23

# Μετασχηματισμός Fourier

<u>Παρ.1</u>: Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της $f(x)=e^{-|x|}$

<u>Λύση</u>: $F(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-iwx}dx=$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-iwx}dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-iwx}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{iwx}dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-iwx}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{(-1+iw)x}}{-1+iw}\right|_0^{\infty}+\frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{(-1-iw)x}}{-1-iw}\right|_0^{\infty}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{-1+iw}-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{-1-iw}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+iw}+\frac{1}{1-iw}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{2}{1+w^2}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+w^2}$$

(24)

<u>παρ</u>: Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & a>0,\ x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

<u>Λύση</u>: $F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, \frac{e^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2\pi}\, \frac{1}{a+i\omega}$$

Παρ. 3: Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{-ax}$, $a>0$, $x>0$. Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της περιττής επέκτασης της στους πραγματικούς

Λύση: $F(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin wx\,dx =$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin wx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-ax}\frac{e^{iwx}-e^{-iwx}}{2i}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty} e^{-(a-iw)x}\,dx - \frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty} e^{-(a+iw)x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\left.\frac{e^{-(a-iw)x}}{-(a-iw)}\right|_0^{\infty} - \frac{1}{\pi i}\left.\frac{e^{-(a+iw)x}}{-(a+iw)}\right|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\frac{1}{a-iw} - \frac{1}{\pi i}\frac{1}{a+iw} = \frac{1}{\pi i}\frac{2iw}{(a-iw)(a+iw)} =$$

$$= \frac{2w}{\pi}\frac{1}{a^2+w^2} = \frac{2}{\pi}\frac{w}{a^2+w^2}$$

26

Πχ. 4: Αν η $f(x)$ ορίζεται στο $(0,+\infty)$, τότε λύστε την εξίσωση $\int_0^\infty f(x)\cos\lambda x \, dx = e^{-\lambda}$

Λύση: $F(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\lambda x \, dx$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της άρτιας επέκτασης της $f(x)$.

Συνεπώς $F(\lambda) = \frac{2}{\pi} e^{-\lambda}$.

Από την αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier έχουμε $f(x) = \int_0^\infty F(\lambda)\cos\lambda x \, d\lambda \Rightarrow$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi} e^{-\lambda}\cos\lambda x \, d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (-e^{-\lambda})'\cos\lambda x \, d\lambda =$$

$$= -\frac{2}{\pi} e^{-\lambda}\cos\lambda x \Big|_0^\infty - \frac{2x}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda}\sin\lambda x \, d\lambda =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{2x}{\pi}\int_0^\infty (-e^{-\lambda})'\sin\lambda x \, d\lambda =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{2x}{\pi} e^{-\lambda}\sin\lambda x \Big|_0^\infty - \frac{2x^2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda}\cos\lambda x \, d\lambda =$$

$$= \frac{2}{\pi} - x^2 f(x) \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}$$

(27)

**Παρ.5** Βρείτε την συνέλιξη $f*g$ αν $f(x)=e^{-x}$ και

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{για } 0\le x<1 \\ 0 & \text{για } x>1 \text{ και } x<0 \end{cases}$$

**Λύση:**

$$f*g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y-x)\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y+x} g(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 e^{x-y}\, x\, dx = e^{-y}\int_0^1 x e^x\, dx =$$

$$= e^{-y}\left[ x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx \right] =$$

$$= e^{-y}\left[ e - e^x\Big|_0^1 \right] = e^{-y}[e-e+1] = e^{-y}.$$

Πχ.6 Επαληθεύστε την ταυτότητα Parseval για την $f(x) = e^{-a|x|}$. Δίνεται ότι $F(\omega) = \dfrac{a}{\pi(a^2+\omega^2)}$

Λύση! Η ταυτότητα Parseval για τον μετασχηματισμό Fourier μας λέει ότι

- $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega .$$ Εδώ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|x|}dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-2ax}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left.\frac{e^{-2ax}}{-2a}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi a}$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{a^2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a^2+\omega^2)^2}d\omega \quad \frac{\omega = a\tan u}{d\omega = a(1+\tan^2 u)\,du}$$

$$= \frac{a^2}{\pi^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^4(1+\tan^2 u)^2}\, a(1+\tan^2 u)\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^2 u}du = \frac{1}{\pi^2 a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}du = \frac{1}{\pi^2 a}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2u\,du\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 a}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2u\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{1}{2\pi a}$$

(29)

Πχ. 7 : Βρείτε τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier αν οι διακριτές τιμές του σήματος που έχουμε πάρει είναι $x_0=1,\ x_1=2,\ x_2=0,\ x_3=-1$

Λύση: $y_k = \sum_{n=0}^{3} x_n e^{-\frac{2\pi i}{4}kn}$ γιατί ο αριθμός διακριτών τιμών είναι $N=4$. Άρα

$$y_0 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$y_1 = x_0 + x_1 e^{-\frac{\pi i}{2}} + x_2 e^{-\pi i} + x_3 e^{-\frac{3\pi i}{2}} =$$

$$= 1 + 2(-i) + 0(-1) + (-1)i = 1-3i$$

$$y_2 = x_0 + x_1 e^{-\pi i} + x_2 e^{-2\pi i} + x_3 e^{-3\pi i} =$$

$$= 1 + 2(-1) + 0(1) + (-1)(-1) = 0$$

$$y_3 = x_0 + x_1 e^{-\frac{3\pi i}{2}} + x_2 e^{-3\pi i} + x_3 e^{-\frac{9\pi i}{2}} =$$

$$= 1 + 2(i) + 0(-1) + (-1)(-i) = 1+3i$$

30

Άσκ. 8: Στο παράδειγμα 7 αντιστρέψτε τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier.

Λύση: Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier δίνεται από την σχέση

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{\frac{2\pi i}{N}kn}$$

Στο παράδειγμα 7, $N=4$, $y_0=2$, $y_1=1-3i$, $y_2=0$, $y_3=1+3i$. Άρα

$$x_0 = \frac{1}{4}(y_0+y_1+y_2+y_3) = \frac{1}{4}(2+1-3i+0+1+3i) = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{4}\left(y_0+y_1 e^{\frac{\pi i}{2}}+y_2 e^{\pi i}+y_3 e^{\frac{3\pi i}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2+(1-3i)i+0+(1+3i)(-i)\right) = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(y_0+y_1 e^{\pi i}+y_2 e^{2\pi i}+y_3 e^{3\pi i}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2+(1-3i)(-1)+0+(1+3i)(-1)\right) = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{4}\left(y_0+y_1 e^{\frac{3\pi i}{2}}+y_2 e^{3\pi i}+y_3 e^{\frac{9\pi i}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2+(1-3i)(-i)+0+(1+3i)i\right) = -1$$