρά *Fourier*).

Μετασχηματισμός Fourier

- Η ανάλυση Fourier προτάθηκε το 1807…
- Η συνάρτηση (κάτω) μπορεί να παραχθεί από το άθροισμα των 4 σημάτων (πάνω).



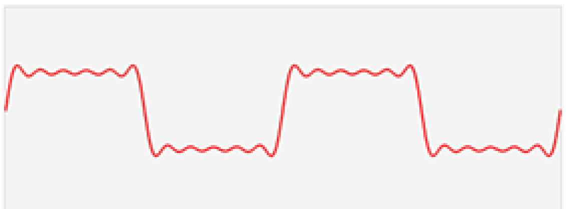
Μετασχηματισμός Fourier

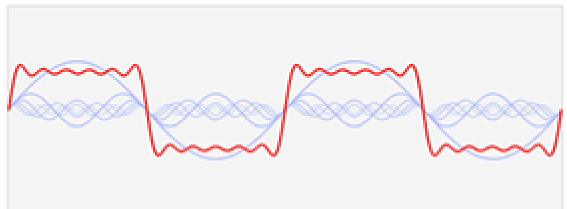
- Ο Μετασχηματισμός Fourier αποσυνθέτει ένα σήμα στις συχνότητες που το συνθέτουν κατά τρόπο παρόμοιο με το πώς μια συγχορδία μπορεί να εκφραστεί ως το εύρος ή η ένταση από τις νότες που την αποτελούν.
- Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος είναι ένα μιγαδικό σήμα συχνότητας, του οποίου η απόλυτη τιμή αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά κάθε συχνότητας στο αρχικό σήμα, και το μιγαδικό μέρος την μετατόπιση φάσης του βασικού ημιτονοειδούς σε αυτή τη συχνότητα.
- Ο Μετασχηματισμός Fourier είναι η αναπαράσταση του πεδίου συχνοτήτων του αρχικού σήματος.

Μετασχηματισμός Fourier

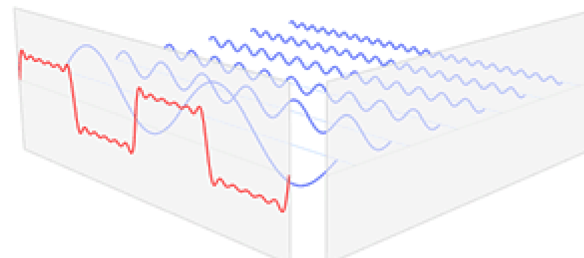
Για παράδειγμα η περιοδική συνάρτηση: f

Αποσυντίθεται με ένα γραμμικό συνδυασμό ημιτόνων και συνημίτονων: f

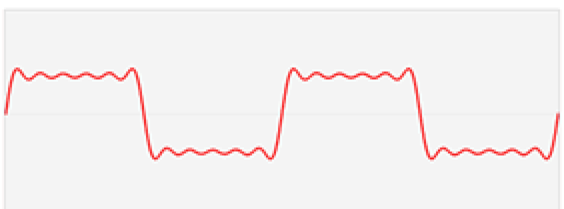


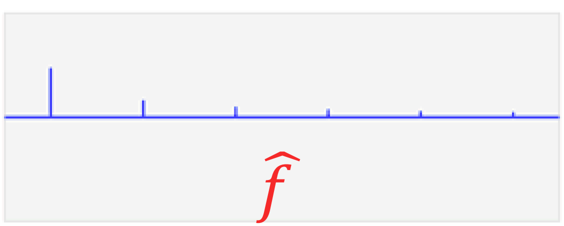


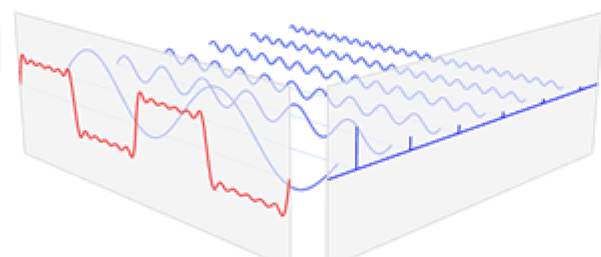
$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$



Οι συστατικές συχνότητες αυτών των ημιτόνων και συνημίτονων εξαπλώνονται σε όλο το φάσμα συχνοτήτων και αντιπροσωπεύονται ως κορυφές στο πεδίο συχνότητας (συναρτήσεις Dirac).







