Κεφάλαιο 9

Σειρές Fourier και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αναπτύγματα συναρτήσεων σε σειρές Fourier και την εφαρμογή τους στην επίλυση προβλημάτων συνοριακακών τιμών (ΠΣΤ) για δεύτερης τάξης ΣΔΕ. Τα προβλήματα με συνθήκες (δεσμεύσεις) που μελετήσαμε στα πλαίσια της θεωρίας των ΔΕ με συνήθεις παραγώγους, ήταν αυτά των αρχικών τιμών (ΠΑΤ), δηλαδή ΔΕ που συνοδεύονταν από συνθήκη (δέσμευση) σε ένα μόνο σημείο. Στο σημείο αυτό θα ασχοληθούμε με την επίλυση ΔΕ που υποκείνται σε μια ή περισσότερες συνθήκες (δεσμεύσεις) σε δύο ή περισσότερα σημεία. Σημεία, τα οποία εντοπίζονται στο σύνορο του πεδίου, που εξελίσσεται το φυσικό φαινόμενο για αυτό χρησιμοποιείται ο όρος Προβήματα Συνοριακών Τιμών (ΠΣΤ).

Πιο αναλυτικά στο εδάφιο 9.1.1 θα δώσουμε τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες των σειρών Fourier . Η ανισότητα Bessel και η ταυτότητα Parseval θα μελετηθούν στο εδάφιο 9.1.2. Στο εδάφιο 9.1.3 θα ασχοληθούμε με την ολοκλήρωση και παραγώγιση σειρών Fourier. Στο εδάφιο 9.2.1 θα συζητήσουμε ΠΣΤ για βαθμωτές δεύτερης τάξης ΔΕ. Στο εδάφιο 9.2.2 θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα ιδιοτιμών για γραμμικη ΔΕ με σταθερούς συντελεστές και θα μελετήσουμε μια ειδική κατηγορία ΠΣΤ Sturm-Liouville τα οποία έχουν εφαρμογές σε προβλήματα των φυσικών επιστημών που μοντελοποιούνται από μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ).

9.1 Σειρές Fourier

9.1.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Από τον λογισμό συναρτήσεων μιας μεταβλητής (βλ. Ρόθος & Σφυράκης, 2011) γνωρίζουμε ότι, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, μια συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά

Taylor γύρω από ένα σημείο x_0

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

όπου $|x - x_0| < \delta$ για κάποιο $\delta > 0$. Πολλές φορές επιβάλλετια από τις εφαρμογές, μια συνάρτηση να αναπτυχθεί σε άλλα είδη σειρών, το χρησιμότερο από τα οποία είναι οι τριγωνομετρικές σειρές και ειδικότερα οι σειρές Fourier, τις οποίες θα μελετήσουμε στη συνέχεια. Σειρές τέτοιου τύπου, συναντώνται στις ΔΕ κατά τη μελέτη των *περιοδικών λύσεων* γραμμικών ΔΕ με περιοδικούς μη ομογενείς όρους ή μη γραμμικες ΔΕ. Επίσης παρουσιάζονται κατά την επίλυση ΜΔΕ, καθώς και ΠΣΤ.

Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό των συντελεστών και τις ιδιότητες των σειρών Fourier, θα παρουσιάσουμε ορισμένα στοιχεία της θεωρίας συναρτήσεων.

Ορθογωνιότητα συναρτήσεων

Δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f και g καλούνται *ορθογώνιες* στο διάστημα $[a, b]$, αν

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = 0.$$

Γενικότερα, οι συναρτήσεις $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$(πεπερασμένο ή άπειρο το πλήθος) καλούνται ορθογώνιες στο $[a, b]$ αν

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)\, dx = 0 \quad \text{για} \quad i \neq j.$$

Η σημασία της ορθογωνιότητας συναρτήσεων θα φανεί στη συνέχεια που θα δώσουμε τον ορισμό των σειρών Fourier.

Παράδειγμα 9.1.1 Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{L},\ \sin\frac{\pi x}{L},\ \cos\frac{2\pi x}{L},\ \sin\frac{2\pi x}{L}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{L},\ \sin\frac{n\pi x}{L}, \ldots \tag{9.1}$$

είναι ορθογώνιες στο $[-L, L]$.

Λύση Πρέπει να δείξουμε

$$\int_{-L}^{L} f(x)g(x)\, dx = 0 \tag{9.2}$$

όπου f και g είναι δύο διαφορετικές από τις δοσμένες συναρτήσεις (9.1). Αν r είναι μη μηδενικός ακέραιος, τότε

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{r\pi x}{L}\, dx = \frac{L}{r\pi} \sin\frac{r\pi x}{L}\Big|_{-L}^{L} = 0. \tag{9.3}$$

και

$$\int_{-L}^{L} \sin \frac{r\pi x}{L}\, dx = -\frac{L}{r\pi} \cos \frac{r\pi x}{L}\Big|_{-L}^{L} = 0.$$

Συνεπώς η (9.2) ισχύει αν $f \equiv 1$ και g οποιαδήποτε συνάρτηση από τις (9.1).

Αν $f(x) = \cos(m\pi x/L)$ και $g(x) = \cos(n\pi x/L)$ όπου m και n είναι θετικοί ακέραιοι, τότε

$$\int_{-L}^{L} f(x)g(x)\, dx = \int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{9.4}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

με $A = m\pi x/L$ και $B = n\pi x/L$. Τότε η (9.4) γίνεται

$$\int_{-L}^{L} f(x)g(x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-L}^{L} \cos \frac{(m-n)\pi x}{L}\, dx + \int_{-L}^{L} \cos \frac{(m+n)\pi x}{L}\, dx\right].$$

Αφού $m - n$ και $m + n$ μη μηδενικοί ακέραιοι, η (9.3) συνεπάγεται ότι τα ολοκληρώματα είναι μηδέν. Συνεπώς, η (9.2) είναι αληθής.

