Εισαγωγή

**Σύνολα:**

Σύνολο: Έχουμε συνηθίσει να σκεφτόμαστε ένα σύνολο σαν μία συλλογή από αντικείμενα. Όταν πρόκειται για ένα σύνολο απείρων στοιχείων, δεν είναι φυσικά δυνατόν να απαριθμήσουμε όλα τα αντικείμενα, συνεπώς σε αυτή την περίπτωση δίνουμε τα αντικείμενα μέσω μιας ιδιότητας τους. Π.χ. μιλάμε για το σύνολο των άρτιων αριθμών, δηλαδή αυτών που έχουν την ιδιότητα να διαιρούνται με το δύο. Αυτή όμως η περιγραφή των στοιχείων ενός συνόλου, όταν γίνει πολύ γενική, μπορεί να έχει προβλήματα. Πάρτε για παράδειγμα το παρακάτω παράδοξο:

Παράδοξο Russel: Έστω Μ=Σύνολο όλων των συνόλων που δεν περιέχουν τον εαυτό τους. Ερώτηση: Το Μ περιέχει τον εαυτό του;

-Αν Μ∈Μ τότε Μ∉Μ λόγω της συνθήκης ότι δεν περιέχει τον εαυτό του.

-Αν Μ∉Μ τότε Μ∈Μ αφού πληροί την συνθήκη για να ανήκει στο Μ.

Η λύση είναι ότι το Μ δεν είναι καλά ορισμένο σύνολο.

Αριθμησιμότητα: Τα σύνολα χωρίζονται σε πεπερασμένα, σε αριθμήσιμα και σε μη αριθμήσιμα (και εκεί υπάρχουν διαφορετικοί βαθμοί απειρίας).

Πεπερασμένα σύνολα: Ένα σύνολο λέγεται πεπερασμένο σύνολο n στοιχείων αν έχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο των πρώτων n θετικών ακεραίων (σε κάθε στοιχείο του συνόλου αντιστοιχεί ένας και μόνο θετικός ακέραιος, και η αντιστοιχία καλύπτει και τους n θετικούς ακέραιους).

Αριθμήσιμα σύνολα: Ένα σύνολο είναι *αριθμήσιμο* εάν υπάρχει μία αντιστοιχία 1-1 και επί με το σύνολο των θετικών ακεραίων (σε κάθε στοιχείο του συνόλου αντιστοιχεί ένας και μόνο θετικός ακέραιος, και η αντιστοιχία καλύπτει όλους τους θετικούς ακέραιους).

Μη αριθμήσιμα σύνολα: Αν ένα σύνολο δεν είναι ούτε πεπερασμένο ούτε αριθμήσιμο τότε λέγεται *μη αριθμήσιμο*.

Ορισμός (Cardinality): Δύο σύνολα έχουν την ίδια cardinality (αριθμό στοιχείων) αν υπάρχει μία αντιστοιχία 1-1 και επί μεταξύ τους.

Πρόταση 1: Το σύνολο των ακεραίων Ζ είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη: Έστω η αρίθμηση {0,-1,1,-2,2,-3,3,…,-n,n,…}. Αυτή η αρίθμηση μας δίνει την ζητούμενη απεικόνιση από το Ζ στους θετικούς ακέραιους ως εξής: . Η απεικόνιση αυτή είναι 1-1 αφού κάθε ακέραιος απεικονίζεται σε ένα μοναδικό θετικό ακέραιο, και είναι επί αφού καλύπτονται όλοι οι θετικοί ακέραιοι. Συνεπώς το σύνολο των ακεραίων είναι αριθμήσιμο.

Εδώ αξίζει να κάνουμε μία παρατήρηση. Το σύνολο των ακεραίων Ζ και το σύνολο των θετικών ακεραίων Ζ+ έχουν το ίδιο Cardinality, δηλαδή τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Πως όμως είναι αυτό δυνατόν αφού οι θετικοί ακέραιοι είναι υποσύνολο του Ζ; Η απάντηση είναι ότι αυτό είναι δυνατόν γιατί έχουμε απειροσύνολα. Αν αλλάζαμε ονομασία στα στοιχεία της αρίθμησης και αντί {0,-1,1,-2,2,-3,3,…,-n,n,…} τα λέγαμε } τότε ευκολότερα θα λέγαμε ότι ο αριθμός στοιχείων του Ζ είναι ίδιος με τον αριθμό των δεικτών {1,2,3,…}, που είναι τα στοιχεία του Ζ+. Βλέπουμε λοιπών, ότι όταν έχουμε απειροσύνολα, είναι εντελώς δυνατόν να έχουμε ένα σύνολο και ένα υποσύνολο του να έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

Πρόταση 2: Το σύνολο των ρητών Q είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη: Το σύνολο των ρητών είναι το σύνολο Q={p/q | p ακέραιος, q θετικός ακέραιος, και p,q δεν έχουν κοινούς διαιρέτες}. Αν επιλέξουμε το p/q όπως περιγράφεται στο σύνολο Q, τότε κάθε p/q αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό ρητό. Έστω τώρα ότι ακολουθούμε τα βελάκια στην αρίθμηση των θετικών p/q όπως στο διάγραμμα:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1 2 3 4 . . .  |
| 1234... | 1/1 1/2 1/3 1/4 . . .2/1 2/2 2/3 2/43/1 3/2 3/3 3/44/1 4/2 4/3 4/4... |

Για να πάρουμε την αρίθμηση όλων των ρητών, ξεκινάμε από το 0, δεν επαναλαμβάνουμε αριθμούς που έχουμε ήδη συναντήσει, και για κάθε αριθμό παίρνουμε και τον αρνητικό του. Έτσι έχουμε την αρίθμηση: 0,1,-1,1/2,-1/2,2,-2,1/3,-1/3,3,-3,…. Προσέξτε ότι το κλάσμα 2/2, μεταξύ του -1/3 και του 3, δεν το παίρνουμε γιατί είναι το 1 που το έχουμε ήδη πάρει.

Αυτή η αρίθμηση μας δίνει την σχέση 1-1 και επί που ζητάμε από τους ρητούς στους θετικούς ακέραιους. Έτσι, για παράδειγμα το 0 απεικονίζεται στο 1, το 1 στο 2, το -1/2 στο 5 και το -1/3 στο 9. Συνεπώς το σύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμο, παρόλο που οι ρητοί είναι πυκνοί στην ευθεία των πραγματικών.

Τι γίνεται όμως με το σύνολο των πραγματικών αριθμών; Εδώ, όπως θα δούμε, το σύνολο δεν είναι αριθμήσιμο. Συνεπώς, υπό μία έννοια, οι πραγματικοί αριθμοί είναι περισσότεροι από τους ρητούς.

