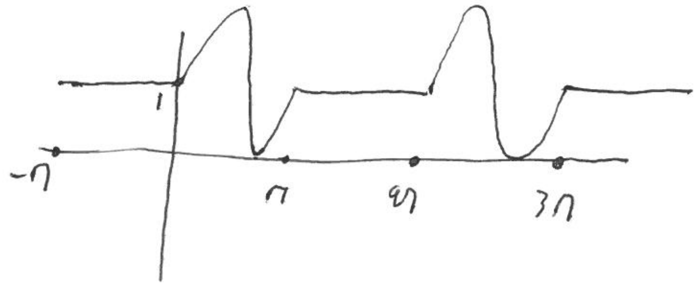
(14)

Σειρές Fourier

Πχ.1 : Αναπτύξτε την περιοδική επέκταση της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} 1, & -\pi\le x\le 0 \\ 1+\sin 2x & 0\le x\le \pi \end{cases}$ σε σειρά Fourier.

Λύση:



Αν $a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx$ και

$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx$

τότε $f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$

Εδώ • $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(1+\sin(2x))\,dx=$

$=1+1+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)\,dx=2-\frac{1}{2\pi}\cos(2x)\Big|_0^{\pi}=2$

• Αν $m\neq 0$ τότε

$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)\cos(mx)\,dx$

$=\frac{1}{m\pi}\sin(mx)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\sin(2+m)x+\sin(2-m)x]\,dx=$

$=0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(2+m)x\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(2-m)x\,dx=$

$=-\frac{1}{2\pi(2+m)}\cos(2+m)x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2\pi(2-m)}\cos(2-m)x\Big|_0^{\pi}=$

$=-\frac{1}{2\pi(2+m)}\left((-1)^{2+m}-1\right)-\frac{1}{2\pi(2-m)}\left((-1)^{2-m}-1\right)=\begin{cases}0 & \text{αν } m \text{ άρτιο}\\ \frac{4}{\pi(2-m)(2+m)} & \text{αν } m \text{ περιττό}\end{cases}$

(15)

Συνεπώς έχουμε ότι

$$\boxed{a_m = \begin{cases} 2 & \text{αν } m=0 \\ 0 & \text{αν } m \text{ άρτιο και } >0 \\ \dfrac{4}{\pi(2-m)(2+m)} & \text{αν } m \text{ περιττό} \end{cases}}$$

• $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)dx +$

$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)\sin(mx)\,dx \overset{m>0}{=}$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)\sin(mx)\,dx$

Το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)dx$ είναι 0 επειδή είναι συμμετρικό ολοκλήρωμα σε ακέραιο αριθμό περιόδων. Άρα

$b_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\cos(2-m)x - \cos(2+m)x]\,dx \overset{m\neq 2,\cancel{-2}}{=}$

$= \frac{1}{2\pi(2-m)}\sin(2-m)x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi(2+m)}\sin(2+m)x\Big|_0^{\pi} = 0$

Αν $m=2$, τότε $b_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}dx = \frac{1}{2}$

Άρα $\boxed{b_m = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m=0 \\ 0, & m\neq 2 \end{cases}}$

• Άρα $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ περιττός}}}^{\infty}\frac{1}{(2-m)(2+m)}\cos(mx) \overset{m=2n-1}{\Longrightarrow}$

$$\boxed{f(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3-2n)(1+2n)}\cos(2n-1)x}$$

Πχ.2: Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $f(0)=1$ στο παράδειγμα 1 για να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}+\cdots=\frac{1}{3}$$

Λύση: $f(x)=1+\frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3-2n)(1+2n)}\cos(2n-1)x$

άρα $f(0)=1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3-2n)(1+2n)}=1 \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3-2n)(1+2n)}=0 \Rightarrow \frac{1}{3}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3-2n)(1+2n)}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)(2n+1)}=0 \overset{n'=n-1}{\Longrightarrow} \frac{1}{3}-\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{1}{(2n'-1)(2n'+3)}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{1}{(2n'-1)(2n'+3)}=\frac{1}{3}}\,,$$

(1Γ)

Άσκ3: Αναπτύξτε την περιοδική επέκταση της

$$f(x) = \begin{cases} x+\pi & -\pi \le x < 0 \\ x-\pi & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

σε σειρά Fourier

Εξηγήστε την τιμή που παίρνει η σειρά Fourier όταν $x=0$.

Λύση: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

- $a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(mx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi\cos(mx)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi\cos(mx)\,dx =$$

$= 0$ γιατί

i) $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(mx)\,dx = 0$ γιατί είναι συμμετρικό ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης

ii) $\int_{-\pi}^{0}\cos mx\,dx = \int_{0}^{\pi}\cos mx\,dx$ γιατί είναι ολοκλήρωμα άρτιας συνάρτησης.