Αν $f(x) = \sin(m\pi x/L)$ και $g(x) = \sin(n\pi x/L)$ όπου m και n είναι θετικοί ακέραιοι $m \neq n$, τότε

$$\int_{-L}^{L} f(x)g(x)\, dx = \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{9.5}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

με $A = m\pi x/L$ και $B = n\pi x/L$. Τότε η (9.5) γίνεται

$$\int_{-L}^{L} f(x)g(x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-L}^{L} \cos \frac{(m-n)\pi x}{L}\, dx - \int_{-L}^{L} \cos \frac{(m+n)\pi x}{L}\, dx\right] = 0.$$

Αν $f(x) = \sin(m\pi x/L)$ και $g(x) = \cos(n\pi x/L)$ όπου m και n είναι θετικοί ακέραιοι (όχι απαρραίτητα διαφορετικοί) , τότε

$$\int_{-L}^{L} f(x)g(x)\, dx = \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = 0.$$

■

Θεώρημα 9.1.1 *Έστω ότι οι συναρτήσεις $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$, είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[a, b]$ και*

$$\int_{a}^{b} \phi_n^2(x)\, dx \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9.6}$$

Έστω $c_1, c_2, c_3, \ldots$ είναι σταθερές ώστε τα μερικά αθροίσματα $f_N(x) = \sum_{m=1}^{N} c_m\phi_m(x)$ ικανοποιούν τις ανισότητες

$$|f_N(x)| \leq M, \quad a \leq x \leq b, \quad N = 1, 2, 3, \ldots$$

για κάποια σταθερά $M < \infty$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι η σειρά

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m\phi_m(x) \tag{9.7}$$

συγκλίνουν και είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b \phi_n^2(x)\,dx}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9.8}$$

Απόδειξη Πολλαπλασιάζοντας την (9.7) με ϕ_n και ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx = \int_a^b \phi_n(x)\left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m\phi_m(x)\right)\,dx. \tag{9.9}$$

Λόγω της σύγκλισης των σειρών, μπορούμε να εναλλάξουμε τη θέση του ολοκληρώματος και του αθροίσματος, οπότε η (9.9) γράφεται ως

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\,dx. \tag{9.10}$$

Αφού

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = 0 \quad \text{αν} \quad m \neq n,$$

η (9.10) γίνεται

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx = c_n \int_a^b \phi_n^2(x)\,dx.$$

Τώρα η σχέση (9.6) συνεπάγεται την (9.8). ■

Το Θεώρημα 9.1.1 μας δίνει τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 9.1.1 Έστω $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, είναι ορθογώνιες συναρτήσεις στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b \phi_n^2(x)\,dx \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Έστω f είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a, b]$, και ορίζουμε

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b \phi_n^2(x)\,dx}, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \tag{9.11}$$

Τότε, η άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)$ καλείται *ανάπτυγμα Fourier της f ως προς το ορθογώνιο σύνολο* $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, και $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ καλούνται *συντελεστές Fourier της f αναφορικά* $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Δηλώνουμε την σχέση της f και του αντίστοιχου αναπτύγματος Fourier με

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x), \quad a \le x \le b. \tag{9.12}$$

Θα πρέπει να αναρωτηθούμε γιατί δεν γράφουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x), \quad a \le x \le b,$$

αντί την (9.12). Δυστυχώς, δεν συμβαίνει πάντα στην πράξη. Η σειρά στο δεξί μέρος μπορεί να αποκλίνει για μερικές τιμές ή και για όλες τις τιμές του x στο $[a, b]$, ή μπορεί να συγκλίνει στην $f(x)$ για μερικές τιμές του x και όχι για άλλες. Προς το παρόν, θα θεωρούμε τη σειρά σχετιζόμενη με την f λόγω του ορισμού των συντελεστών $\{c_n\}$, και αυτή η σχέση θα δίνεται άτυπα με τη σχέση (9.12).

Σειρές Fourier

Θα μελετήσουμε το ανάπτυγμα Fourier ως προς τις ορθογώνιες συναρτήσεις

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{L},\ \sin\frac{\pi x}{L},\ \cos\frac{2\pi x}{L},\ \sin\frac{2\pi x}{L}, \dots, \cos\frac{n\pi x}{L},\ \sin\frac{n\pi x}{L}, \dots.$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-L, L]$, το ανάπτυγμα Fourier της f ως προς τις παραπάνω ορθογώνιες συναρτήσεις, καλείται *σειρά Fourier της f στο $[-L, L]$*. Αφού

$$\int_{-L}^{L} 1^2\,dx = 2L,$$

$$\int_{-L}^{L} \cos^2\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(1 + \cos\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{L}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{L}\right)\Bigg|_{-L}^{L} = L,$$

και

$$\int_{-L}^{L} \sin^2\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{L}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{L}\right),\Bigg|_{-L}^{L} = L,$$

έχουμε από την (9.11) ότι η σειρά Fourier της f στο$[-L, L]$ είναι

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

όπου

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx,\ n \geq 1.$$

Ορισμός 9.1.2 Εστω $f(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα $[-L, L]$. Ονομάζουμε σειρά ή ανάπτυγμα Fourier της $f(x)$ στο διάστημα $[-L, L]$ την έκφραση

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right], \tag{9.13}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{9.14}$$

Το $[-L, L]$ ονομάζεται *θεμελειώδες διάστημα*, οι αριθμοί a_n, b_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ αποτελούν τους συντελεστές Fourier και οι σχέσεις (9.14) τους τύπους Fourier για το ανάπτυγμα (9.13).

Σύγκλιση Σειρών Fourier

Το ερώτημα της σύγκλισης σειρών Fourier μιας αυθαίρετης ολοκληρώσιμης συνάρτησης είναι εκτός του σκοπού του βιβλίου, αλλά θα παρουσιάσουμε με απλό και κατανοητό τρόπο το θεώρημα το οποίο μας βοηθάει στις εφαρμογές.

Ορισμός 9.1.3 Μια συνάρτηση f καλείται *τμηματικά ομαλή* στο $[a, b]$ αν:

(α΄) f έχει πεπερασμένα σημεία ασυνέχειας στο (a, b).

(β΄) f' υπάρχει και είναι συνεχής εκτός από πεπερασμένα σημεία στο (a, b).

(γ΄) $f(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} f(x)$ και $f'(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} f'(x)$ υπάρχει αν $a \leq x_0 < b$.

(δ΄) $f(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} f(x)$ και $f'(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} f'(x)$ υπάρχει αν $a < x_0 \leq b$.