Η $\hat{f}$ είναι αναπαράσταση στο πεδίο των συχνοτήτων της συναρτήσεως f και είναι η συλλογή αυτών των κορυφών στις συχνότητες που εμφανίζονται στην ανάλυση Fourier αυτής της συνάρτησης.

Μετασχηματισμός Fourier

- Ακόμα όμως και μη περιοδικές συναρτήσεις (αλλά με πεπερασμένο εμβαδό κάτω από την καμπύλη) μπορούν να εκφραστούν ως άθροισμα ημιτόνων/συνημιτόνων πολλαπλασιασμένων με κατάλληλους συντελεστές.
- Ο φορμαλισμός σε αυτήν την περίπτωση ονομάζεται μετασχηματισμός *Fourier (Fourier Transform)* και έχει πλήθος εφαρμογών σε διάφορες επιστημονικές εφαρμογές.
- Η πρόοδος στην επιστήμη υπολογιστών και η ανακάλυψη του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier (fast Fourier transform (FFT) στην δεκαετία του 60έφερε επανάσταση στο πεδίο της επεξεργασίας σήματος.

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier 1Διάσταση

- Αν έχουμε ένα σήμα 1Δ: $f = [f_0, f_1, f_2, \dots, f_{M-1}]$
- Ο Διακριτός μετασχηματισμός Fourier μας δίνει την ακολουθία $F = [F_0, F_1, F_2, \dots, F_{M-1}]$ όπου

$$F_u = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} [e^{-2\pi i \frac{xu}{M}}] \cdot f_x$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα του Euler

$$e^{2\pi i\theta} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

Για να απλοποιήσουμε τις πράξεις γράφοντας το σήμα ως άθροισμα συναρτήσεων βάσης $e^{2\pi i\theta}$

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier 1Διάσταση

- Αν έχουμε ένα σήμα 1Δ: $f = [f_0, f_1, f_2, \dots, f_{M-1}]$
- Ο Διακριτός μετασχηματισμός Fourier μας δίνει την ακολουθία $F = [F_0, F_1, F_2, \dots, F_{M-1}]$.
- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier είναι:

$$f_x = \sum_{x=0}^{M-1} [e^{-2\pi i \frac{xu}{M}}] \cdot F_u$$

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier με Matlab

- Η συνάρτηση Y = fft(X) υπολογίζει τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier Transform (DFT)) του X χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο fast Fourier transform (FFT).
- Αν το X είναι διάνυσμα το fft(X) μας δίνει τον μετασχηματισμό Fourier του 1Δ διανύσματος.
- Αν το X είναι πίνακας, το fft(X) χειρίζεται της στήλες του X ως διανύσματα και επιστρέφει τον MF κάθε στήλης.

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier Matlab

- f=[1 2 3 4 5 6];
- fft(f')

- ans =
- 21.0000 + 0.0000i
- -3.0000 + 5.1962i
- -3.0000 + 1.7321i
- -3.0000 + 0.0000i
- -3.0000 - 1.7321i
- -3.0000 - 5.1962i

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier Shifting

- f=[1 2 3 4 5 6];
- fft(f')

- ans =

- 21.0000 + 0.0000i
- -3.0000 + 5.1962i
- -3.0000 + 1.7321i
- -3.0000 + 0.0000i
- -3.0000 - 1.7321i
- -3.0000 - 5.1962i

