

Σεξ Προβλημάτων 4

Σειρές Fourier και Μετασχηματισμός Fourier

1. Αναπτύξτε σε σειρά Fourier την $f(x) = \begin{cases} 4, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 < x < \pi \end{cases}$ που έχει πεπεσμένη περίοδο 2π στο $[-\pi, \pi]$ χρησιμοποιώντας ως βοηθητική συνάρτηση την $g(x) = f(x) - 3$.
2. Χρησιμοποιώντας την ρωτόζουρα Parseval στο παραπάνω παράδειγμα αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
3. Βρείτε την μιγαδική σειρά Fourier της περιόδου 2π της $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -\pi < x < 0 \\ x^2 + 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$
4. Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της $f(x) = e^{-2|x|}$.
5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-ax}$, $a > 0$, $x > 0$. Βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier της άρτιας επέκτασης της $f(x)$ στους πραγματικούς.
6. Λύστε την $\int_0^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx = g(\lambda)$, $g(\lambda) = \begin{cases} 1 & 0 < \lambda < \pi \\ 0 & \lambda > \pi \end{cases}$ αν η $f(x)$ ορίζεται στο $(0, +\infty)$.
7. Βρείτε την συνάρτηση $f * g$ αν $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x < 0 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x < 0 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$
8. Βρείτε τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier αν οι τιμές του σήματος είναι $x_0 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Επαληθεύστε την αντιστροφή του διακριτού μετασχηματισμού Fourier