Πρόταση 3: Το σύνολο των πραγματικών R δεν είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη: Έστω μία αρίθμηση των πραγματικών μεταξύ 0 και 1, R1,R2,…,Rn,… και έστω ότι

Μπορούμε να φτιάξουμε τον , όπου το , , και γενικά . Έτσι ο R έχει το πρώτο του ψηφίο διαφορετικό από το πρώτο ψηφίο του , το δεύτερο του ψηφίο διαφορετικό από το δεύτερο ψηφίο του και γενικά το n-οστό του ψηφίο διαφορετικό από το n-οστό ψηφίο του . Αυτό τον καθιστά διαφορετικό από όλα τα . Άρα δεν είναι στην αρίθμηση μας. Αλλά αυτό είναι αδύνατο αφού στην αρίθμηση περιλάβαμε όλους τους πραγματικούς μεταξύ 0 και 1. Κατά συνέπεια, οι πραγματικοί μεταξύ 0 και 1 δεν είναι αριθμήσιμοι, και αφού αυτοί δεν είναι αριθμήσιμοι και όλοι οι πραγματικοί δεν είναι αριθμήσιμοι.

Παρατήρηση: Αποδεικνύεται ότι αν ℘(Α) είναι το σύνολο των υποσυνόλων του Α, τότε δεν υπάρχει f:℘(Α)→Α που να είναι 1-1. Αυτή η μη ύπαρξη αντιστοιχίας 1-1 σημαίνει ότι το ℘(Α) έχει «περισσότερα» στοιχεία (μεγαλύτερη cardinality) από ότι το Α. Κατά συνέπεια, αν Ν οι φυσικοί αριθμοί, το ℘(Ν) έχει μεγαλύτερη cardinality από ότι το Ν. H cardinality του ℘(Ν) είναι η ίδια με την cardinality του R (πραγματικών). Όμοια το ℘(R) έχει μεγαλύτερη cardinality από το R. Συνεπώς υπάρχουν πολλά είδη από απειρίες, και τα μη αριθμήσιμα σύνολα μπορούν να έχουν διαφορετικό αριθμό στοιχείων.

**Μέθοδος επαγωγής:**

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία ακολουθία προτάσεων P(n), και έστω ότι θέλουμε να δείξουμε ότι αυτές οι προτάσεις είναι αληθείς για όλα τα n στο Ζ+. Αυτό μπορούμε να το δείξουμε χρησιμοποιώντας την μέθοδο της *επαγωγής*. Αυτή βασίζεται στα εξής βήματα:

1. Δείχνουμε ότι η πρόταση Ρ(1) είναι αληθής.
2. Δείχνουμε ότι αν η πρόταση Ρ(n) είναι αληθής, τότε και η Ρ(n+1) είναι αληθής.

Η λογική πίσω από την μέθοδο της επαγωγής είναι η εξής: Το βήμα δύο μας λέει ότι η αλήθεια μίας πρότασης συνεπάγεται και την αλήθεια της επόμενης της. Συνεπώς έχουμε ότι

Με αυτό τον τρόπο δείχνουμε ότι όλες οι προτάσεις P(n) είναι αληθείς.

Παράδειγμα 1: Αποδείξτε ότι 1+2+3+. . .+n=n(n+1)/2.

1. P(1): 1=1(1+1)/2 που ισχύει.
2. P(n): Έστω 1+2+. . .+n=n(n+1)/2 αληθής.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι

P(n+1): 1+2+. . .+n+(n+1)=(n+1)(n+2)/2 είναι αληθής

Αλλά, 1+2+. . .+n+(n+1)=n(n+1)/2+(n+1)=(n+1)(n+2)/2.

Κατά συνέπεια δείξαμε ότι η P(n+1) είναι αληθής υποθέτοντας ότι η P(n) ισχύει.

Με αυτό το βήμα έχουμε τερματίσει την απόδειξη ότι η πρόταση 1+2+3+. . .+n=n(n+1)/2 είναι αληθής για όλα τα n στο Ζ+.

Παράδειγμα 2: Δείξτε ότι για όλα τα ισχύει ότι διαιρείται ακριβώς με το 8

1. P(1): Το διαιρείται με το 8. Αυτό ισχύει.
2. P(n): Έστω ότι το διαιρείται ακριβώς με το 8.

Πρέπει να δείξουμε ότι

P(n+1): Το διαιρείται ακριβώς με το 8

Αφού το διαιρείται ακριβώς με το 8, έχουμε ότι . Αλλά . Συνεπώς το διαιρείται με το 8 και δίνει το ακέραιο πηλίκο . Αυτό τερματίζει την απόδειξη.

Λήμμα (Μια χρήσιμη ταυτότητα):

Απόδειξη:

 Η απόδειξη αυτής της ταυτότητας γίνεται απλά κάνοντας πράξεις στο δεύτερο μέλος και απλοποιώντας.

**Διωνυμικό Θεώρημα:**

Όλοι ξέρουμε τις ταυτότητες

Πως όμως γενικεύονται αυτές οι ταυτότητες σε ένα ανάπτυγμα του ; Αυτό το απαντάει το διωνυμικό θεώρημα.

Θεώρημα (Διωνυμικό Θεώρημα):

Εδώ είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε k στοιχεία από n διαφορετικά στοιχεία, και είναι το n παραγοντικό.

Απόδειξη:

Η απόδειξη του διωνυμικού θεωρήματος είναι απλή αν δεχτούμε ένα αποτέλεσμα από τις πιθανότητες που λέει ότι από n διαφορετικά στοιχεία μπορούμε να επιλέξουμε k με τρόπους. Ισχύει ότι

όπου ο αριθμός των παρενθέσεων που πολλαπλασιάζουμε είναι n. Αν εκτελέσουμε το γινόμενο παίρνουμε ένα άθροισμα από όρους όπου ο κάθε όρος είναι ένα γινόμενο με ένα στοιχείο από κάθε παρένθεση. Συνεπώς για να πάρουμε τον όρο πρέπει από k παρενθέσεις να πάρουμε το α και από n-k παρενθέσεις το β. Έχουμε όμως τρόπους να επιλέξουμε τις k παρενθέσεις από τις οποίες θα πάρουμε το α. Άρα ό όρος αυτός θα εμφανιστεί φορές, και αν αθροίσουμε παίρνουμε το που εμφανίζεται στο διωνυμικό ανάπτυγμα. Συνεπώς αθροίζοντας όλους τους όρους φτάνουμε στο διωνυμικό θεώρημα.

Πόρισμα: Αν τότε ισχύουν οι ανισώσεις:

Απόδειξη:

Συνεπώς το διωνυμικό θεώρημα για n αρκετά μεγάλο μας δίνει

όπου όλοι οι όροι στο άθροισμα είναι θετικοί. Πετώντας τους όρους μετά το καταλήγουμε στην τρίτη ανίσωση του πορίσματος. Η πρώτη και η δεύτερη ανίσωση είναι απλά η τρίτη για .