- f=[1 2 3 4 5 6];
- f1=(-1).^[0:6].*f
- fft(f1')

f1 = -1 2 -3 4 -5 6

- ans =

- 3.0000 + 0.0000i
- 3.0000 + 1.7321i
- 3.0000 + 5.1962i
- -21.0000 + 0.0000i
- 3.0000 - 5.1962i
- 3.0000 - 1.7321i

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier 2Δ

- Αν έχουμε ένα σήμα 2Δ: $f(x, y)$
- Κάθε εικόνα μπορεί να αναπαρασταθεί ως άθροισμα ημιτονικών εικόνων, για τις οποίες μπορούμε να δώσουμε ένα γενικό παράδειγμα:

$$I_s(x, y) = 255 \cdot sin\left[2\pi\left(\frac{u}{M}x + \frac{v}{N}y\right)\right]$$

Η εικόνα αυτή έχει *M* γραμμές (x=1:M-1), και *N* στήλες (y=1:N-1)

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier 2Δ

$\Gamma\iota\alpha\ \nu\alpha\ \delta o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\ \sigma\varepsilon\ MATLAB\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\iota\kappa\acute{o}\nu\alpha\ \ I_s(x,y) = 255 \cdot sin\left[2\pi\left(\frac{u}{M}x + \frac{v}{N}y\right)\right]$

$\gamma\iota\alpha\ u = 30, v = 10\ \kappa\alpha\iota\ M = N = 256\ \gamma\rho\alpha\varphi o\upsilon\mu\varepsilon$:

```
[x,y]=meshgrid(-128:127,-128:127);
z=255*sin(2*pi*((30/256)*x+(10/256)*y));
figure, imshow(z), title(' z=255*sin(2*pi*((30/256)*x+(10/256)*y))');
```