- $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(mx)\,dx + \int_{-\pi}^{0}\sin(mx)\,dx - \int_{0}^{\pi}\sin(mx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(mx)\,dx - 2\int_{0}^{\pi}\sin(mx)\,dx =$$

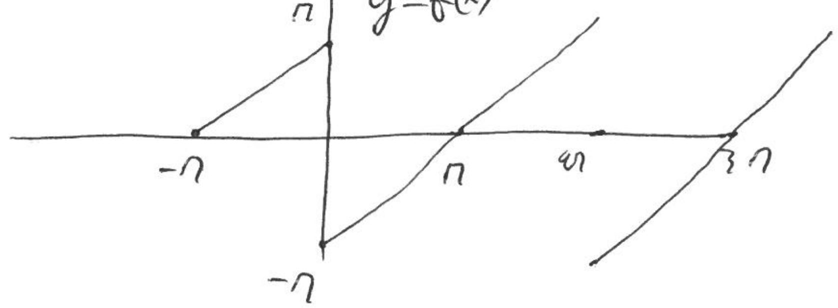
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\left(-\frac{\cos(mx)}{m}\right)'dx + 2\left.\frac{\cos(mx)}{m}\right|_{0}^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{m\pi}\left. x\cos(mx)\right|_{0}^{\pi} + \frac{2}{m\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(mx)\,dx + \frac{2}{m}(\cos(m\pi)-1) =$$

$$= -\frac{2}{m}\cos(m\pi) + \frac{2}{m^2\pi}\left.\sin(mx)\right|_{0}^{\pi} + \frac{2}{m}(\cos(m\pi)-1) = -\frac{2}{m}$$

· Άρα $\boxed{f(x) = -2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin(mx)}$

· Όταν τώρα $x=0$, τότε $f(0)=0$ γιατί $\sin(0)=0$ από το ανάπτυγμα Fourier.
Βέβαια στον αρχικό ορισμό της συνάρτησης το $x=0$ είναι εκτός του πεδίου ορισμού γιατί εκεί έχουμε ασυνέχεια:



Έχουμε όμως ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\pi$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\pi$

Στην ασυνέχεια στο $x=0$ έχουμε τώρα, από το Θεώρημα Fourier ότι $f(0)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0^-} f(x)+\lim_{x\to 0^+} f(x)\right]$ που ισχύει

γιατί $0=\frac{1}{2}[\pi-\pi]$.

<u>Πχ.4</u>: Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα Parseval στο πχ. 3 για να δείξετε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

<u>Λύση</u>: Η ταυτότητα Parseval μας λέει ότι

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$$

Στην περίπτωση μας $a_n = 0$, $b_n = -\frac{2}{n}$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx \Rightarrow$$

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (x+\pi)^2 \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (x-\pi)^2 \, dx \Rightarrow$$

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \left.\frac{(x+\pi)^3}{3}\right|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \left.\frac{(x-\pi)^3}{3}\right|_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^3}{3} - \frac{1}{\pi} \frac{(-\pi)^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

Άρα $4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

Πχ. 5: Βρείτε την σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης της

$$f(x)=\begin{cases} 2-x, & 0<x\le 2 \\ 0, & 2<x\le 4 \end{cases}$$

Λύση: Εδώ η $f(x)$ είναι αρχικά ορισμένη στο $[0,L]=[0,4]$ και άρα έχει περίοδο $L=4$ και όχι 2π. Σε αυτή την περίπτωση

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2\pi n x}{L}+b_n\sin\frac{2\pi n x}{L}$$

όπου

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{2\pi n x}{L}\,dx$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{2\pi n x}{L}\,dx$$

Στην περίπτωση μας, αν $n\neq 0$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2(2-x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2(2-x)\left(\frac{\sin\frac{\pi n x}{2}}{\frac{\pi n}{2}}\right)'dx=\frac{1}{\pi n}\left[(2-x)\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2+\int_0^2\sin\frac{\pi n x}{2}\,dx\right]$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\,\frac{\cos\frac{\pi n x}{2}}{\frac{\pi n}{2}}\Big|_0^2=-\frac{2}{\pi^2 n^2}\left[\cos \pi n-1\right]=$$

$$=-\frac{2}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n-1\right]=\frac{2}{\pi^2 n^2}\left[1-(-1)^n\right]$$

Αν $n=0$,

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^2(2-x)\,dx=\frac{1}{2}\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2=1$$

Επίσης

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2(2-x)\sin\frac{\pi n x}{2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^2(2-x)\left(\frac{\cos\frac{\pi n x}{2}}{\frac{\pi n}{2}}\right)'dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\left[(2-x)\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2+\int_0^2\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi n}-\frac{2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2=\frac{2}{\pi n}\quad.\ \text{Άρα}$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos\frac{\pi n x}{2}+\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\right]}$$

π.χ. 6: Χρησιμοποιώντας την ασυνέχεια της συνάρτησης $f(x)$ στο $x=0$ στο π.χ. 3 δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Λύση: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

Από το θεώρημα Fourier έχουμε ότι η σειρά Fourier στο $x=0$ είναι ίση με $\dfrac{\lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to 0^-} f(x)}{2} = 1$

Άρα $\dfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2}{\pi^2 n^2}(1-(-1)^n)\cos 0 + \dfrac{2}{\pi n}\sin 0\right] = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2}(1-(-1)^n) = 1$$

Επειδή οι όροι του αθροίσματος είναι μη μηδενικοί μόνο για n περιττό, θέτουμε $n = 2k-1$. Άρα

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2k-1)^2}\cdot 2 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

Πχ 7: Δείξτε ότι η περιοδική επέκταση της $f(x)=e^{x}$, $-\pi<x<\pi$ έχει μιγαδική σειρά Fourier

$$f(x)=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}e^{inx}$$

Λύση: Η μιγαδική σειρά Fourier για περίοδο 2π έχει την μορφή $f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, όπου

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx .$$

Στην περίπτωση μας

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(1-in)x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\right|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{\pi}e^{-in\pi}-e^{-\pi}e^{in\pi}}{1-in}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{\pi}(-1)^n-e^{-\pi}(-1)^n}{1-in}=\frac{(-1)^n}{2\pi}\cdot\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{1-in}$$

Άρα $$\boxed{f(x)=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}e^{inx}}$$