Πιθανότητες

πχ.1: Ποια είναι η πιθανότητα να βγάλουμε 9 αν ρίξουμε δύο δίκαια ζάρια;

Λύση: Ο δειγματικός χώρος ισοπίθανων γεγονότων είναι ο
$\Omega = \{ (\zeta_1, \zeta_2) \mid \zeta_1 = \text{αποτέλεσμα πρώτου ζαριού}, \zeta_2 = \text{αποτέλεσμα δεύτερου} \}$

Το γεγονός να βγάλουμε 9 είναι το
$A = \{ (5,4), (4,5), (6,3), (3,6) \}$

Αν $\#\Omega$ είναι ο αριθμός στοιχείων του Ω και
$\#A$ ο αριθμός στοιχείων του A, τότε

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

πχ.2: Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε δύο άσσους αν τραβήξουμε δυο χαρτιά στην τύχη από μια τράπουλα;

Λύση: $\Omega = \{ \{x_1, x_2\} \mid x_{1,2} = \text{χαρτιά της τράπουλας} \}$
Εδώ ο δειγματικός χώρος αποτελείται από μη διατεταγμένα ζευγάρια χαρτιών
Το γεγονός να τραβήξουμε δυο άσσους είναι το
$A = \{ \{A_1, A_2\} \mid A_{1,2} = \text{άσσοι της τράπουλας} \}$

$$\#\Omega = \binom{52}{2} = \frac{52 \cdot 51}{2} = 1326$$

$$\#A = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6}{1326} = 0{,}0045 = 0{,}45\%$$

Πχ. 3: Αν τραβήξουμε 5 χαρτιά από μια τράπουλα, ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε τραβήξει 3 άσσους και 2 ρηγάδες;

Λύση: $\Omega = \{ \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \mid x_i = \text{χαρτί τράπουλας} \}$

$$A = \{ \{A_1, A_2, A_3, P_1, P_2\} \mid A_i = \text{άσσος},\ P_i = \text{ρήγας} \}$$

$$\# \Omega = \binom{52}{5}$$

$$\# A = \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}$$

Άρα $P(A) = \dfrac{\# A}{\# \Omega} = \dfrac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$

Πχ. 4: Πόσοι τρόποι υπάρχουν να αναδιατάξουμε τα γράμματα στην λέξη TENNESSEE;

Λύση: Έστω ότι αριθμήσουμε τα ίδια γράμματα ώστε όλα τα γράμματα να είναι διαφορετικά

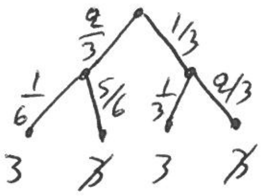
$T E_1 N_1 N_2 E_2 S_1 S_2 E_3 E_4$.

Τότε οι διατάξεις όλων των γραμμάτων είναι $9!$

Αν τώρα παραλείψουμε την αρίθμηση, $4!\,2!\,2!$ διατάξεις, που αντιστοιχούν σε αναδιατάξεις των ίδιων γραμμάτων, μας δίνουν μια διαφορετική διάταξη. Άρα οι διαφορετικές αναδιατάξεις της λέξης TENNESSEE είναι $\dfrac{9!}{4!\,2!\,2!}$

Πχ.5: Έχουμε δύο ζάρια κανονικά και ένα που φέρνει μόνο 1,3,5 με ίση πιθανότητα. Πιάνουμε ένα ζάρι στην τύχη και το ρίχνουμε. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε 3;

Λύση:



Εδώ έχουμε ένα πείραμα τύχης σε δύο στάδια. Πρώτα επιλέγουμε ζάρι και έχουμε πιθανότητα $\frac{2}{3}$ να επιλέξουμε κανονικό και $\frac{1}{3}$ να επιλέξουμε αυτό που φέρνει 1,3,5.