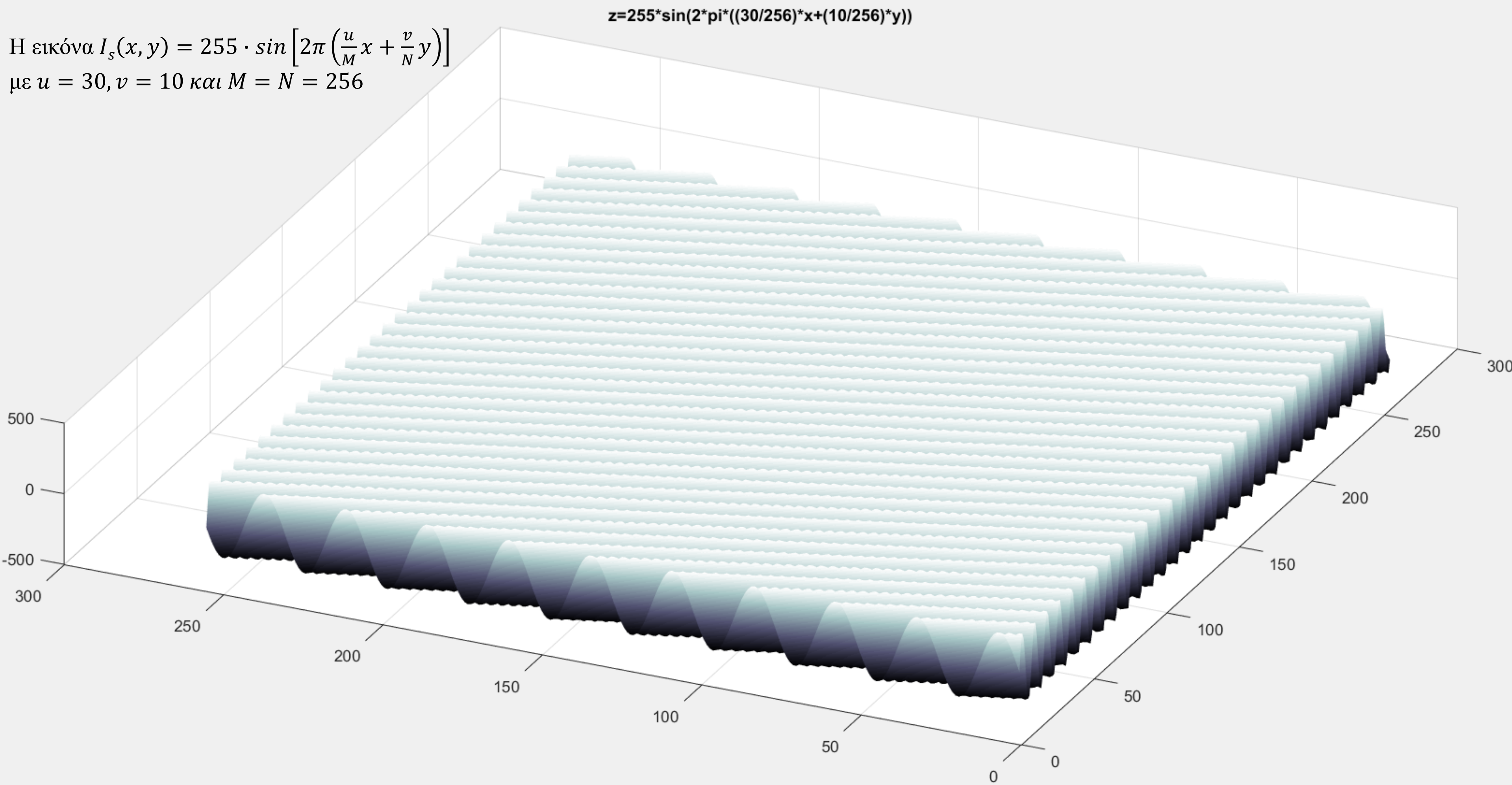
Η εικόνα που προκύπτει έχει οριζόντια συχνότητα v = 10 Hz (10 περιοδικές επαναλήψεις των στοιχείων της εικόνας στην κατεύθυνση των στηλών) και u = 30 Hz (έχουμε 30 περιοδικές επαναλήψεις των στοιχείων της εικόνας στην κατεύθυνση γραμμών της εικόνας).

Στην επόμενη διαφάνεια βλέπουμε την ημιτονική αυτή εικόνα σε 3D με την εντολή:

```
figure, surf(z), shading interp, colormap bone,
title('z=255*sin(2*pi*((30/256)*x+(10/256)*y))');
```

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier 2Δ

Η εικόνα $I_s(x,y) = 255 \cdot sin\left[2\pi\left(\frac{u}{M}x + \frac{v}{N}y\right)\right]$
με $u = 30, v = 10$ $και$ $M = N = 256$



Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier 2Δ

Επειδή η διαφορά μιας ημιτονικής από μια συνημιτονική εικόνα εξαρτάται απλά από μια διαφορά φάσης (από ποια τιμή γκρίζου ξεκινά η εικόνα) η εικόνα μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών εικόνων I_c:

$$\boldsymbol{I_c = 255 \cdot e^{-2\pi i\left[\frac{xu}{M}+\frac{yv}{N}\right]}} = 255 \cdot \left[cos\left\{2\pi\left(\frac{u}{M}x+\frac{v}{N}y\right)\right\} + sin\left\{2\pi\left(\frac{u}{M}x+\frac{v}{N}y\right)\right\}\right]$$

Η μιγαδική εκθετική εικόνα ΔΕΝ είναι υπαρκτή ως φυσική οντότητα

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier 2Δ

- Αν έχουμε ένα σήμα 2Δ: $f(x,y)$
- Ο Διακριτός μετασχηματισμός Fourier μας δίνει την $F(u,v)$ όπου

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[e^{-2\pi i \left[\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N}\right]}\right] \cdot f(x,y)$$