**Μερικά βασικά αθροίσματα:**

Πεπερασμένη Γεωμετρική Σειρά:

Απόδειξη:

Αφαιρώντας την δεύτερη εξίσωση από την πρώτη παίρνουμε ότι

Κλασσικά αθροίσματα:

1. 

2. 

3. 

Απόδειξη: Επαγωγή.

Ακολουθίες

**Ακολουθίες:** Ακολουθία πραγματικών είναι μια συνάρτηση α:Ν→R. Συνήθως το α(n) συμβολίζεται με ένα γράμμα με δείκτη n, π.χ. αn.

Ένας διαφορετικός τρόπος να δούμε μια πραγματική ακολουθία είναι σαν ένα διατεταγμένο σύνολο από πραγματικούς αριθμούς (α1,α2,. . .,αn,. . .). Για αυτό τον λόγο και η ακολουθία συχνά συμβολίζεται ως (αn).

Παραδείγματα ακολουθιών είναι τα επόμενα:

Οι συμπεριφορές σε αυτές τις ακολουθίες είναι διαφορετικές όταν το n τείνει στο άπειρο.

1. Στην πρώτη ακολουθία οι όροι της μικραίνουν όσο μεγαλώνει το n, και πλησιάζουν το 0 όταν το n τείνει στο άπειρο. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η ακολουθία έχει όριο το 0 όταν το n τείνει στο άπειρο.
2. Στην δεύτερη ακολουθία οι όροι μεγαλώνουν χωρίς να πλησιάζουν κάποιο αριθμό όταν το n τείνει στο άπειρο. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η ακολουθία αποκλίνει στο θετικό άπειρο.
3. Στην τρίτη περίπτωση, οι όροι της ακολουθίας ταλαντώνονται μεταξύ του -1 και του 1. Σε αυτή την περίπτωση δεν πλησιάζουν κάποιο αριθμό όταν το n τείνει στο άπειρο, και τότε λέμε ότι η ακολουθία δεν συγκλίνει.

Αυστηρά έχουμε τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός (Όριο ακολουθίας): Μια ακολουθία (αn) θα λέμε ότι *συγκλίνει* στο όριο α αν ∀ε>0, ∃Ν ε.ω. |αn-α|<ε ∀ n≥N. Αυτό γράφεται ή αn→α όταν n→∞.

Εδώ ο συμβολισμός είναι:

∀: Για κάθε.

∃: Υπάρχει.

ε.ω.: Έτσι ώστε.

Ποιοτικά, όριο ακολουθίας είναι ο αριθμός στον οποίο πλησιάζουν οι όροι της ακολουθίας όταν το n→∞. Αυτό το όριο δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει. Η ακολουθία (αn) με για παράδειγμα δεν έχει όριο αφού οι όροι της ταλαντώνονται μεταξύ το -1 και του 1, χωρίς να πλησιάζουν κάποιο αριθμό.

Εδώ ο ορισμός του ορίου χρειάζεται κάποια επεξήγηση. Το ε αντιπροσωπεύει την μέγιστη δυνατή απόσταση των όρων από το όριο α. Βέβαια σε μια ακολουθία που οι όροι της τελικά πλησιάζουν στο όριο α, κάποιοι αρχικοί όροι μπορεί να είναι πολύ μακριά από το α. Συνεπώς είναι απαραίτητο να πάρουμε το n αρκετά μεγάλο για να πλησιάσουν οι όροι της ακολουθίας στο όριο. Αυτό εκφράζεται από την σχέση ότι υπάρχει κάποιο Ν έτσι ώστε για n≥N, οι όροι της ακολουθίας είναι εντός απόστασης ε από το όριο α. Πόσο όμως πρέπει να είναι το Ν για κάποια συγκεκριμένη απόσταση ε; Αυτό δεν μας το προσδιορίζει ο ορισμός. Το μόνο που μας λέει είναι ότι για οσοδήποτε μικρή απόσταση ε, υπάρχει κάποιο αρκετά μεγάλο Ν έτσι ώστε όταν n≥N, οι όροι της ακολουθίας είναι εντός απόστασης ε από το όριο α. Αυτό δηλαδή σημαίνει ότι αν προχωρήσουμε αρκετά στο n, μπορούμε να φέρουμε τους όρους της ακολουθίας μας όσο κοντά θέλουμε στο όριο α. Αυτό όμως ακριβώς είναι η έννοια της φράσης «η ακολουθία πλησιάζει το όριο α για n αρκετά μεγάλο». Εδώ αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι |α-β| είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων α και β εξ’ αιτίας των ιδιοτήτων του απολύτου, συνεπώς |αn-α| είναι η απόσταση των όρων της ακολουθίας και του ορίου α.

Παράδειγμα 1: .

Θα δείξουμε ότι όταν n→∞. Έστω ε>0. Ισχύει ότι , και πρέπει να επιλέξουμε το n≥Ν αρκετά μεγάλο ώστε το . Έστω Ν=οποιοσδήποτε ακέραιος μεγαλύτερος του 1/ε, π.χ. Ν=[1/ε]+1. Εδώ,

[x]=μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος του x. Τότε ισχύει ότι για n≥Ν, και άρα έχουμε δείξει ότι όταν n→∞.

Παράδειγμα 2: .

Εδώ για . Αν , τότε , συνεπώς . Άρα όταν n→∞. Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει την ανίσωση που προέρχεται από το διωνυμικό θεώρημα παραλείποντας όρους και ισχύει όταν και .

Ορισμός: Μια ακολουθία θα λέμε ότι αποκλίνει στο άπειρο (αντίστοιχα στο αρνητικό άπειρο) αν για κάθε Μ υπάρχει Ν έτσι ώστε όταν τότε (αντίστοιχα για κάθε Μ υπάρχει Ν έτσι ώστε όταν τότε )

Μία ακολουθία μπορεί να ορίζεται δίνοντας έναν τύπο για τον γενικό όρο της ακολουθίας, όπως τα παραδείγματα που έχουμε δει, μπορεί όμως και να ορίζεται από έναν αναδρομικό τύπο και από κάποιους αρχικούς όρους. Έτσι για παράδειγμα αν πούμε ότι έχουμε την ακολουθία όπου ο πρώτος όρος είναι το και οι όροι της ικανοποιούν την αναδρομική σχέση , τότε έχουμε μία καλά ορισμένη ακολουθία.

Σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε να βρούμε τον γενικό όρο της ακολουθίας από τον αναδρομικό τύπο. Εδώ για παράδειγμα μπορούμε να πούμε ότι , , , . . . ,, όπου στον n-οστό όρο έχουμε n ρίζες.

