Δευτεροτάξιες διαφορικές εξισώσεις

Πχ1: Λύστε την διαφορική εξίσωση $y''+3y'+2y=0$

Λύση: Δοκιμάζουμε την $y(x)=e^{rx}$. Τότε

$$r^2e^{rx}+3re^{rx}+2e^{rx}=0 \Rightarrow \boxed{r^2+3r+2=0}$$

Αυτή είναι η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής. Λύνοντας την παίρνουμε δύο λύσεις $r_1=-1$, $r_2=-2$. Άρα οι $y_1(x)=e^{r_1x}=e^{-x}$ και οι $y_2(x)=e^{r_2x}=e^{-2x}$ είναι λύσεις της Δ.Ε.

Από την γραμμικότητα της Δ.Ε. έχουμε τώρα ότι η γενική λύση είναι της μορφής

$$\boxed{y(x)=Ae^{-x}+Be^{-2x}}$$

Παρατήρηση: Συνήθως οι σταθερές A, B προσδιορίζονται από κάποιες αρχικές ή κάποιες συνοριακές συνθήκες. Αν για παράδειγμα στο παραπάνω πρόβλημα μας δώσουν $y(0)=0$, $y'(0)=1$ τότε έχουμε

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=A+B=0 \\ y'(0)&=-A-2B=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} B&=-1 \\ A&=1 \end{aligned}$$

Άρα $\boxed{y(x)=e^{-x}-e^{-2x}}$.

Αυτή είναι η ειδική λύση της Δ.Ε.

2

<u>Άσκ 2</u>: Λύστε την διαφορική εξίσωση $y''+2y'+2y=0$ για να βρείτε την γενική λύση.

<u>Λύση</u>: Έστω $y=e^{rx}$. Τότε αντικαθιστώντας στην διαφορική παίρνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση $r^2+2r+2=0$. Αυτή μας δίνει τις λύσεις $r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=-1\pm 2i$

Άρα, στους μιγαδικούς, η γενική λύση έχει την μορφή

$$y(x)=A_I e^{(-1+2i)x}+B_I e^{(-1-2i)x}=e^{-x}\left[A_I e^{2ix}+B_I e^{-2ix}\right]$$

Για να βρούμε την πραγματική μορφή της λύσης αναπτύσσουμε σύμφωνα με τον τύπο του Euler ($e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$) τα μιγαδικά εκθετικά. Άρα

$$y(x)=e^{-x}\left[A_I\cos 2x+iA_I\sin 2x+B_I\cos 2x-iB_I\sin 2x\right]=$$

$$=e^{-x}\left[(A_I+B_I)\cos 2x+i(A_I-B_I)\sin 2x\right]$$

Η απαίτηση η λύση $y(x)$ να είναι πραγματική είναι ισοδύναμη με την απαίτηση $A_I+B_I=A_R$ πραγματικό και $i(A_I-B_I)=B_R$ πραγματικό. Άρα η πραγματική μορφή της λύσης είναι η

$$\boxed{y(x)=e^{-x}(A_R\cos 2x+B_R\sin 2x)}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Προσέξτε ότι στο e^{-x} ο συντελεστής του x είναι το πραγματικό μέρος των λύσεων της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r_{1,2}$, ενώ στο $\cos 2x$ και $\sin 2x$ ο συντελεστής του x είναι το απόλυτο του φανταστικού μέρους του $r_{1,2}$.

③ **Πχ 3:** Λύστε την διαφορική εξίσωση $y''+2y'+y=0$ αν $y(0)=1$ και $y'(0)=0$.

Λύση: Έστω $y(x)=e^{rx}$. Τότε η χαρακτηριστική εξίσωση παίρνει την μορφή $r^2+2r+1=0 \Rightarrow$ $r=-1$ είναι διπλή ρίζα.

Αυτό σημαίνει ότι $y_1(x)=e^{rx}=e^{-x}$ και $y_2(x)=xe^{rx}=xe^{-x}$ είναι λύσεις της Δ.Ε., άρα η γενική λύση έχει την μορφή $\boxed{y(x)=Ae^{-x}+Bxe^{-x}}$.

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε τώρα ότι

$$y(0)=1 \Rightarrow A=1$$
$$y'(0)=0 \Rightarrow -A+B=0 \Rightarrow B=1$$

Άρα η ειδική λύση της Δ.Ε. έχει την μορφή

$$\boxed{y(x)=e^{-x}+xe^{-x}}.$$

(4)

Π.Χ.4: Βρείτε την γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''+4y'+3y=\sin x$$

Λύση: • Πρώτα λύνουμε την ομογενή $y''+4y'+3y=0$

Δοκιμάζοντας την $y(x)=e^{rx}$ παίρνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση $r^2+4r+3=0 \Rightarrow r=\begin{cases}-3\\-1\end{cases}$

Άρα η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$\boxed{y_o(x)=Ae^{-3x}+Be^{-x}}$$