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier 2Δ

- Αν έχουμε ένα σήμα 2Δ: $f(x, y)$ ο Διακριτός μετασχηματισμός Fourier μας δίνει την $F(u, v)$ $\varepsilon\nu\acute{\omega}$ $o\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau\rho o\varphi o\varsigma$:

$$f(x, y) = \frac{1}{\mathrm{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \left[e^{2\pi i\left[\frac{xu}{M}+\frac{yv}{N}\right]}\right] \cdot F(u, v)$$

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier 2Δ

- Επειδή:

$$e^{2\pi i\left[\frac{xu}{M}+\frac{yv}{N}\right]} = e^{2\pi i\left[\frac{xu}{M}\right]} \cdot e^{2\pi i\left[\frac{yv}{N}\right]}$$

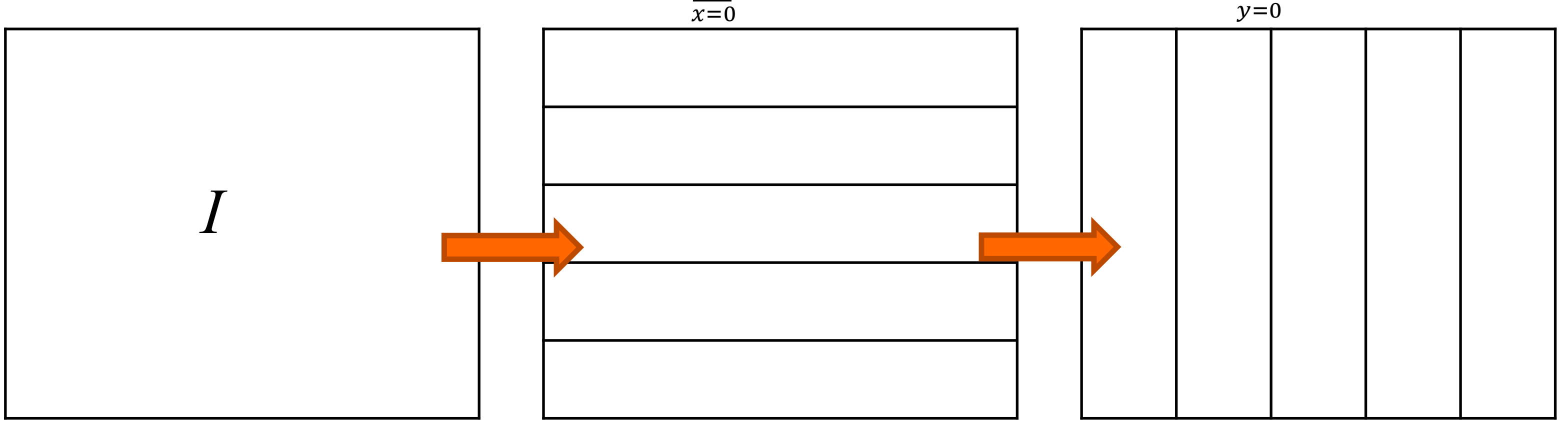
- Μπορούμε να διασπάσουμε τις εξισώσεις και να δουλέψουμε κατά γραμμές και στήλες αρχίζοντας από τις γραμμές:
- $F(u,:) = \sum_{x=0}^{M-1}[e^{-2\pi i\left[\frac{xu}{M}\right]}] \cdot f(x,:)$ και μετά στήλες
- $F(:,v) = \sum_{y=0}^{N-1}[e^{-2\pi i\left[\frac{yv}{N}\right]}] \cdot F(u,:)$
- Οπότε ο διακριτός MF 2-D μπορεί να υπολογιστεί εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα αυτή της διαχωριστικότητας.