Μια περίπτωση που μπορούμε συστηματικά να βρούμε γενικό τύπο σε μια αναδρομική ακολουθία είναι όταν αυτή είναι γραμμική. Αυτό γίνεται όπως το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα: Έστω η ακολουθία Fibonacci που δίνεται με τους αρχικούς όρους , , και την αναδρομική σχέση . Μπορούμε να βρούμε έναν τύπο για τον όρο ;

Μάλιστα ο Fibonacci έθεσε το πρόβλημα σαν πρόβλημα πολλαπλασιασμού κουνελιών. Για τον Fibonacci, είναι ο αριθμός γενεών από κουνέλια, και ο αριθμός από ζευγάρια κουνελιών που έχουμε στην n-οστή γενεά. Αρχικά έχουμε ένα ζευγάρι κουνελιών (), και κάθε φορά στην γενεά , τα ζευγάρια της γενεάς γεννούν από ένα ζευγάρι, συνεπώς τα ζευγάρια κουνελιών της γενεάς είναι αυτά που είχαμε στην προηγούμενη γενεά συν αυτά που γέννησαν τα ζευγάρια της γενεάς (). Το ερώτημα του Fibonacci είναι «Πόσα είναι τα κουνέλια στην n-οστή γενεά;». Μας ζητάει δηλαδή να βρούμε έναν τύπο για τον όρο στην αναδρομικά ορισμένη ακολουθία. Στο πρόβλημα του Fibonacci, τα κουνέλια δεν προλαβαίνουν να πεθάνουν και πολλαπλασιάζονται σε ζευγάρια. Υπεραπλούστευση βέβαια, αλλά μας δίνει μια ιδέα για το πόσο γρήγορα πολλαπλασιάζονται τα κουνέλια.

Λύση:

Δοκιμάζουμε την λύση στην αναδρομική σχέση, έτσι παίρνουμε . Συνεπώς τόσο το , όσο και το είναι λύσεις της αναδρομικής σχέσης, δεν ικανοποιούν όμως τις αρχικές συνθήκες. Η αναδρομική σχέση όμως είναι γραμμική, συνεπώς και το ικανοποιεί την αναδρομική σχέση για όλα τα . Αν απαιτήσουμε τώρα ότι και , τότε παίρνουμε τις σχέσεις και . Αυτές οι σχέσεις μας δίνουν ότι . Συνεπώς η λύση της αναδρομικής σχέσης που ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες είναι η

Πράγματι αν αντικαταστήσουμε το παίρνουμε ότι

, ,, , ,,, . . ..

Αυτό που είναι σημαντικό σε αυτή την λύση και δεν ήταν προφανές από την αρχή είναι ότι ο αριθμός των ζευγαριών κουνελιών αυξάνει εκθετικά στον αριθμό των γενεών, συνεπώς πάρα πολύ γρήγορα.

Έχουμε τώρα τις παρακάτω προτάσεις για τα όρια ακολουθίας:

Λήμμα: Μία συγκλίνουσα ακολουθία είναι και φραγμένη

Απόδειξη:

Έστω όταν n→∞. Τότε για n≥Ν έχουμε ότι |αn-α|<ε. Αυτό όμως μας λέει ότι α-ε≤αn≤α+ε. Άρα οι όροι της ακολουθίας τελικά φράσσονται από πάνω από το α+ε, και από κάτω από το α-ε. Οι αρχικοί όμως όροι {α1,α2,. . .αn-1} δεν ικανοποιούν απαραίτητα τα παραπάνω φράγματα. Αν όμως θέσουμε m=min{ α1,α2,. . .αn-1,α-ε}, και Μ=max{ α1,α2,. . .αn-1,α+ε}, τότε έχουμε για όλους τους όρους της ακολουθίας ότι m≤αn≤M, και η ακολουθία είναι φραγμένη.

Ορισμός: Μια ακολουθία είναι αύξουσα (γνησίως αύξουσα) αν ( για όλα τα . Μια ακολουθία είναι φθίνουσα (γνησίως φθίνουσα) αν ( για όλα τα . Μια ακολουθία που είναι αύξουσα (γνησίως αύξουσα), ή φθίνουσα (γνησίως φθίνουσα), λέγεται μονότονη (γνησίως μονότονη).

Θεώρημα: Μία ακολουθία που είναι αύξουσα και άνω φραγμένη συγκλίνει σε κάποιο όριο. Αντίστοιχα, μία ακολουθία που είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη συγκλίνει σε κάποιο όριο.

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία αύξουσα άνω φραγμένη ακολουθία , και έστω ότι το ελάχιστο άνω φράγμα αυτής είναι το α. Έστω ότι μας δίνουν ένα . Τότε το δεν αποτελεί άνω φράγμα, άρα κάποιος όρος . Επειδή όμως η ακολουθία είναι αύξουσα, όλοι οι όροι από κει και πέρα θα ικανοποιούν την ανίσωση . Συνεπώς έχουμε ότι για , . Συνεπώς . Όμοια αποδεικνύεται και για φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία.

Παράδειγμα:

Η ακολουθία αυτή αποδεικνύεται ότι είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το 3. Συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα συγκλίνει, όχι όμως στο 3, αλλά σε ένα καινούργιο υπερβατικό αριθμό, το .

Θεώρημα (Βασικές Ιδιότητες Ορίων): Έστω αn→α και βn→β όταν n→∞ και έστω λ σταθερά. Τότε ισχύουν:

1. αn+βn→α+β
2. λαn→λα
3. αnβn→αβ
4. Αν βn≠0 ∀n≥N και β≠0 τότε αn/βn→α/β

Απόδειξη:

1. Για να δείξουμε ότι αn+βn→α+β πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε ε>0 υπάρχει κάποιο Ν έτσι ώστε όταν n≥N να έχουμε . Αλλά από την τριγωνική ιδιότητα των απολύτων, και επειδή αn→α και βn→β όταν n→∞ έχουμε ότι υπάρχουν Ν1,Ν2, έτσι ώστε όταν n≥Ν1 τότε , και όταν n≥Ν2 τότε . Αν πάρουμε τώρα Ν=max{N1,N2}, τότε για n≥N έχουμε και τις δύο ανισώσεις συνεπώς

 Αυτό αποδεικνύει την ιδιότητα 1, αφού για το δοσμένο ε βρήκαμε το κατάλληλο Ν έτσι ώστε όταν n≥Ν να έχουμε .