Αφού οι f και f' απαιτούνται να είναι συνεχείς σε πεπερασμένα το πλήθος σημεία στο $[a, b]$, $f(x_0+) = f(x_0-)$ και $f'(x_0+) = f'(x_0-)$ για όλες τις πεπερασμένες το πλήθος τιμές του x_0 στο (a, b). Θα λέμε ότι η f έχει ένα *σημείο ασυνέχειας* στο x_0 αν $f(x_0+) \neq f(x_0-)$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει τις ικανές συνθήκες για την σύγκλιση των σειρών Fourier, για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στα βιβλία (J.W. Brawn & d R. Churchill 1993, W.E Boyce & R.C. DiPrima, 2001)

Θεώρημα 9.1.2 *Αν f είναι τμηματικά ομαλή συνάρτηση στο $[-L, L]$, τότε η σειρά Fourier,*

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{9.15}$$

της f στο $[-L, L]$ συγκλίνει για όλα τα x στο $[-L, L]$ επιπλέον ,

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } -L < x < L \text{ και } f \text{ είναι συνεχής στο } x \\ \dfrac{f(x-) + f(x+)}{2} & \text{αν } -L < x < L \text{ και } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x \\ \dfrac{f(-L+) + f(L-)}{2} & \text{αν } x = L \text{ ή } x = -L. \end{cases}$$

Αφού $f(x+) = f(x-)$, αν f είναι συνεχής στο x, μπορούμε ισοδύναμα να γράψουμε

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x+) + f(x-)}{2} & \text{αν} \quad -L < x < L, \\ \dfrac{f(L-) + f(-L+)}{2} & \text{αν} \quad x = \pm L. \end{cases}$$

Σημειώνουμε, ότι η F είναι τμηματικά ομαλή στο $[-L, L]$ και $F(x) = f(x)$ σε όλα τα σημεία του ανοικτού διαστήματος $(-L, L)$ όπου η f είναι συνεχής. Αφού η σειρά στην (9.15) συγκλίνει στην $F(x)$ για όλα τα x in $[-L, L]$, μπορούμε να θεωρήσουμε το σφάλμα

$$E_N(x) = \left| F(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right|$$

ώστε να γίνει όσο πιο μικρό θέλουμε για όλα τα x στο $[-L, L]$ επιλέγοντας το N αρκετά μεγάλο. Αυτό όμως δεν είναι σωστό αν η f έχει ασυνέχεια κάπου στο $(-L, L)$, ή αν $f(-L+) \neq f(L-)$. Δηλ.

Αν f έχει ασυνέχεια στο σημείο $\alpha \in (-L, L)$, θα υπάρχει ακολουθία σημείων $\{u_N\}$ και $\{v_N\}$ στο $(-L, \alpha)$ και (α, L), αντίστοιχα, έτσι ώστε

$$\lim_{N\to\infty} u_N = \lim_{N\to\infty} v_N = \alpha$$

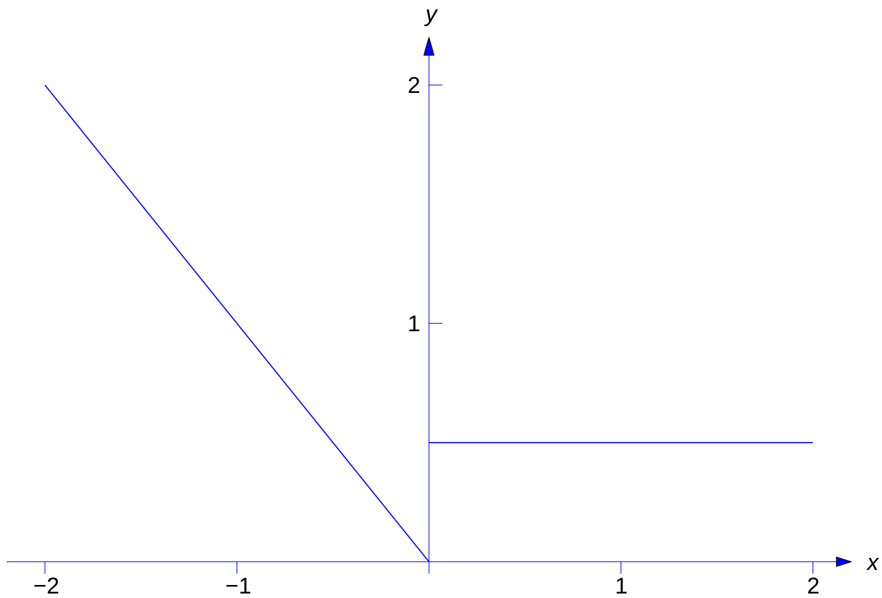
και

$$E_N(u_N) \approx .09|f(\alpha-) - f(\alpha+)| \quad \text{και} \quad E_N(v_N) \approx .09|f(\alpha-) - f(\alpha+)|.$$

Έτσι, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης σφάλματος $E_N(x)$ κοντά στο α δεν πλησιάζει το μηδέν καθώς $N \to \infty$, αλλά ίσα που εμφανίζεται όσο και πιο κοντά στο (και από τις δύο μεριές) α, και είναι ανεξάρτητο του N.

Αν $f(-L+) \neq f(L-)$, τότε θα υπάρχουν ακολουθίες σημείων $\{u_N\}$ και $\{v_N\}$ in $(-L, L)$ έτσι ώστε

$$\lim_{N\to\infty} u_N = -L, \quad \lim_{N\to\infty} v_N = L,$$



Σχήμα 9.1: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f του Παραδείγματος 9.1.2.

$$E_N(u_N) \approx .09|f(-L+) - f(L-)| \quad \textit{και} \quad E_N(v_N) \approx .09|f(-L+) - f(L-)|.$$

Αυτό που περιγράψαμε παραπάνω με απλό τρόπο είναι γνωστό και ως *φαινόμενο Gibbs*, βλ. Σχήματα 9.2-9.4, και θα δώσουμε μερικά παραδείγματα στη συνέχεια του εδαφίου.

Παράδειγμα 9.1.2 Να βρεθεί η σειρά Fourier της τμηματικά συνεχούς συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 < x < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

στο $[-2, 2]$ και οποιεσδήποτε τιμές στα σημεία 0 και ± 2 (Σχήμα 9.1). Καθορίστε το άθροισμα της σειράς Fourier για $-2 \leq x \leq 2$.

