(7)

Μετασχηματισμός Laplace

__Πχ.1__: Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Laplace της $f(t)=\cos t$ και της $g(t)=\sin t$.

__Λύση__: $\mathcal{L}(e^{it}) = \int_0^\infty e^{-st}e^{it}dt = \int_0^\infty e^{-(s-i)t}dt =$

$$= -\left.\frac{e^{-(s-i)t}}{s-i}\right|_0^\infty = \frac{1}{s-i} = \frac{s+i}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + i\,\frac{1}{s^2+1}$$

Αλλά $\mathcal{L}(e^{it}) = \mathcal{L}(\cos t) + i\,\mathcal{L}(\sin t)$

Άρα $\mathcal{L}(\cos t) = \frac{s}{s^2+1}$ και $\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}$

__Πχ. 2__: Υπολογίστε με την χρήση πινάκων τον μετασχηματισμό
$\mathcal{L}(1+4t+2e^{3t}-5\sin t)$

__Λύση__: $\mathcal{L}(1+4t+2e^{3t}-5\sin t) =$

$$= \mathcal{L}(1) + 4\,\mathcal{L}(t) + 2\,\mathcal{L}(e^{3t}) - 5\,\mathcal{L}(\sin t) =$$

$$= \frac{1}{s} + 4\,\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s-3} - \frac{5}{s^2+1}$$

__Πχ. 3__: Αποδείξτε ότι $\mathcal{L}(y'(t)) = -y(0) + s\,\mathcal{L}(y(t))$

__Λύση__: $\mathcal{L}(y'(t)) = \int_0^\infty e^{-st}y'(t)dt = e^{-st}y(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (e^{-st})' y(t)dt =$

$$= -y(0) + s\int_0^\infty e^{-st}y(t)dt = -y(0) + s\,\mathcal{L}(y(t))$$

Π.χ. 4: Λύστε την διαφορική εξίσωση $y''+y=0$ αν $y(0)=0$ και $y'(0)=1$ με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

Λύση: Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δυο μέλη της εξίσωσης έχουμε

$$\mathcal{L}(y''(t)) + \mathcal{L}(y(t)) = 0 \Rightarrow$$

$$s^2\mathcal{L}(y(t)) - y'(0) - s\,y(0) + \mathcal{L}(y(t)) = 0 \Rightarrow$$

$$(s^2+1)\,\mathcal{L}(y(t)) - 1 = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(y(t)) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Από πίνακες μετασχηματισμών Laplace μπορούμε να αντιστρέψουμε αυτόν τον μετασχηματισμό και παίρνουμε

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t.$$