1. Έστω ε>0. Πρέπει να βρούμε Ν έτσι ώστε όταν n≥N τότε Ξέρουμε όμως ότι αn→α όταν n→∞ συνεπώς μπορούμε να βρούμε Ν έτσι ώστε όταν n≥Ν, . Για το ίδιο Ν έχουμε ότι όταν n≥N τότε Αυτό αποδεικνύει την ιδιότητα 2.
2. Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε ε>0 υπάρχει κάποιο Ν έτσι ώστε όταν n≥N να έχουμε . Έχουμε όμως ότι

Περαιτέρω, έχουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει, άρα είναι και φραγμένη, συνεπώς υπάρχει έτσι ώστε για όλα τα n. Άρα έχουμε ότι

Έχουμε τώρα ότι αn→α και βn→β όταν n→∞, συνεπώς αν , υπάρχουν Ν1,Ν2, έτσι ώστε όταν n≥Ν1 τότε , και όταν n≥Ν2 τότε . Σε αυτή την περίπτωση αν θέσουμε , έχουμε ότι για n≥N και οι δύο ανισώσεις ισχύουν, συνεπώς

Άρα έχουμε ότι όταν n→∞. Αν τώρα , τότε και απλά επιλέγουμε το Ν έτσι ώστε όταν n≥N τότε . Πάλι παίρνουμε ότι

1. Αρκεί να δείξουμε ότι όταν n→∞, γιατί μετά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα 3 να δείξουμε ότι αn/βn→α/β. Αλλά

Έχουμε τώρα ότι βn→β όταν n→∞, συνεπώς μπορούμε να επιλέξουμε έτσι ώστε όταν n≥Ν1. Επειδή η απόσταση του από το είναι μικρότερη του , έχουμε ότι όταν n≥Ν1, είτε το είναι θετικό είτε αρνητικό. Συνεπώς όταν n≥Ν1,

Επίσης μπορούμε να επιλέξουμε Ν2 έτσι ώστε όταν n≥Ν2 να έχουμε . Αν τώρα , έχουμε ότι για n≥N

Συνεπώς έχουμε ότι όταν n→∞.

Πρόταση: Έστω η ακολουθία η οποία συγκλίνει στο όριο α. Έστω και μία δεύτερη ακολουθία , με , όπου η συνάρτηση είναι συνεχής στο όριο α. Τότε ισχύει ότι .

Απόδειξη:

Αυτή η πρόταση είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της συνέχειας. Ωστόσο η σημασία της είναι μεγάλη. Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να βάζουμε όρια μέσα σε ρίζες, σε ημίτονα και συνημίτονα, και να ανεβάζουμε όρια σε εκθέτες.

Παράδειγμα: Θεωρήστε την ακολουθία όπου ο πρώτος όρος είναι το και οι όροι της ικανοποιούν την αναδρομική σχέση . Δείξτε ότι η ακολουθία συγκλίνει και βρείτε το όριο της ακολουθίας

Λύση:

Πρώτα από όλα βρίσκουμε τα σταθερά σημεία της ακολουθίας, τις τιμές δηλαδή του που μας δίνουν . Αυτές οι τιμές ικανοποιούν την σχέση , συνεπώς είναι λύσεις της εξίσωσης . Αυτή έχει τις λύσεις . Τα σημεία στα οποία σταθεροποιείται η ακολουθία είναι καλοί υποψήφιοι για το όριο της ακολουθίας γιατί αν αυτό υπάρχει τότε και από τις ιδιότητες των ορίων έχουμε ότι . Άρα το όριο μας είναι ένα από τα .

Πρέπει όμως πρώτα να δείξουμε ότι η ακολουθία μας συγκλίνει. Αυτό θα το δείξουμε δείχνοντας ότι η ακολουθία είναι αύξουσα και φραγμένη.

Πρώτα θα μελετήσουμε την μονοτονία. Θεωρούμε την διαφορά . Οι ρίζες αυτού του τριωνύμου είναι ακριβώς οι . Το είναι αρνητικό για και , και για . Συνεπώς αν καταφέρουμε να δείξουμε ότι οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί και φράσσονται από το , τότε έχουμε δείξει ότι η ακολουθία είναι αύξουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνει.

Αυτό θα το δείξουμε επαγωγικά. Κατ’ αρχήν, . Έστω ότι . Πρέπει να δείξουμε ότι . Αλλά . Συνεπώς η επαγωγή μας δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα. Άρα η ακολουθία μας είναι αύξουσα και φραγμένη, συνεπώς συγκλίνει. Το όριο της είναι ένα από τα σταθερά σημεία της και συγκεκριμένα το . Το δεν θα μπορούσε να είναι γιατί είναι άλλωστε αρνητικό.

Θεώρημα (Ιδιότητα Παρεμβολής): Έστω τρεις ακολουθίες, , , , και έστω ότι αn→L και γn→L όταν n→∞. Έστω ότι για αρκετά μεγάλο ισχύει η ανίσωση . Τότε αναγκαστικά .

Απόδειξη:

Έστω Ν αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύουν οι ανισώσεις , και . Οι δύο πρώτες ανισώσεις δίνουν και . Συνεπώς έχουμε

Αυτό μας δίνει ότι για n≥N, συνεπώς όταν n→∞.

Έχουμε τώρα στα χέρια μας ιδιότητες για να συνθέσουμε τα βασικά όρια και να υπολογίσουμε πιο περίπλοκα όρια.

Θεώρημα (Βασικά Όρια): Όταν , , , και k θετικός ακέραιος, έχουμε:

Απόδειξη:

1. Έστω . Για να δείξουμε ότι πρέπει να βρούμε Ν έτσι ώστε όταν n≥Ν να έχουμε . Επειδή μπορούμε να θέσουμε με θ>0. Συνεπώς έχουμε

για . Αν πάρουμε τώρα

έχουμε ότι

Συνεπώς έχουμε δείξει ότι όταν .

1. Έστω ότι έχουμε . Σε αυτή την περίπτωση και , άρα μπορούμε να θέσουμε με . Αυτό σημαίνει ότι . Συνεπώς για την ακολουθία έχουμε ότι . Συνεπώς από την ιδιότητα της παρεμβολής έχουμε ότι , και συνεπώς .

Αν τώρα τότε αφού .

Τέλος, αν , η ακολουθία μας είναι σταθερά ίση με το 1.

1. Έστω ότι . Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι . Αυτό μας λέει ότι .

Επειδή έχουμε ότι , συνεπώς .

1. Έστω . Τότε

Έχουμε τώρα ότι , συνεπώς

και επειδή για n αρκετά μεγάλο, έχουμε ότι για .

Παράδειγμα 3: Υπολογίστε το όριο

 Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το . Έτσι παίρνουμε ότι

Παράδειγμα 4: Υπολογίστε το όριο

 Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της παρεμβολής.

Επειδή όταν , και , έχουμε ότι

 .

Σειρές (άπειρα αθροίσματα)

Ορισμός (Σειρές): Έστω η ακολουθία . Η σειρά α1+α2+. . .+αn+. . . ορίζεται ως την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων Σn=α1+α2+. . .+αn. Αν το όριο της ακολουθίας υπάρχει όταν n→∞, , τότε λέμε ότι η σειρά συγκλίνει και γράφουμε α1+α2+. . .+αn+. . .=Σ. Όπως και οι ακολουθίες, μια σειρά μπορεί να συγκλίνει, να αποκλίνει στο ή στο , ή να μην συγκλίνει ή αποκλίνει.