Λύση Η f είναι τμηματικά ομαλή στο $[-2, 2]$ και οι συντελεστές της σειράς Fourier

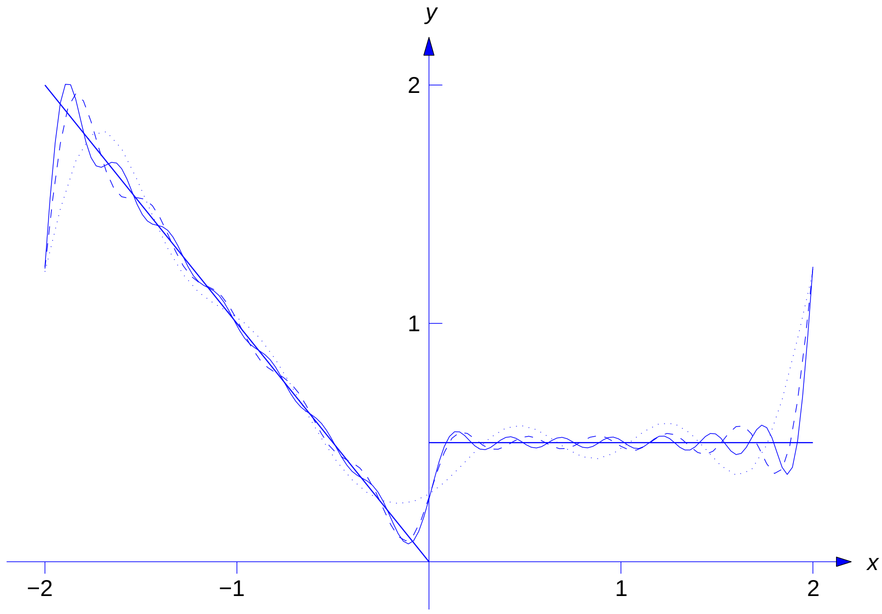
$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2} \right)$$

δεν επηρεάζονται από τις τιμές στο 0 και ± 2. Σε κάθε περίπτωση το Θεώρημα 9.1.2 συνεπάγεται ότι $F(x) = f(x)$ στο $(-2, 0)$ και $(0, 2)$, όπου η f είναι συνεχής, αφού

$$F(-2) = F(2) = \frac{f(-2+) + f(2-)}{2} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

και
$$F(0) = \frac{f(0-) + f(0+)}{2} = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$
Συνοψίζοντας,
$$F(x) = \begin{cases} \frac{5}{4}, & x = -2 \\ -x, & -2 < x < 0, \\ \frac{1}{4}, & x = 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < x < 2, \\ \frac{5}{4}, & x = 2. \end{cases}$$
Υπολογίζουμε τους συντελεστές της σειράς Fourier ως εξής:
$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{0}(-x)\,dx + \int_{0}^{2}\frac{1}{2}\,dx\right] = \frac{3}{4}.$$
Αν $n \geq 1$, τότε
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}(-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{0}^{2}\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right] \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1), \end{aligned}$$
και
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}(-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{0}^{2}\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2n\pi}(1 + 3\cos n\pi) = \frac{1}{2n\pi}(1 + 3(-1)^n), \end{aligned}$$
όπου cos$n\pi = (-1)^n$. Συνεπώς
$$F(x) = \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 + 3(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$
Το Σχήμα 9.2 δείχνει ότι το μερικό άθροισμα
$$F_m(x) = \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{m}\frac{1 + 3(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$$
προσεγγίζει την $f(x)$ για $m = 5$ (καμπύλη με τελείες), $m = 10$ (διακεκομμένη καμπύλη), και $m = 15$ (συμπαγής καμπύλη).

Άρτιες και Περιττές Συναρτήσεις



Σχήμα 9.2: Προσέγγιση της $f(x)$ με μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier στο $[-2, 2]$.

Ο υπολογισμός των συντελεστών της σειράς Fourier για την f απλοποιείται σημαντικά, όταν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. Έστω u και v ορισμένες στο $[-L, L]$ και

$$u(-x) = u(x) \quad \text{και} \quad v(-x) = -v(x), \quad -L \leq x \leq L.$$

Τότε, η u είναι *άρτια* συνάρτηση και η v είναι *περιττή συνάρτηση*. Ισχύει:

Θεώρημα 9.1.3 *Υποθέτουμε ότι u είναι άρτια και v είναι περιττή στο $[-L, L]$. Τότε:*

$$\textbf{(a)} \quad \int_{-L}^{L} u(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} u(x)\,dx, \quad \textbf{(b)} \quad \int_{-L}^{L} v(x)\,dx = 0,$$

$$\textbf{(c)} \quad \int_{-L}^{L} u(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 2\int_{0}^{L} u(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

$$\textbf{(d)} \quad \int_{-L}^{L} v(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 2\int_{0}^{L} v(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

$$\textbf{(e)} \quad \int_{-L}^{L} u(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0 \quad \textit{και} \quad \textbf{(f)} \quad \int_{-L}^{L} v(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0.$$

Το άθροισμα (διαφορά) και το γινόμενο (πηλίκο) δύο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.
Το άθροισμα (διαφορά) δύο περιττών συναρτήσεων, είναι περιττή. Ενώ το γινόμενο (πηλίκο) δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια.

Το άθροισμα (διαφορά) μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης, δεν είναι πάντα, ούτε άρτια, ούτε περιττή, ενώ το γινόμενο (πηλίκο) δύο τέτοιων συναρτήσεων, είναι περιττή συνάρτηση.

Παράδειγμα 9.1.3 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η $f(x) = x^2 - x$ στο $[-2, 2]$, και καθορίστε το άθροισμα της στο $-2 \le x \le 2$.

Λύση Αφού $L = 2$,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + b_n \sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

όπου

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(x^2 - x)\,dx, \tag{9.16}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2 - x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{9.17}$$

και

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2 - x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9.18}$$

Απλοποιούμε τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων με χρήση του Θεωρήματος 9.1.3 με $u(x) = x^2$ και $v(x) = x$. Έτσι, απο την (9.16),

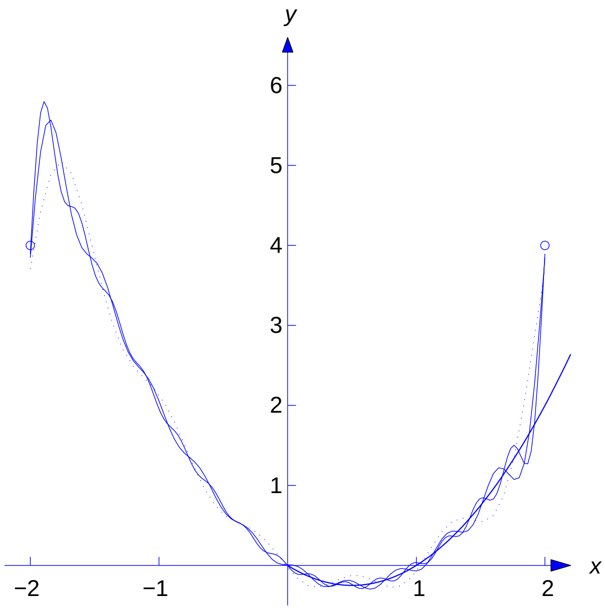
$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Από την (9.17),

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 x^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - 2\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right] \\ &= \frac{8}{n^2\pi^2}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right] \\ &= \frac{8}{n^2\pi^2}\left[2\cos n\pi - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right] = (-1)^n\frac{16}{n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Από (9.18),

$$\begin{aligned} b_n &= -\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right] \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[2\cos n\pi - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right] = (-1)^n\frac{4}{n\pi}. \end{aligned}$$