Κατόπιν ρίχνουμε το ζάρι. Αν ρίξουμε το κανονικό έχουμε πιθανότητα $\frac{1}{6}$ για 3 και $\frac{5}{6}$ για όχι 3. Αν πιάσουμε το ζάρι που φέρνει 1,3,5 έχουμε πιθανότητα $\frac{1}{3}$ να φέρουμε 3 και $\frac{2}{3}$ να φέρουμε όχι 3. Η πιθανότητα να φέρουμε 3 είναι

$$P(3) = P(3/\text{κανονικό})\,P(\text{κανονικό}) + P(3/\text{πειραγμένο})\,P(\text{πειραγμένο}) =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Στο γράφημα αυτό μπορούμε να το διαβάσουμε σαν το άθροισμα των διαδρομών που οδηγούν στο 3.

Πχ. 6: Στο παράδειγμα 5, βρείτε την πιθανότητα να πιάσουμε το φτιαγμένο ζάρι αν ξέρουμε ότι φέραμε 3;

Λύση: $$P(\text{φτιαγμένο}/3) \overset{\text{Bayes}}{\underset{\text{Theorem}}{=}} \frac{P(3/\text{φτιαγμένο})\,P(\text{φτιαγμένο})}{P(3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{2}$$

Πχ. 7: Ένα δοχείο έχει μόνο άσπρες μπάλες, και ένα άλλο έχει 30 άσπρες και 10 μαύρες. Επιλέγουμε ένα δοχείο στην τύχη και τραβάμε μια μπάλα στην τύχη. Αν αυτή η μπάλα είναι άσπρη, ποια η πιθανότητα να την τραβήξαμε από το πρώτο δοχείο;

Λύση: Έστω τα γεγονότα

A = "Μπάλα είναι άσπρη"

B_1 = "Μπάλα τραβήχτηκε από το πρώτο δοχείο"

B_2 = "Μπάλα τραβήχτηκε από το δεύτερο δοχείο"

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)\,P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A/B_1)\,P(B_1)}{P(A/B_1)\,P(B_1) + P(A/B_2)\,P(B_2)} =$$

$$= \frac{1\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$$

(35)
Π.Χ. 8: Μια τυχαία μεταβλητή ξ έχει κατανομή $P(\xi=n)=\frac{A}{3^n}$, $n\in\mathbb{N}$

α) Βρείτε την σταθερά A

β) Βρείτε την αναμενόμενη τιμή της ξ

Λύση: α) $\sum_{n=0}^{\infty} P(\xi=n)=1$ αφού η συνολική πιθανότητα είναι 1.

Άρα $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{3^n}=1 \Rightarrow A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1 \Rightarrow$ Από γεωμετρική σειρά

$\Rightarrow A\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1 \Rightarrow A\cdot\frac{3}{2}=1 \Rightarrow A=\frac{2}{3}$

β) $E\xi=\sum_{n=0}^{\infty} n\,P(\xi=n)=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot\frac{1}{3^n}$

Έχουμε τώρα ότι για $|x|<1$, $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}n x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n x^n=\frac{x}{(1-x)^2}$

Για $x=\frac{1}{3}$ έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} n\,\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{3})^2}=\frac{3}{4}$

Άρα $E\xi=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n\,\frac{1}{3^n}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$.

Πχ. 9: Τυχαία μεταβλητή ξ έχει πυκνότητα πιθανότητας

$$P_\xi(x) = \frac{a}{x^2+1}, \quad -\infty < x < \infty .$$

a) Βρείτε την σταθερά a

b) Βρείτε την πιθανότητα $P(-1 \le \xi \le 1)$

c) Βρείτε την αναμενόμενη τιμή της ξ

Λύση: a) Συνολική πιθανότητα $= 1 \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{x^2+1}\,dx = 1 \Rightarrow a \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{\pi}}$$

b) $$P(-1 \le \xi \le 1) = \int_{-1}^{1} P_\xi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \arctan x \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

c) $$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, P_\xi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,d(1+x^2) = \frac{1}{2\pi} \ln(1+x^2) \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

Η αναμενόμενη τιμή της ξ δεν υπάρχει

Παρ. 10: Έστω η εκθετική κατανομή $P_\xi(x) = a e^{-b|x|}$.