Ένα ενδιαφέρων παράδειγμα: Ας προσπαθήσουμε να δούμε ένα παράδειγμα σειράς που δίνει πεπερασμένο αποτέλεσμα. Ας θεωρήσουμε το διάστημα [0,2] στην ευθεία. Ας το χωρίσουμε στα δύο και ας πάρουμε το μισό:

Το μισό που πήραμε έχει μήκος 1, και αυτό που έμεινε έχει επίσης μήκος 1.

Ας πάρουμε τώρα το μισό από αυτό που έμεινε, και ας το προσθέσουμε σε αυτό που πήραμε.

Τώρα το μήκος που έχουμε πάρει είναι , ενώ αυτό που έμεινε είναι .

Αν πάρουμε πάλι το μισό από αυτό που έμεινε και το προσθέσουμε έχουμε

Τώρα το μήκος που έχουμε πάρει είναι , ενώ αυτό που έμεινε είναι . Αν συνεχίσουμε αυτή τη διαδικασία n+1 φορές παίρνουμε το μήκος , ενώ το μήκος που έμεινε είναι .

Αν τώρα συνεχίσουμε αυτή την διαδικασία άπειρες φορές, έχουμε ότι , συνεπώς το άπειρο άθροισμα , το μήκος δηλαδή όλου του διαστήματος. Βλέπουμε λοιπών ότι με αυτή την γεωμετρική διαδικασία παίρνουμε ένα άπειρο άθροισμα το οποίο δίνει ένα πεπερασμένο αποτέλεσμα, το 2, που είναι φυσικά το όριο της σειράς.

 Κάτι που αξίζει να παρατηρήσουμε είναι ότι για να πάρουμε ένα πεπερασμένο αποτέλεσμα από ένα άπειρο άθροισμα, πρέπει να προσθέτουμε ολοένα και μικρότερα νούμερα. Αυτό μας δίνει την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση: Για να συγκλίνει η σειρά είναι απαραίτητο να έχουμε .

Απόδειξη:

Έστω . Επειδή η σειρά μας συγκλίνει έχουμε ότι , για κάποιο Σ. Ισχύει όμως ότι , συνεπώς .

Γεωμετρική Σειρά: Η σειρά στο παράδειγμα μας είναι ένα ειδικό παράδειγμα της Άπειρης Γεωμετρικής Σειράς, που έχει την μορφή Εδώ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι η . Έχουμε τώρα ότι . Επειδή η ακολουθία συγκλίνει στο 0 όταν , έχουμε ότι

Αν τώρα , τότε ο n-οστός όρος της σειράς δεν τείνει στο 0, συνεπώς η σειρά δεν μπορεί να συγκλίνει. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι αν η σειρά αποκλίνει στο άπειρο, ενώ αν η σειρά δεν συγκλίνει καθόλου.

Παρατήρηση:

Είναι δυνατόν να έχουμε ότι χωρίς να συγκλίνει η σειρά . Πάρτε την περίπτωση . Εδώ έχουμε την άπειρη σειρά . Ας μαζέψουμε τώρα τους όρους της ακολουθίας σε παρενθέσεις ως εξής έχουμε:

και αυτό προφανώς αποκλίνει στο άπειρο. Συνεπώς, παρόλο που , η σειρά μας αποκλίνει.

Αυτό δημιουργεί ένα εύλογο ερώτημα: Πότε μια σειρά συγκλίνει και πότε δεν συγκλίνει; Σίγουρα ξέρουμε ότι αν η ακολουθία των όρων της σειράς δεν τείνει στο 0, τότε η σειρά ή αποκλίνει ή δεν συγκλίνει καθόλου. Αν όμως τότε δεν ξέρουμε τι κάνει η σειρά. Μπορεί να συγκλίνει, μπορεί και όχι. Σε ποιες περιπτώσεις συγκλίνει; Αυτό μας το απαντούν μια σειρά από κριτήρια σύγκλισης. Ας δούμε μερικά από αυτά:

Κριτήριο Σύγκρισης: Ας θεωρήσουμε τις σειρές και , και έστω ότι για έχουμε ότι . Τότε

 α. Αν η σειρά συγκλίνει, τότε και η σειρά συγκλίνει,

β. Αν η σειρά αποκλίνει στο ∞, τότε και η σειρά αποκλίνει στο ∞

Απόδειξη:

Επειδή το άθροισμα των πρώτων όρων είναι πεπερασμένο, η σύγκλιση των δύο σειρών ακολουθεί την σύγκλιση των και . Σε αυτές τα μερικά αθροίσματα έχουν την μορφή και και ικανοποιούν την ανίσωση .

α. Αν τότε, επειδή η ακολουθία είναι αύξουσα, το αποτελεί άνω φράγμα για την ακολουθία, συνεπώς αποτελεί άνω φράγμα και για την ακολουθία που είναι μικρότερη. Συνεπώς η ακολουθία είναι αύξουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνει.

β. Η ακολουθία είναι αύξουσα. Η μικρότερη ακολουθία αποκλίνει στο ∞, συνεπώς οι όροι της μπορεί να γίνουν οσοδήποτε μεγάλοι. Αυτό σημαίνει ότι η μεγαλύτερη ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη. Συνεπώς αποκλίνει στο ∞. Πράγματι, αν συνέκλινε θα υποχρέωνε την να συγκλίνει, κάτι που δεν συμβαίνει.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει.

Απόδειξη:

Η σειρά μας συγκλίνει όταν και η σειρά συγκλίνει. Για όμως έχουμε ότι . Συνεπώς η σειρά μας συγκλίνει όταν η σειρά συγκλίνει. Αλλά , συνεπώς η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων παίρνει την μορφή

Επειδή όταν έχουμε ότι και συνεπώς η σειρά συγκλίνει (στο 1). Από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε τώρα ότι η σειρά συγκλίνει και συνεπώς η αρχική μας σειρά συγκλίνει.

Θεώρημα (Απόλυτη Σύγκλιση): Αν η σειρά συγκλίνει απολύτως (δηλαδή η σειρά συγκλίνει), τότε και η σειρά συγκλίνει.

Απόδειξη:

Η απόδειξη χρησιμοποιεί το κριτήριο σύγκλισης Cauchy που είναι εκτός της ύλης μας, ωστόσο μπορούμε να δούμε τον λόγο που η σειρά μας υποχρεώνεται να συγκλίνει. Η σύγκλιση της υποχρεώνει την «ουρά» της σειράς να τείνει στο 0 όταν , και συνεπώς για αρκετά μεγάλο να έχουμε . Επειδή όμως , έχουμε και ότι η «ουρά» της αρχικής σειράς τείνει στο 0. Αυτό τελικά υποχρεώνει την αρχική σειρά μας να συγκλίνει.

