Μετασχηματισμός Laplace

Παράδειγμα: Βρείτε τη λύση του ακόλουθου συστήματος των διαφορικών εξισώσεων 2^{ας} τάξης:

$$\left\{\begin{array}{c} y''(t) - 4y(t) + x(t) = e^{-t} \\ x''(t) - x(t) + y(t) = e^{2t} \end{array}\right\} \ (\Sigma)$$

οι οποίες ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες:

$$\left\{\begin{array}{c} x(0) = 1,\ y(0) = 1 \\ x'(0) = \ -1, y'(0) = 2 \end{array}\right\} (A\Sigma).$$

Λύση: Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό *Laplace* στις εξισώσεις του συστήματος *(Σ)* για να πάρουμε:

$$\left\{\begin{array}{c} \mathcal{L}\{y''(t) - 4y(t) + x(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\} \\ \mathcal{L}\{x''(t) - x(t) + y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \mathcal{L}\{y''(t)\} - 4\mathcal{L}\{y(t)\} + \mathcal{L}\{x(t)\} = \dfrac{1}{s+1} \\ \mathcal{L}\{x''(t)\} - \mathcal{L}\{x(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \dfrac{1}{s-2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4Y(s) + X(s) = \dfrac{1}{s+1} \\ s^2X(s) - sx(0) - x'(0) - X(s) + Y(s) = \dfrac{1}{s-2} \end{array}\right\} \overset{(A\Sigma)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{c} s^2Y(s) - s - 2 - 4Y(s) + X(s) = \dfrac{1}{s+1} \\ s^2X(s) - s + 1 - X(s) + Y(s) = \dfrac{1}{s-2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} (s^2-4)Y(s) + X(s) = (s+2) + \dfrac{1}{s+1} \\ (s^2-1)X(s) + Y(s) = (s-1) + \dfrac{1}{s-2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (s^2-4)Y(s) + X(s) = \dfrac{(s+2)(s+1)+1}{s+1} \\ Y(s) + (s^2-1)X(s) = \dfrac{(s-1)(s-2)+1}{s-2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (s^2-4)(s^2-1)Y(s) + (s^2-1)X(s) = (s^2-1)\dfrac{(s+2)(s+1)+1}{s+1} \\ Y(s) + (s^2-1)X(s) = \dfrac{(s-1)(s-2)+1}{s-2} \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (s^2-4)(s^2-1)Y(s) + (s^2-1)X(s) = (s-1)[(s+2)(s+1)+1] \\ Y(s) + (s^2-1)X(s) = \dfrac{(s-1)(s-2)+1}{s-2} \end{array}\right\}$$

Αφαιρώντας τη δεύτερη εξίσωση από την πρώτη παίρνουμε ισοδύναμα:

$$\left\{\begin{array}{c} [(s^2-4)(s^2-1)-1]Y(s) = (s-1)[(s+2)(s+1)+1] - \dfrac{(s-1)(s-2)+1}{s-2} \\ Y(s) + (s^2-1)X(s) = \dfrac{(s-1)(s-2)+1}{s-2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} [(s^2-4)(s^2-1)-1]Y(s) = \dfrac{(s-1)(s-2)[(s+2)(s+1)+1] - (s-1)(s-2) - 1}{s-2} \\ Y(s) + (s^2-1)X(s) = \dfrac{(s-1)(s-2)+1}{s-2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} [(s^2-4)(s^2-1)-1]Y(s) = \dfrac{(s-1)(s-2)(s+2)(s+1) + (s-1)(s-2) - (s-1)(s-2) - 1}{s-2} \\ Y(s) + (s^2-1)X(s) = \dfrac{(s-1)(s-2)+1}{s-2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} [(s^2-4)(s^2-1)-1]Y(s) = \dfrac{(s^2-1)(s^2-4)-1}{s-2} \\ Y(s) + (s^2-1)X(s) = \dfrac{(s-1)(s-2)+1}{s-2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} Y(s) = \dfrac{1}{s-2} \\ Y(s) + (s^2-1)X(s) = (s-1) + \dfrac{1}{s-2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} Y(s)=\dfrac{1}{s-2} \\ \dfrac{1}{s-2}+(s^2-1)X(s)=(s-1)+\dfrac{1}{s-2} \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} Y(s)=\dfrac{1}{s-2} \\ (s^2-1)X(s)=(s-1) \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} Y(s)=\dfrac{1}{s-2} \\ X(s)=\dfrac{(s-1)}{(s^2-1)} \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} Y(s)=\dfrac{1}{s-2} \\ X(s)=\dfrac{1}{s+1} \end{array}\right\}.$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* στις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε τη ζητούμενη λύση του συστήματος *(Σ)*:

$$\left\{\begin{array}{c} \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} \\ \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+1}\right\} \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} y(t)=e^{2t} \\ x(t)=e^{-t} \end{array}\right\}.$$

Παρατήρηση: Όπως ίσως προσέξατε, το πρόβλημα με το παράδειγμα που επιχειρήσαμε να λύσουμε στην τάξη την Παρασκευή 13.11 ήταν η αρχική συνθήκη της $x'(0)$. Το αντίθετο πρόσημο κάνει όλη τη διαφορά και καθιστά το πρόβλημα άλυτο στην περίπτωση που $x'(0)=1$.