Συνάρτηση Green

Παρ.1: Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y=\cos\omega_0 t \qquad y(0)=0,\ y'(0)=0 .$$

a) Λύστε αυτό το πρόβλημα με χρήση μετασχηματισμού Laplace στην περίπτωση $\omega\neq\omega_0$

b) Λύστε αυτό το πρόβλημα στην περίπτωση $\omega=\omega_0$

c) Βρείτε την συνάρτηση Green του προβλήματος

d) Βρείτε έναν ολοκληρωτικό τύπο για την λύση του γενικού εξαναγκασμένου αρμονικού ταλαντωτή

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y=F(t),\ \text{με } y(0)=0 \text{ και } y'(0)=0 .$$

e) Εφαρμόστε τον παραπάνω ολοκληρωτικό τύπο για να βρείτε την λύση στο b).

Λύση: a) $\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y\right)=\mathcal{L}(\cos\omega_0 t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow s^2\mathcal{L}y-y'(0)-sy(0)+\omega^2\mathcal{L}y=\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s^2+\omega^2)\mathcal{L}y=\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}y=\frac{s}{(s^2+\omega^2)(s^2+\omega_0^2)}}$$

Για να αντιστρέψουμε χρειαζόμαστε μερικά κλάσματα:

$$\frac{1}{(s^2+\omega^2)(s^2+\omega_0^2)}=\frac{A}{s^2+\omega_0^2}+\frac{B}{s^2+\omega^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(s^2+\omega^2)+B(s^2+\omega_0^2)=1\Rightarrow (A+B)s^2+A\omega^2+B\omega_0^2=1$$

Άρα $A+B=0 \Rightarrow B=-A$

$A\omega^2+B\omega_0^2=1\Rightarrow A(\omega^2-\omega_0^2)=1\Rightarrow A=\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\Rightarrow B=-\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}$

Άρα $\mathcal{L}y=\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\frac{s}{s^2+\omega_0^2}-\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)\Rightarrow \boxed{y(t)=\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}(\cos\omega_0 t-\cos\omega t)}$

(2)

b) Στην περίπτωση $w=w_0$ τότε $\mathcal{L}y = \frac{s}{(s^2+w_0^2)^2} = \frac{s}{s^2+w_0^2}\cdot\frac{1}{s^2+w_0^2}$

• Από τον μετασχηματισμό Laplace του $\int_0^t f(t-u)g(u)du$ έχουμε

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+w_0^2}\cdot\frac{1}{s^2+w_0^2}\right) = \frac{1}{w_0}\int_0^t \cos w_0(t-u)\sin w_0 u\, du =$$

$$= \frac{1}{2w_0}\int_0^t \left(\sin w_0 t + \sin w_0(2u-t)\right)du =$$

$$= \frac{t\sin w_0 t}{2w_0} - \frac{1}{(2w_0)^2}\cos(2u-t)\Big|_0^t =$$

$$= \frac{t\sin w_0 t}{2w_0} - \frac{1}{4w_0^2}\left(\cos(t) - \cos(-t)\right) = \frac{t\sin w_0 t}{2w_0}$$

Αυτή είναι η περίπτωση του συντονισμού, όπου το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνει γραμμικά με τον χρόνο.

c) Για να βρούμε την συνάρτηση Green του προβλήματος πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + w^2 y = \delta(t-t'), \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace έχουμε

$$s^2\mathcal{L}y - y'(0) - s\,y(0) + w^2\mathcal{L}y = e^{-t's} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}y = \frac{e^{-t's}}{s^2+w^2} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{w}\theta(t-t')\sin w(t-t')$$

Άρα η συνάρτηση Green είναι η

$$\boxed{G(t,t') = \frac{1}{w}\theta(t-t')\sin w(t-t')}$$

(13)

δ) Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y = F(t) \quad \text{με } y(0)=0,\ y'(0)=0 \quad \text{δίνεται}$$

συναρτήσει της συνάρτησης Green από τον τύπο

$$y(t)=\int_0^{\infty} G(t-t')\,F(t')\,dt' = \frac{1}{\omega}\int_0^{\infty}\theta(t-t')\sin\omega(t-t')\,F(t')\,dt' \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^{t}\sin\omega(t-t')\,F(t')\,dt'}$$

ε) Στην περίπτωση του συντονισμού με $F(t)=\cos\omega_0 t$ έχουμε

$$y(t)=\frac{1}{\omega_0}\int_0^{t}\sin\omega_0(t-t')\cos\omega_0 t'\,dt' =$$

$$=\frac{1}{2\omega_0}\int_0^{t}\left[\sin\omega_0 t+\sin\omega_0(t-2t')\right]dt' =$$

$$=\frac{t\sin\omega_0 t}{2\omega_0}+\frac{1}{(2\omega_0)^2}\cos\omega_0(t-2t')\Big|_0^{t}=\frac{t\sin\omega_0 t}{2\omega_0}$$