Σχήμα 9.3: Προσέγγιση της $f(x) = x^2 - x$ με μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier στο $[-2, 2]$

Συνεπώς

$$F(x) = \frac{4}{6} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

Το Θεώρημα 9.1.2 μας δίνει

$$F(x) = \begin{cases} 4, & x = -2, \\ x^2 - x, & -2 < x < 2, \\ 4, & x = 2. \end{cases}$$

Στο Σχήμα 9.3 φαίνεται ότι το μερικό άθροισμα

$$F_m(x) = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

προσεγγίζει την $f(x)$ για $m = 5$ (καμπύλη με τελείες), $m = 10$ (διακεκομμένη καμπύλη), και $m = 15$ (συμπαγής καμπύλη). ■

Από το Θεώρημα 9.1.3 έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 9.1.4 *Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-L, L]$.*

(α΄) *Αν f είναι άρτια συνάρτηση, η σειρά Fourier της f στο $[-L, L]$ είναι*

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L},$$

όπου

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad \textit{και} \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n \geq 1.$$

(β΄) *Αν f είναι περιττή συνάρτηση , η σειρά Fourier της f στο $[-L, L]$ είναι*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

όπου

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Παράδειγμα 9.1.4 Βρείτε τη σειρά Fourier της $f(x) = x$ στο $[-\pi, \pi]$ και καθορίστε το άθροισμα της στο $-\pi \leq x \leq \pi$.

Λύση Αφού η f είναι περιττή συνάρτηση και $L = \pi$,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

όπου

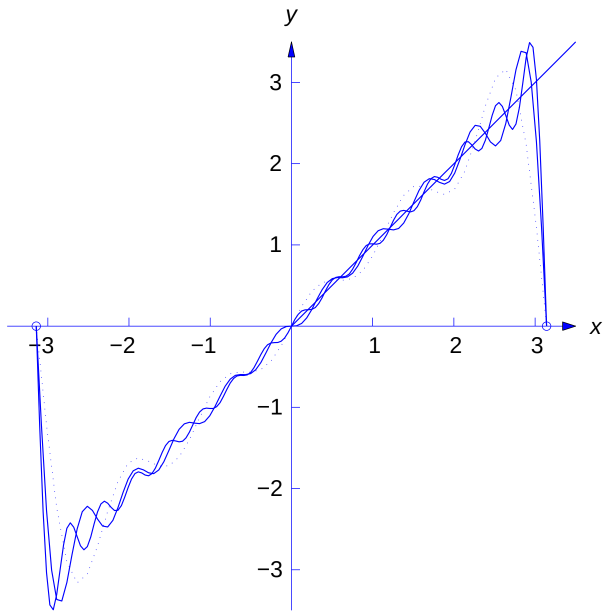
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\,dx = -\frac{2}{n\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] \\ &= -\frac{2}{n}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi} = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Οπότε

$$F(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx.$$

Το Θεώρημα 9.1.2 δίνει

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = -\pi, \\ x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pi. \end{cases}$$



Σχήμα 9.4: Προσέγγιση της $f(x) = x$ με μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier στο $[-\pi, \pi]$

Στο Σχήμα 9.4 φαίνεται καθαρά πως το μερικό άθροισμα

$$F_m(x) = -2\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$$

προσεγγίζει την $f(x)$ για $m = 5$ (καμπύλη με τελείες), $m = 10$ (διακεκομμένη καμπύλη), και $m = 15$ (συμπαγής καμπύλη).

Παράδειγμα 9.1.5 Βρείτε τη σειρά Fourier για τη συνάρτηση $f(x) = |x|$ στο $[-\pi, \pi]$ και καθορίστε το άθροισμα της στο $-\pi \leq x \leq \pi$.

Λύση Αφού η f είναι άρτια και $L = \pi$,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Επίσης $f(x) = x$ αν $x \geq 0$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{x^2}{2\pi}\bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

και, αν $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx\,dx\right] \\ &= \frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$F(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx. \tag{9.19}$$

Όμως

$$(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 2m, \\ -2 & \text{αν } n = 2m+1, \end{cases}$$

οι όροι στην (9.19) για $n = 2m$ είναι όλοι μηδέν. Συνεπώς, θεωρούμε μόνο όρους για τους οποίους $n = 2m+1$, μπορούμε να γράψουμε την (9.19) ως

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)x.$$

Αντικαθιστούμε τον δείκτη m με n, και έχουμε

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$$

Αφού $|x|$ είναι συνεχής για όλα τα x και $|-\pi| = |\pi|$, από το Θεώρημα 9.1.2 συνεπάγεται ότι $F(x) = |x|$ για όλα τα x στο $[-\pi, \pi]$.

Παράδειγμα 9.1.6 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x) = x(x^2 - L^2)$ στο $[-L, L]$ και να καθορίστε το άθροισμα της στο $-L \leq x \leq L$.

Λύση Αφού η f είναι περιττή,

$$F(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$

όπου

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L x(x^2-L^2)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left[x(x^2-L^2)\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \int_0^L (3x^2-L^2)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\right] \\
&= \frac{2L}{n^2\pi^2}\left[(3x^2-L^2)\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - 6\int_0^L x\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right] \\
&= \frac{12L^2}{n^3\pi^3}\left[x\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\right] = (-1)^n\frac{12L^3}{n^3\pi^3}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$F(x) = \frac{12L^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Το Θεώρημα 9.1.2 συνεπάγεται ότι $F(x) = x(x^2-L^2)$ για όλα τα x στο $[-L, L]$.