Οριακό Κριτήριο Λόγου: Έστω η σειρά , και έστω ότι . Τότε έχουμε:

1. Αν τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως,
2. Αν τότε η σειρά δεν συγκλίνει
3. Αν τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την σύγκλιση της σειράς. Μπορεί να συγκλίνει, ή να μην συγκλίνει.

Απόδειξη:

1. Έστω ότι . Τότε μπορούμε να βρούμε ένα λ με έτσι ώστε για να έχουμε . Αυτό συνεπάγεται ότι . Το είναι μία Γεωμετρική Σειρά, η οποία συγκλίνει για . Αυτό, από το κριτήριο σύγκρισης, υποχρεώνει την σειρά να συγκλίνει, και συνεπώς την σειρά μας να συγκλίνει απολύτως.
2. Έστω τώρα . Τότε μπορούμε να βρούμε ένα λ με έτσι ώστε για να έχουμε . Αυτό όμως συνεπάγεται ότι όταν . Συνεπώς δεν είναι δυνατόν να έχουμε , και άρα η σειρά δεν συγκλίνει.

Παράδειγμα: Ελέγξτε την σειρά ως προς την σύγκλιση

Θα εφαρμόσουμε το οριακό κριτήριο του λόγου. Εδώ , συνεπώς όταν . Συνεπώς από το κριτήριο του λόγου η σειρά δεν συγκλίνει, και επειδή είναι σειρά θετικών όρων, αποκλίνει στο ∞.

Κριτήριο n-οστής ρίζας: Έστω η σειρά , και έστω ότι . Τότε έχουμε:

1. Αν τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως,
2. Αν τότε η σειρά δεν συγκλίνει
3. Αν τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την σύγκλιση της σειράς. Μπορεί να συγκλίνει, ή να μην συγκλίνει.

Απόδειξη:

1. Έστω ότι . Τότε μπορούμε να βρούμε ένα λ με έτσι ώστε για να έχουμε . Αυτό συνεπάγεται ότι . Το είναι μία Γεωμετρική Σειρά, η οποία συγκλίνει για . Αυτό, από το κριτήριο σύγκρισης, υποχρεώνει την σειρά να συγκλίνει, και συνεπώς την σειρά μας να συγκλίνει απολύτως.
2. Έστω τώρα . Τότε μπορούμε να βρούμε ένα λ με έτσι ώστε για να έχουμε . Αυτό όμως συνεπάγεται ότι όταν . Συνεπώς δεν είναι δυνατόν να έχουμε , και άρα η σειρά δεν συγκλίνει.

Εφαρμογή (Κριτήριο n-οστής ρίζας σε δυναμοσειρές): Ας θεωρήσουμε τώρα μία σειρά της μορφής . Μία τέτοια σειρά ονομάζεται δυναμοσειρά και το αποτέλεσμα της είναι μία συνάρτηση του , εκεί που η σειρά συγκλίνει. Συνεπώς ένα εύλογο ερώτημα είναι το να βρούμε που συγκλίνει η σειρά. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το όριο υπάρχει. Τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο n-οστής ρίζας στην δυναμοσειρά μας και να πάρουμε ότι η σειρά συγκλίνει όταν , δηλαδή όταν . Βλέπουμε δηλαδή ότι υπάρχει μία ακτίνα σύγκλισης γύρω από το 0. Για εντός αυτής της ακτίνας σύγκλισης η δυναμοσειρά συγκλίνει, για εκτός της ακτίνας σύγκλισης η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει, και για πάνω στην ακτίνα σύγκλισης η δυναμοσειρά μπορεί να κάνει οτιδήποτε. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, αν και δεν το έχουμε αποδείξει εδώ, στις δυναμοσειρές πάντα εμφανίζεται μία ακτίνα σύγκλισης, που μπορεί όμως να είναι και 0 ή άπειρο.

Παράδειγμα: Μελετήστε την σύγκλιση στις παρακάτω δυναμοσειρές Taylor (Θα αποδειχτούν αργότερα):

1. Ας θεωρήσουμε την πρώτη δυναμοσειρά. Αυτή έχει την μορφή με . Εδώ δεν μας βολεύει το τεστ της n-οστής ρίζας, και θα εφαρμόσουμε το οριακό τεστ του λόγου. Εδώ για όλα τα . Συνεπώς η σειρά συγκλίνει για όλα τα στους πραγματικούς, και η ακτίνα σύγκλισης είναι άπειρη.
2. Πάλι θα χρησιμοποιήσουμε το οριακό τεστ του λόγου. Εδώ έχουμε . Συνεπώς πάλι η δυναμοσειρά συγκλίνει πάντα και η ακτίνα σύγκλισης είναι άπειρη.
3. Όμοια με το 2
4. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το τεστ της n-οστής ρίζας. Έχουμε . Σύγκλιση έχουμε όταν , συνεπώς όταν . Σε αυτή την περίπτωση λοιπών η ακτίνα σύγκλισης είναι .

Ορισμός (Εναλλασσόμενες Σειρές): Μία σειρά της μορφής , όπου , λέγεται εναλλασσόμενη σειρά.

Κριτήριο Εναλλασσόμενων Σειρών: Θεωρήστε την εναλλασσόμενη σειρά . Αν η ακολουθία είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο 0, τότε η εναλλασσόμενη σειρά συγκλίνει

Απόδειξη:

Έστω η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων. Θα μελετήσουμε τις υπακολουθίες και .

και επειδή όλες οι παρενθέσεις που προσθέτουμε είναι θετικές αφού η είναι φθίνουσα, παίρνουμε ότι η υπακολουθία είναι αύξουσα. Επίσης επειδή

έχουμε ότι η υπακολουθία είναι και άνω φραγμένη. Συνεπώς συγκλίνει σε κάποιο όριο .

Όμοια η υπακολουθία είναι φθίνουσα μια και

και είναι και κάτω φραγμένη από το 0, μια και

συνεπώς συγκλίνει σε κάποιο όριο .

Έχουμε όμως ότι . Συνεπώς , και οι δύο υπακολουθίες συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

Επειδή τώρα για μεγάλο , και οι άρτιοι και οι περιττοί όροι της ακολουθίας πλησιάζουν το ίδιο όριο έχουμε ότι όλοι οι όροι πλησιάζουν το όριο , και συνεπώς s. Επειδή τώρα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει έχουμε ότι η εναλλασσόμενη σειρά μας συγκλίνει.

