Πχ.5 : Βρείτε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t \le 1 \\ \frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2 & 1 < t \le 2 \\ 6 - t^2 & 2 < t \end{cases}$$

Λύση: Έστω $P(t,a,b) = \theta(t-a) - \theta(t-b)$ η συνάρτηση μοναδιαίου παλμού στο $[a,b)$. Τότε

$$f(t) = t^2 P(t,0,1) + \frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2 P(t,1,2) + (6-t^2)\,\theta(t-2)$$

- $$\mathcal{L}(t^2\theta(t-a)) = e^{-sa}\mathcal{L}(t+a)^2 = e^{-sa}\mathcal{L}(t^2+2ta+a^2) =$$
$$= e^{-sa}\left(\frac{2}{s^3} + 2a\frac{1}{s^2} + a^2\frac{1}{s}\right)$$

- $$\mathcal{L}\left(\left(t-\frac{3}{2}\right)^2\theta(t-a)\right) = e^{-sa}\mathcal{L}\left(t+a-\frac{3}{2}\right)^2 =$$
$$= e^{-sa}\mathcal{L}\left[t^2 + 2\left(a-\frac{3}{2}\right)t + \left(a-\frac{3}{2}\right)^2\right] =$$
$$= e^{-sa}\left(\frac{2}{s^3} + 2\left(a-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{s^2} + \left(a-\frac{3}{2}\right)^2\frac{1}{s}\right)$$

- $$\mathcal{L}((6-t^2)\,\theta(t-a)) = e^{-as}\mathcal{L}(6-(t+a)^2) =$$
$$= e^{-as}\mathcal{L}(-t^2 - 2at + (6-a^2)) =$$
$$= e^{-as}\left(-\frac{2}{s^3} - \frac{2a}{s^2} + \frac{6-a^2}{s}\right)$$

Έχουμε τώρα ότι

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}\left[t^2\theta(t) - t^2\theta(t-1) + \frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2\theta(t-1) - \frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2\theta(t-2) + (6-t^2)\,\theta(t-2)\right] =$$

$$= \left(\frac{2}{s^3} + 0\right) - e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s}\right)$$
$$- \frac{1}{2}e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s}\right) + e^{-2s}\left(-\frac{2}{s^3} - \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s}\right) =$$

$$= \frac{2}{s^3} + e^{-s}\left(-\frac{1}{s^3} - \frac{5}{2}\frac{1}{s^2} - \frac{7}{8}\frac{1}{s}\right) + e^{-2s}\left(-\frac{3}{s^3} - \frac{9}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{15}{8}\frac{1}{s}\right)$$

10)
Πχ.6 : Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = P(t,a,b) \quad , \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

στο οποίο έχουμε τροφοδοτήσει τον αρμονικό ταλαντωτή με ένα παλμό $P(t,a,b) = \theta(t-a) - \theta(t-b)$.

Λύση: $\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2} + 4y\right) = \mathcal{L}\left(\theta(t-a) - \theta(t-b)\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow s^2\mathcal{L}y - s\,y(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}y = \frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-bs}}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s^2+4)\mathcal{L}y = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}y = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s(s^2+4)}}$$

• Έχουμε τώρα ότι

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4} \Rightarrow A(s^2+4) + (Bs+C)s = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A+B)s^2 + Cs + 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}$$

• Συνεπώς $\mathcal{L}y = (e^{-as} - e^{-bs})\left(\frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}\right) =$

$$= \frac{1}{4}\frac{e^{-as}}{s} - \frac{1}{4}\frac{e^{-bs}}{s} - \frac{1}{4}e^{-as}\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{4}e^{-bs}\frac{s}{s^2+4} \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-as}}{s}\right) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-bs}}{s}\right) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-as}\frac{s}{s^2+4}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-bs}\frac{s}{s^2+4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{4}\theta(t-a) - \frac{1}{4}\theta(t-b) - \frac{1}{4}\theta(t-a)\cos 2(t-a) + \frac{1}{4}\theta(t-b)\cos 2(t-b)}$$