Παράδειγμα 9.1.7 (Φαινόμενο Gibbs) Η σειρά Fourier της

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < -\frac{1}{2}, \\ 1, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

στο $[-1, 1]$ είναι

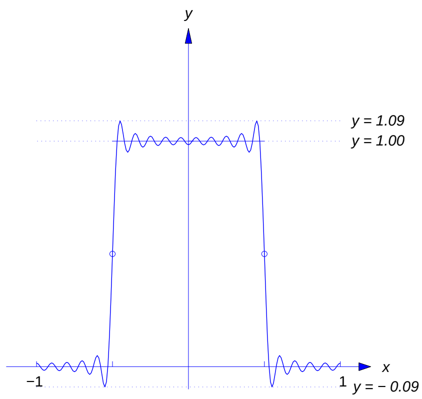
$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2n-1)\pi x.$$

(Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη!) Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.2,

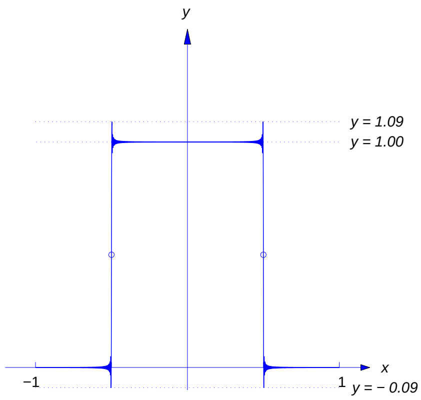
$$F(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < -\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}, & x = -\dfrac{1}{2}, \\ 1, & -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}, & x = \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \dfrac{1}{2} < x \le 1; \end{cases}$$

έτσι, F (καθώς και η f) έχει ασύνεχειες στο $x = \pm\frac{1}{2}$. Στο Σχήμα 9.1.1 και Σχήμα 9.7 φαίνονται τα γραφήματα της $y = f(x)$ και

$$y = F_{2N-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2n-1)\pi x$$



Σχήμα 9.5: Φαινόμενο Gibbs: Παράδειγμα 9.1.7, $N = 10$.

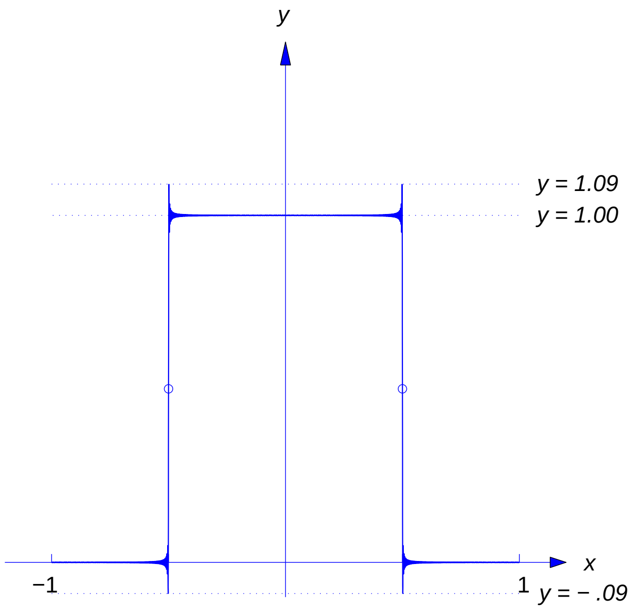


Σχήμα 9.6: Φαινόμενο Gibbs : Παράδειγμα 9.1.7, $N = 20$.

για $N = 10, 20,$ και 30. Μπορείτε να δείτε καθώς F_{2N-1} προσεγγίζει καλώς την F (και την f) στο μεγαλύτερο διάστημα καθώς N αυξάνεται, η μέγιστη απόλυτη τιμή για τη συνάρτηση σφάλματος παραμένει κατά προσέγγιση στο .09, αλλά εμφανίζεται κοντά στις ασυνέχειες $x = \pm\frac{1}{2}$, καθώς N αυξάνεται.

Πολλές φορές, κατά την επίλυση προβλημάτων ΔΕ (συνήθων ή μερικών) εμφανίζεται η ανάγκη, μια συνάρτηση $f(x)$ που είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα $[0, L]$, να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει πρώτα η συνάρτηση να *επεκταθεί* στο διάστημα $[-L, L]$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τα ακόλουθα.

Ορισμός 9.1.4
1. Η συνάρτηση $h(x)$ ονομάζεται *επέκταση* της $f(x)$, αν το πεδίο ορισμού της $h(x)$, περικλείει αυτό της $f(x)$ και ισχύει $h(x) = f(x)$, για κάθε x στο κοινό πεδίο ορισμού.
2. Έστω ότι, η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[0, L]$. Τότε ονομάζουμε *άρτια επέκταση* (βλ. Σχήμα 9.8) της $f(x)$ την



Σχήμα 9.7: Φαινόμενο Gibbs : Παράδειγμα 9.1.7, $N = 30$

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x), & \text{για} \quad 0 < x < L \\ f(0), & \text{για} \quad x = 0 \\ +f(-x), & \text{για} \quad -L < x < 0 \end{cases} \tag{9.20}$$

και *περιττή επέκταση* αυτής (βλ. Σχήμα 9.9), την

$$f_\pi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{για} \quad 0 < x < L \\ f(0), & \text{για} \quad x = 0 \\ -f(-x), & \text{για} \quad -L < x < 0 \end{cases} \tag{9.21}$$

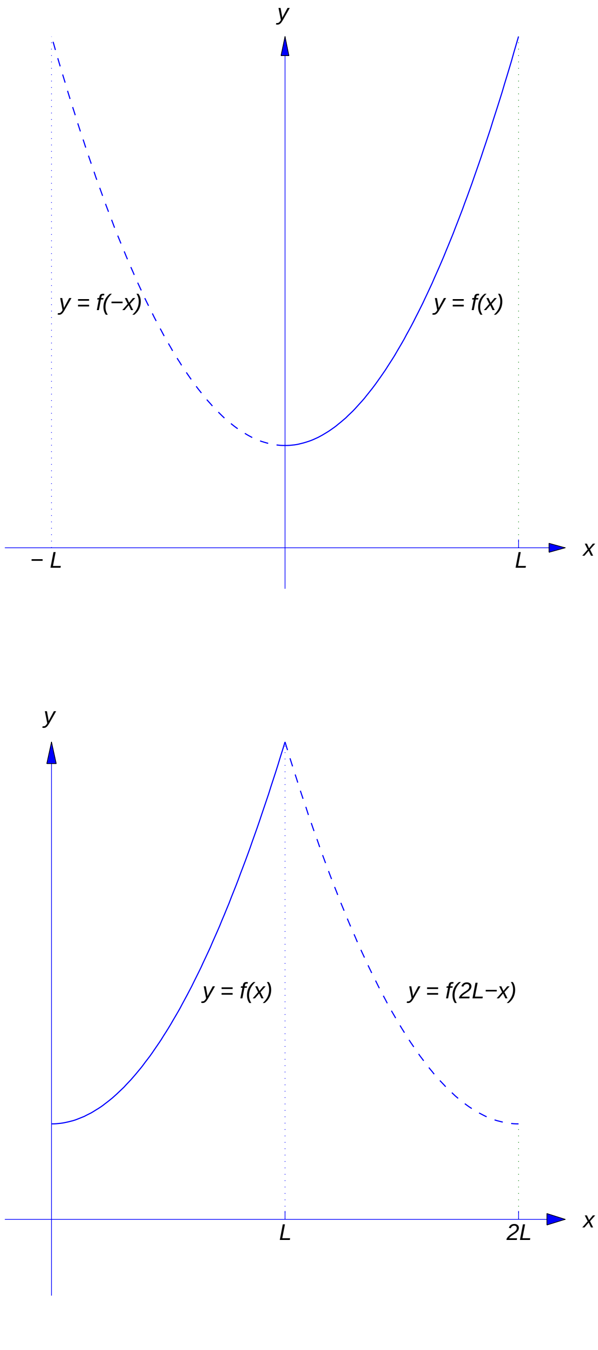
3. Ονομάζουμε *περιοδική επέκταση* μαις συνάρτησης $f(x)$ ορισμένης σ'ένα διάστημα $[-L, L]$, τη συνάρτηση $\hat{f}$, που ορίζεται από τη σχέση $\hat{f}(x + 2kL) = f(x)$, για κάθε $x \in [-L, L]$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. (Βλ. Σχήματα 9.10, 9.11) .