a) Βρείτε την σχέση μεταξύ a, b έτσι ώστε η ολική πιθανότητα να είναι 1

b) Βρείτε την αναμενόμενη τιμή της ξ

c) Βρείτε την διασπορά της ξ

Λύση: a) $$\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(x)\,dx = 1 \Rightarrow a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-b|x|}\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a\int_0^{\infty} e^{-bx}\,dx = 1 \Rightarrow 2a \left.\frac{e^{-bx}}{-b}\right|_0^{\infty} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{b} = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{b}{2}}$$

Με αυτό $P_\xi(x) = \frac{b}{2} e^{-b|x|}$

b) $$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, P_\xi(x)\,dx = \frac{b}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-b|x|}\,dx = 0$$

γιατί ολοκληρώνουμε περιττή συνάρτηση με συμμετρικά όρια

c) $$D\xi = E(\xi-\mu)^2 = E(\xi-0)^2 = E\xi^2$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P_\xi(x)\,dx = \frac{b}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-b|x|}\,dx =$$

$$= b\int_0^{\infty} x^2 e^{-bx}\,dx = b\int_0^{\infty} x^2 \left(\frac{e^{-bx}}{-b}\right)' dx =$$

$$= -x^2 e^{-bx}\Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} x\, e^{-bx}\,dx = 2\int_0^{\infty} x \left(\frac{e^{-bx}}{-b}\right)' dx =$$

$$= -\frac{2}{b} x\, e^{-bx}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{b}\int_0^{\infty} e^{-bx}\,dx = \frac{2}{b}\left.\frac{e^{-bx}}{-b}\right|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{2}{b^2}$$

Άρα η διασπορά $\boxed{D\xi = \frac{2}{b^2}}$.

Πχ. 11: Ένας φούρνος φτιάχνει Ν σταφιδόψωμα από ζυμάρι που έχει n σταφίδες κατά ανακατεμένες. Ποια είναι η πιθανότητα κάποιο επιλεγμένο σταφιδόψωμο να μην έχει καμμία σταφίδα;

Λύση: Έστω ένα σταφιδόψωμο. Μία σταφίδα έχει πιθανότητα $p=\frac{1}{N}<<1$ να είναι στο συγκεκριμένο σταφιδόψωμο.

Από διωνυμική κατανομή,

$$P(\xi=0) = 1-\binom{n}{0} p^0 q^n$$

Επειδή $p=\frac{1}{N}<<1$ ισχύει η προσέγγιση Poisson για την διωνυμική κατανομή, άρα

$$P(\xi=0) \simeq \frac{\mu^0}{0!} e^{-\mu} \quad \text{όπου } \mu = np = \frac{n}{N}.$$

Άρα $P(\xi=0) \simeq e^{-\frac{n}{N}}$.

(39) Πχ.12: Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα 200 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε μεταξύ 80 και 120 φορές κεφαλή;

Λύση: Έστω ξ η διωνυμική τυχαία μεταβλητή που μας δίνει τον αριθμό των κεφαλών σε διακόσιες ρίψεις νομίσματος. Τότε

$$P(\xi=k)=\binom{200}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{200-k}=\binom{200}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{200-k}$$

και κατά συνέπεια

$$P(80\le\xi\le120)=\sum_{k=80}^{120}\binom{200}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{200-k}=$$

$$=\sum_{k=80}^{120}\binom{200}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{200}$$

Αυτό υπολογίζεται ευκολότερα χρησιμοποιώντας την κανονική προσέγγιση στην διωνυμική κατανομή. Αν $\mu=Np=200\frac{1}{2}=100$ και $\sigma=\sqrt{Npq}=\sqrt{200\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=5\sqrt{2}$ και ορίσουμε την κανονικοποιημένη τυχαία μεταβλητή

$$\zeta=\frac{\xi-100}{5\sqrt{2}}$$ τότε

$$P(80\le\xi\le120)=P\left(\frac{80-100}{5\sqrt{2}}\le\zeta\le\frac{120-100}{5\sqrt{2}}\right)=$$

$$=P\left(-2\sqrt{2}\le\zeta\le2\sqrt{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{2\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\cdot0{,}4976=0{,}9952=99{,}52\,\%$$

Εδώ το ολοκλήρωμα μαζί με τον παράγοντα $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ το έχουμε διαβάσει από πίνακες για την επιφάνεια κάτω από κανονική καμπύλη