• Κατόπιν βρίσκουμε μια λύση της ανομοιογενούς $y''+4y'+3y=\sin x$ δοκιμάζοντας συναρτήσεις όμοιες με το δεξιό μέλος της εξίσωσης αλλά επιτρέποντας και κάποια ελευθερία. Εδώ δοκιμάζουμε

$$y_E(x)=\Gamma\sin x+\Delta\cos x \Rightarrow$$

$$y_E'(x)=\Gamma\cos x-\Delta\sin x \Rightarrow$$

$$y_E''(x)=-\Gamma\sin x-\Delta\cos x$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση παίρνουμε

$$(-\Gamma-4\Delta+3\Gamma)\sin x+(-\Delta+4\Gamma+3\Delta)\cos x=\sin x$$

Άρα $\left.\begin{aligned}-\Gamma-4\Delta+3\Gamma&=1\\-\Delta+4\Gamma+3\Delta&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}2\Gamma-4\Delta&=1\\2\Gamma+\Delta&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}\Gamma&=\tfrac{1}{10}\\\Delta&=-\tfrac{1}{5}\end{aligned}$

Άρα $\boxed{y_E(x)=\frac{1}{10}\sin x-\frac{1}{5}\cos x}$

• Η γενική λύση τώρα της διαφορικής μας εξίσωσης είναι το άθροισμα των δύο λύσεων

$$\boxed{y(x)=y_o(x)+y_E(x)=Ae^{-3x}+Be^{-x}+\frac{1}{10}\sin x-\frac{1}{5}\cos x}$$

Παρ.5 Βρείτε την γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 4y = \sin 2x$$

Λύση: • Πρώτα λύνουμε την ομογενή $y''+4y=0$

Αν δοκιμάσουμε την $y(x)=e^{rx}$ παίρνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση $r^2+4=0 \Rightarrow r=\pm 2i$

Άρα η (πραγματική) λύση της ομογενούς έχει την μορφή $\boxed{y_0(x) = A\cos 2x + B\sin 2x}$

• Κατόπιν ψάχνουμε για μια λύση της ανομοιογενούς. Θα θέλαμε να δοκιμάσουμε την $y_E(x) = \Gamma\cos 2x + \Delta\sin 2x$ αλλά αυτή ακριβώς είναι η λύση της ομογενούς και ξέρουμε ότι το αριστερό μέλος της εξίσωσης θα δώσει 0. Σε αυτή την περίπτωση έχει βρεθεί ότι λειτουργεί η $y_E(x) = x(\Gamma\sin 2x + \Delta\cos 2x)$.

$$y_E'(x) = (\Gamma\sin 2x + \Delta\cos 2x) + x(2\Gamma\cos 2x - 2\Delta\sin 2x)$$

$$y_E''(x) = 2(2\Gamma\cos 2x - 2\Delta\sin 2x) - x(4\Gamma\sin 2x + 4\Delta\cos 2x)$$

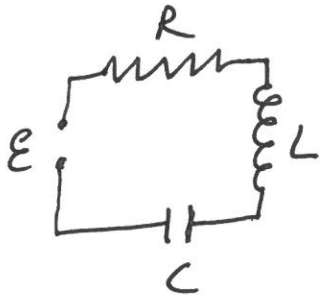
Άρα $y_E'' + 4y_E = 4(\Gamma\cos 2x - \Delta\sin 2x) = \sin 2x$

Άρα $\Gamma = 0$, $\Delta = -\frac{1}{4}$ και η λύση της ανομοιογενούς παίρνει την μορφή $\boxed{y_E(x) = -\frac{1}{4}x\cos 2x}$

• Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η $\boxed{y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x}$

Παρατήρηση: Όταν η λύση που πρέπει να δοκιμάσουμε στην ανομοιογενή εξίσωση ταυτίζεται με την λύση της ομογενούς και κατά συνέπεια χρειαζόμαστε το πολλαπλασιαστικό x στην $y_E(x)$, τότε λέμε ότι έχουμε το φαινόμενο του <u>συντονισμού</u>.

Άσκ 6: Θεωρείστε το κύκλωμα RLC του σχήματος όπου $L=0.05H$, $R=20\Omega$, $C=100\mu F$, $\mathcal{E}=100V$. Αν αρχικά στον πυκνωτή έχουμε $q(0)=0$, $q'(0)=0$ βρείτε το ρεύμα $I(t)$ στο κύκλωμα.



Λύση: $RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}Q = \mathcal{E}$ από τον δεύτερο κανόνα του Kirchoff (άθροισμα διαφορών δυναμικού σε κλειστό κύκλωμα είναι 0).

Επειδή $I=\frac{dQ}{dt}$ έχουμε την διαφορική εξίσωση

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=\mathcal{E}$$

- Για να λύσουμε αυτή την διαφορική εξίσωση αρχικά λύνουμε την ομογενή

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=0$$

Έστω $Q(t)=e^{rt}$. Τότε παίρνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση $Lr^2+Rr+\frac{1}{C}=0 \Rightarrow$

$$r=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}=-200\pm 400i$$

Άρα $\boxed{Q_0(t)=e^{-200t}(A\cos 400t+B\sin 400t)}$

- Για την ειδική λύση δοκιμάζουμε $Q_E(t)=Q_0$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε $\frac{Q_0}{C}=\mathcal{E} \Rightarrow \boxed{Q_0=\mathcal{E}C=0.01\,Cb}$

- Άρα η γενική μας λύση είναι

$$Q(t)=Q_0(t)+Q_E(t)=e^{-200t}(A\cos 400t+B\sin 400t)+0.01$$

$Q(0)=0 \Rightarrow A+0.01=0 \Rightarrow A=-0.01$

$Q'(0)=0 \Rightarrow -200A+400B=0 \Rightarrow B=-0.005$

Άρα $\boxed{Q(t)=-e^{-200t}(0.01\cos 400t+0.005\sin 400t)+0.01}$