Θεώρημα 9.1.5 *Έστω ότι, η συνάρτηση $f(x)$ είναι τμηματικά συνεχής και $2L$-περιοδική. Τότε:*

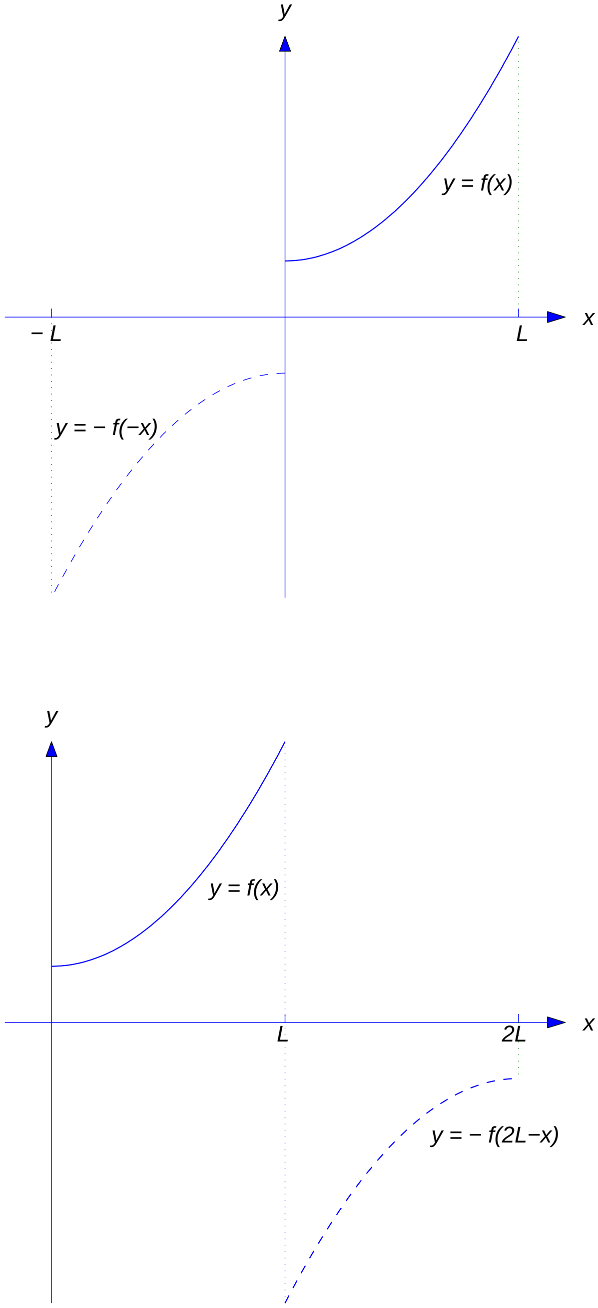
(a) Αν η $f(x)$ είναι άρτια, η σειρά Fourier αυτής περιέχει μόνο συνημιτονικούς όρους με συντελεστές

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_n = 0, n = 1, 2, \ldots$$

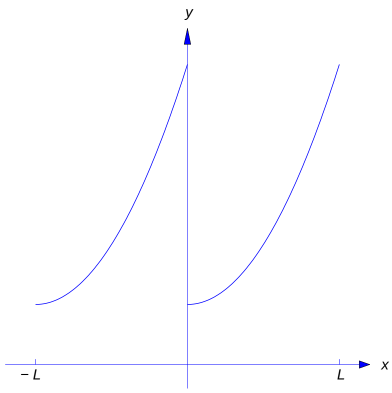
(b) Αν η $f(x)$ είναι περιττή, η σειρά Fourier αυτής περιέχει μόνο ημιτονικούς όρους με



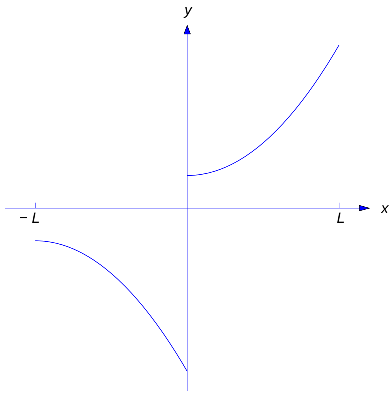
Σχήμα 9.8: Άρτια επέκταση της $f(x)$.



Σχήμα 9.9: Περιττή επέκταση της $f(x)$.



Σχήμα 9.10: $y = f(x)$, όπου $f(x+L) = f(x)$, $-L < x < 0$



Σχήμα 9.11: $y = f(x)$, όπου $f(x+L) = -f(x)$, $-L < x < 0$

συντελεστές

$$a_n = 0, n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\text{sin}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, n = 1, 2, \ldots, .$$

Παράδειγμα 9.1.8 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier ημιτόνων η $f(x) = x$ στο $[0, L]$.

Λύση Εύκολα μπορούμε να σχεδιάσουμε την περιττή περιοδική επέκταση της $f(x)$ στο $[-L, L]$. Οι συντελεστές θα δίνονται από

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L x\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = -\frac{2}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\right] \\ &= (-1)^{n+1}\frac{2L}{n\pi} + \frac{2L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L = (-1)^{n+1}\frac{2L}{n\pi}. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$f(x) = -\frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Στην επίλυση ΠΣΤ για ΔΕ (με συνήθεις ή μερικές παραγώγους) συχνά χρειάζεται να εφαρμόσουμε τροποποιημένες εκφράσεις για τις σειρές Fourier. Στο παρακάτω Θεώρημα δείνουμε μερικά χρήσιμα εργαλεία τα οποία θα συναντήσουμε στο επόμενο εδάφιο.