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier 2Δ

- Οπότε αν έχουμε την εικόνα *I* (αριστερά) πρώτα παίρνουμε τον Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (ΔMF) σε κάθε γραμμή και στην εικόνα $F(u,:)$ που προκύπτει παίρνουμε τον ΔMF σε κάθε στήλη για το τελικό αποτέλεσμα.

$$F(u,:) = \sum_{x=0}^{M-1} [e^{-2\pi i\left[\frac{xu}{M}\right]}] \cdot f(x,:)$$

$$F(:,v) = \sum_{y=0}^{N-1} [e^{-2\pi i\left[\frac{yv}{N}\right]}] \cdot F(u,:)$$



$F(u,:)$: ΔMF σε κάθε γραμμή της *I*

ΔMF σε κάθε στήλη της $F(u,:)$

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier 2Δ- Θεώρημα Συνέλιξης

- Έστω ότι θέλουμε να γίνει η συνέλιξη ενός φίλτρου S στην εικόνα I δηλαδή: *I**S.
- Αν η εικόνα είναι μεγάλης διάστασης μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα συνέλιξης:
- Γεμίζουμε μηδενικά γύρω γύρο από το φίλτρο (padding) μέχρι να γίνει ίδιας διάστασης με την εικόνα I οπότε $S \rightarrow S'$
- Υπολογίσουμε τους διακριτούς μετασχηματισμούς Fourier $F(I), F(S')$ καθώς και το γινόμενό τους $F(I) \cdot F(S')$ στοιχείο προς στοιχείο
- Τέλος υπολογίζουμε τον αντίστροφο ΜF: $F^{-1}[F(I) \cdot F(S')\ ]$
- Συνολικά

$$I * S = F^{-1}[F(I) \cdot F(S')\ ]$$

Συζυγής Συμμετρία

- Συζηγη Συμμετρία στον ΔΜF

	a		a^*
b^*	B^*	d^*	A^*
	c		c^*
b	A	d	B

Ο *συζυγής* ενός μιγαδικού αριθμού $z = a + ib$ ορίζεται ως $\bar{z} = a - ib$

Η συμμετρία σε έναν ΔΜF όπου έχουμε μετακινήσει τον DC συντελεστή στο κέντρο. Η συμμετρία αυτή σημαίνει ότι μισές από τις πράξεις που κάνουμε για τον υπολογισμό του ΔΜF είναι περιττές!

Ο συντελεστής DC του ΔΜF

- Είναι η τιμή *F(0,0)* του ΔΜF. Θέτοντας *u=v=0* ⇒

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[e^{-2\pi i\left[\frac{0\cdot x}{M}+\frac{0\cdot y}{N}\right]}\right]\cdot f(x,y) \quad \Rightarrow$$

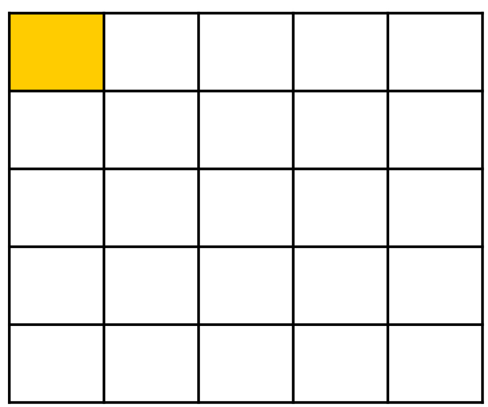
$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[e^{0}\right]\cdot f(x,y) \quad \Rightarrow$$

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

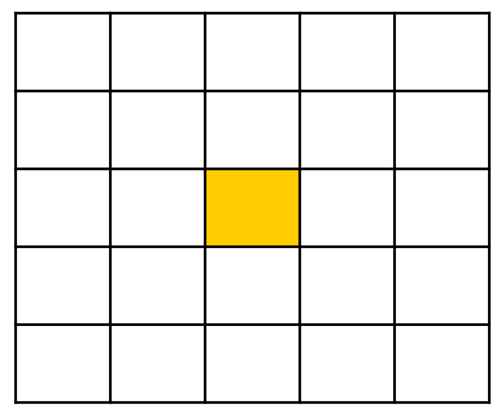
Δηλαδή το άθροισμα όλων των τιμών της εικόνας