Παρατήρηση 1: Μία εναλλασσόμενη σειρά μπορεί να συγκλίνει χωρίς να συγκλίνει απολύτως. Πάρτε για παράδειγμα την εναλλασσόμενη σειρά . Η σειρά αυτή συγκλίνει γιατί και η ακολουθία είναι φθίνουσα, ωστόσο η σειρά δεν συγκλίνει. Η έλλειψη της απόλυτης σύγκλισης σε μία σειρά δημιουργεί διάφορα προβλήματα. Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι για παράδειγμα ότι το αποτέλεσμα της σειράς εξαρτάται από την διάταξη των όρων.

Πάρτε για παράδειγμα την σειρά

Επειδή όλοι οι όροι στις παρενθέσεις είναι θετικοί, το όριο θα βγει θετικό. Ωστόσο η σειρά των όρων με άρτιο παρονομαστή, η , συνεπώς πάντα μπορούμε να πάρουμε αρκετούς αρνητικούς όρους στην παρένθεση ώστε να διατηρήσουμε τις παρενθέσεις αρνητικές αναδιατάσσοντας τους όρους:

Σε αυτή την αναδιάταξη βέβαια παίρνουμε ένα θετικό όρο με περισσότερους από ένα αρνητικούς, αλλά μια και ο αριθμός των αρνητικών όρων είναι άπειρος αυτό δεν είναι πρόβλημα. Και η νέα σειρά που προκύπτει με την αναδιάταξη μπορεί να συγκλίνει, αλλά συγκλίνει σε ένα διαφορετικό όριο, ένα αρνητικό όριο.

Αυτό είναι ένα πρόβλημα που παρουσιάζεται στις σειρές που συγκλίνουν αλλά δεν συγκλίνουν απολύτως. Αποδεικνύεται ότι όταν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε όλες οι αναδιατάξεις της συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

Κριτήριο Ολοκληρώματος: Έστω ότι για κάποια θετική φθίνουσα ολοκληρώσιμη συνάρτηση καλά ορισμένη στο διάστημα . Τότε η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Απόδειξη:

Ας σχηματίσουμε τα πάνω και κάτω παραλληλόγραμμα Riemann όπως στο σχήμα. Η επιφάνεια των πάνω παραλληλογράμμων μέχρι το είναι . Η επιφάνεια των κάτω παραλληλογράμμων μέχρι το είναι . Έχουμε τώρα την ανίσωση

Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, τότε υπάρχει και από την ανίσωση έχουμε ότι , συνεπώς η σειρά θετικών όρων είναι φραγμένη, άρα συγκλίνει (Η ακολουθία μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα και άνω φραγμένη).

Αν τώρα η σειρά συγκλίνει, τότε η ακολουθία είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το , συνεπώς συγκλίνει, άρα υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα.

Λήμμα: Η σειρά συγκλίνει αν και αποκλίνει αν

Απόδειξη:

Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του ολοκληρώματος. Έστω . Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα για παίρνουμε ότι

Συνεπώς αν η σειρά αποκλίνει, και αν η σειρά συγκλίνει. Για το ολοκλήρωμα δίνει , συνεπώς η σειρά μας αποκλίνει και για .

**Μιγαδικοί:** Στην αρχή ήταν οι ρητοί Q. Τα όρια συγκλινουσών ακολουθιών ρητών δεν ανήκαν απαραίτητα στους ρητούς. Έτσι δημιουργήθηκαν οι πραγματικοί R. Κατόπιν μελετήθηκαν οι λύσεις εξισώσεων. Οι εξισώσεις δευτέρου βαθμού, δεν έχουν απαραίτητα λύσεις στους πραγματικούς, γιατί δεν υπάρχουν ρίζες αρνητικών πραγματικών. Έτσι χρειάστηκε να οριστεί το i που είναι η ρίζα του –1.

Έτσι δημιουργήθηκαν οι μιγαδικοί C={a+bi|a,b∈R, i2=-1}. Φυσικά σε αυτό το σύνολο ορίστηκαν πράξεις όμοιες με τους πραγματικούς, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Στους μιγαδικούς, όπως απέδειξε ο Gauss, κάθε εξίσωση βαθμού n έχει ακριβώς n λύσεις, άμα μετρήσουμε τις πολλαπλές λύσεις σωστά.

Πράξεις:

1. Πρόσθεση-Αφαίρεση: (a+bi)±(c+di)=(a±c)+(b±d)i
2. Πολλαπλασιασμός: (a+bi)(c+di)=ac+adi+bci-bd=(ac-bd)+(ad+bc)i
3. Διαίρεση:  

Μέτρο μιγαδικού: Έστω z=a+bi. . Το μέτρο μιγαδικού είναι πάντα θετικός αριθμός.

Μιγαδικός συζυγής: . Η πράξη της συζυγίας είναι ένας ομοιομορφισμός άλγεβρας, δηλαδή ο συζυγής μίας παράστασης είναι η παράσταση των συζυγών. Πιο συγκεκριμένα, αν f(z) ένα πολυώνυμο ως προς z με πραγματικούς συντελεστές, τότε ισχύει  . Αυτό σημαίνει ότι αν το z είναι λύση της εξίσωσης f(z)=0, τότε και το  είναι λύση.

Γεωμετρική μορφή: Έστω z=a+bi. Γεωμετρικά αυτός ο μιγαδικός παριστάτε με το σημείο (a,b) όπως στο σχήμα:

 b z

 ρ

 θ

 a

Η γωνία θ ονομάζεται *argument* του z (arg(z)). Το ρ είναι το μέτρο του z. Ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται άξονας των φανταστικών και ο οριζόντιος άξονας των πραγματικών. Το a ονομάζεται *πραγματικό* μέρος του μιγαδικού και το b *φανταστικό* μέρος του μιγαδικού.

Εκθετικά: 

⇒.

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού: 

Εδώ ρ=, συνθ=, ημθ=. Κατά συνέπεια, a+bi=ρ(συνθ+iημθ)=ρeiθ.

Εκθετική μορφή ημιτόνου, συνημιτόνου:

Έχουμε ότι



.

Λύνοντας ως προς ημθ, συνθ παίρνουμε:

, .

Υπερβολικά ημίτονα και συνημίτονα:

Αυτά δίνονται από συναφείς ορισμούς μόνο που στα εκθετικά χρησιμοποιούμε πραγματικούς αριθμούς. Λόγω της συναρτησιακής ομοιότητας τους με τα κανονικά ημίτονα και συνημίτονα, ικανοποιούν σχεδόν όμοιες ταυτότητες. Ο ορισμός τους είναι:

, .

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι:

ημ(θ+φ)=ημθσυνφ+συνθημφ

συν(θ+φ)=συνθσυνφ-ημθημφ

Απόδειξη: συν(θ+φ)+iημ(θ+φ)=ei(θ+φ)=eiθeiφ=(συνθ+iημθ)(συνφ+iημφ)= (συνθσυνφ-ημθημφ)+i(ημθσυνφ+συνθημφ). Εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέλει, παίρνουμε τις παραπάνω εξισώσεις.