Ο συντελεστής DC του ΔΜF

- Για λόγους απεικόνισης (display) είναι σύνηθες να έχουμε τον συντελεστή DC του ΔΜFστο κέντρο της εικόνας.
- Αυτό γίνεται αν πριν τον μετασχηματισμό πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα *f*(x,y) με $(-1)^{x+y}$



An FFT



After shifting

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier με Matlab

- fft2: Μας δίνει τον ΔΜF ενός πίνακα
- ifft2 : Μας δίνει τον αντίστροφο ΔΜF ενός πίνακα
- fftshift: Μετασχηματίζει τον ΔΜΦ ώστε ο DC συντελεστής να είναι στο κέντρο της εικόνας

Για μιγαδικούς το abs(X) μας δίνει το μέτρο των μιγαδικών στοιχείων του πίνακα X.

Το imshow(mat2gray(abs(cf))) μας δείχνει τα μέτρα των τιμών χωρίς να γίνει scaling

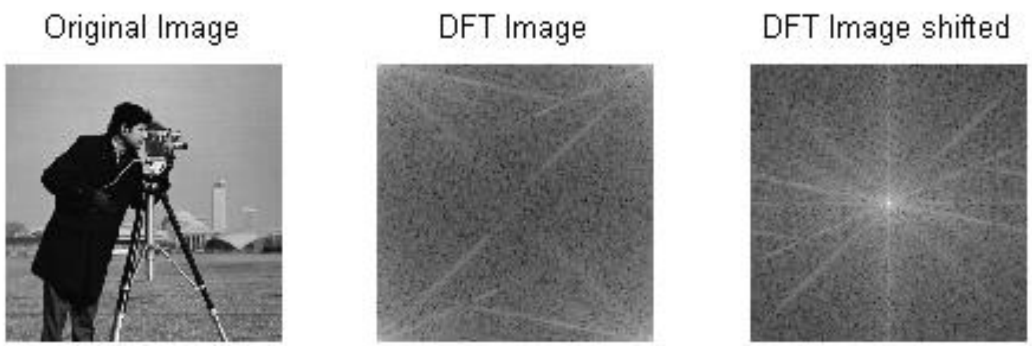
Οπτικοποίηση ΔMF με Matlab

- Ο ΔMF είναι πίνακας μιγαδικών οπότε απεικονίζουμε το μέτρο του με την εντολή ***abs*** της matlab.
- Ο συντελεστής DC (άθροισμα όλων) έχει τεράστια τιμή σε σχέση με τις υπόλοιπες του ΔMF. Συνήθως κάνουμε πρώτα την μετατόπιση που περιγράψαμε πριν.
- Για να οπτικοποιήσουμε ένα ΔMF στη Matlab ο πιο συνηθισμένος τρόπος είναι να πάρουμε πρώτα το λογάριθμο του ΔMF και στη συνέχεια να γίνει οτπικοποίηση.
- Επειδή θα έχουμε πολύ υψηλές τιμές θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή ***mat2gray*** για να τις φέρουμε από 0 έως 1.
- Στην επόμενη διαφάνεια δίνεται παράδειγμα σε matab

Παράδειγμα: Οπτικοποίηση ΔΜF με Matlab

Matlab

```
c=imread('cameraman.tif');
cf1=fft2(c);
cf=fftshift(fft2(c));
cfnormal1=mat2gray(log(1+abs(cf1)));
cfnormal=mat2gray(log(1+abs(cf)));
subplot(1,3,1), imshow(c), title('Original Image');
subplot(1,3,2), imshow(cfnormal1), title('DFT Image');
subplot(1,3,3), imshow(cfnormal), title('DFT Image shifted');
```



End of today's lecture

Thank you for your attention!