Θεώρημα 9.1.6

(a) *Αν $f'(0) = f'(L) = 0$, f'' είναι συνεχής , και f''' είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, L]$, τότε*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \le x \le L, \tag{9.22}$$

με

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx \quad \textit{και} \quad a_n = \frac{2L^2}{n^3\pi^3} \int_0^L f'''(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n \ge 1. \tag{9.23}$$

Τώρα υποθέτουμε ότι η f' είναι συνεχής και η f'' είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, L]$.
(b) *Αν $f(0) = f(L) = 0$, τότε*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \le x \le L,$$

με

$$b_n = -\frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^L f''(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{9.24}$$

(c) *Αν $f'(0) = f(L) = 0$, τότε*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad 0 \le x \le L,$$

με

$$c_n = -\frac{8L}{(2n-1)^2\pi^2} \int_0^L f''(x) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}\, dx. \tag{9.25}$$

(d) *Αν $f(0) = f'(L) = 0$, τότε*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad 0 \le x \le L,$$

με

$$d_n = -\frac{8L}{(2n-1)^2\pi^2} \int_0^L f''(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}\, dx. \tag{9.26}$$

Απόδειξη Θα αποδείξουμε το **(a)** και το υπόλοιπο θεώρημα το αφήνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη. Λόγω της συνέχεια της f στο $[0, L]$, το Θεώρημα 9.1.2 συνεπάγεται την (9.22) με a_0, a_1, a_2,... όπως ορίστηκαν στο Θεώρημα 9.1.2. Γνωρίζουμε τον συντελεστή a_0 από τη σχέση (9.23). Αν $n \geq 1$, με ολοκλήρωση κατά μέλη δύο φορές και με χρήση της υπόθεσης $f'(0) = f'(L) = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \int_0^L f'(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right] \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^L f'(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= \frac{2L}{n^2\pi^2}\left[f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \int_0^L f''(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right]dx \\
&= -\frac{2L}{n^2\pi^2}\int_0^L f''(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
&= -\frac{2L^2}{n^3\pi^3}\left[f''(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \int_0^L f'''(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right] \\
&= \frac{2L^2}{n^3\pi^3}\int_0^L f'''(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 9.1.9 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier συνημιτόνων η $f(x) = x^2(3L - 2x)$ στο $[0, L]$.

Λύση Έχουμε

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L (3Lx^2 - 2x^3)\,dx = \frac{1}{L}\left(Lx^3 - \frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^L = \frac{L^3}{2}$$

και

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L (3Lx^2 - 2x^3)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n \geq 1.$$

Επίσης $f'(x) = 6Lx - 6x^2$, έχουμε $f'(0) = f'(L) = 0$. Αφού $f'''(x) = -12$, από τη σχέση (9.23) αν $n \geq 1$ τότε

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{24L^2}{n^3\pi^3}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{24L^3}{n^4\pi^4}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L = \frac{24L^3}{n^4\pi^4}[(-1)^n - 1] \\
&= \begin{cases} -\dfrac{48L^3}{(2m-1)^4\pi^4} & \text{αν } n = 2m-1, \\ 0 & \text{αν } n = 2m. \end{cases}
\end{aligned}$$

Συνεπώς
$$F(x) = \frac{L^3}{2} - \frac{48L^3}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{L}.$$

Παράδειγμα 9.1.10 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier ημιτόνων η $f(x) = x(x^2 - 3Lx + 2L^2)$ στο $[0, L]$.

Λύση Από $f(0) = f(L) = 0$ και $f''(x) = 6(x - L)$, η σχέση (9.24) δίνει
$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{12L}{n^2\pi^2}\int_0^L (x-L)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ &= \frac{12L^2}{n^3\pi^3}\left[(x-L)\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\right] \\ &= \frac{12L^2}{n^3\pi^3}\left[L - \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L\right] = \frac{12L^3}{n^3\pi^3}. \end{aligned}$$

Συνεπώς
$$F(x) = \frac{12L^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Παράδειγμα 9.1.11 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η $f(x) = 3x^3 - 4Lx^2 + L^3$ στο $[0, L]$.

Λύση Λόγω $f'(0) = f(L) = 0$ και $f''(x) = 2(9x - 4L)$, από τη σχέση (9.25) έχουμε
$$\begin{aligned} c_n &= -\frac{16L}{(2n-1)^2\pi^2}\int_0^L (9x-4L)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\,dx \\ &= -\frac{32L^2}{(2n-1)^3\pi^3}\left[(9x-4L)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\Big|_0^L - 9\int_0^L \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right]dx \\ &= -\frac{32L^2}{(2n-1)^3\pi^3}\left[(-1)^{n+1}5L + \frac{18L}{(2n-1)\pi}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\Big|_0^L\right] \\ &= \frac{32L^3}{(2n-1)^3\pi^3}\left[(-1)^n 5 + \frac{18}{(2n-1)\pi}\right]. \end{aligned}$$

Συνεπώς,
$$F(x) = \frac{32L^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\left[(-1)^n 5 + \frac{18}{(2n-1)\pi}\right]\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}.$$

Παράδειγμα 9.1.12 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier ημιτόνων η
$$f(x) = x(2x^2 - 9Lx + 12L^2)$$

στο $[0, L]$.

Λύση Λόγω $f(0) = f'(L) = 0$, και $f''(x) = 6(2x - 3L)$, η σχέση (9.26) δίνει

$$\begin{aligned}
d_n &= -\frac{48L}{(2n-1)^2\pi^2} \int_0^L (2x - 3L) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}\, dx \\
&= \frac{96L^2}{(2n-1)^3\pi^3} \left[(2x - 3L) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \Big|_0^L - 2 \int_0^L \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}\, dx \right] \\
&= \frac{96L^2}{(2n-1)^3\pi^3} \left[3L - \frac{4L}{(2n-1)\pi} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \Big|_0^L \right] \\
&= \frac{96L^3}{(2n-1)^3\pi^3} \left[3 + (-1)^n \frac{4}{(2n-1)\pi} \right].
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$F(x) = \frac{96L^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \left[3 + (-1)^n \frac{4}{(2n-1)\pi} \right] \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}.$$

9.1.2 Ανισότητα Bessel και η ταυτότητα Parseval

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g ορισμένες στο διάστημα $[a, b]$. Η ποσότητα

$$p^2(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2\, dx$$

ονομάζεται *μέση τετραγωνική απόκλιση* των f, g. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

συγκλίνει κατά τον μέσο (ή μέσο τετραγωνικό) στη συνάρτηση $S(x)$ στο διάστημα $[a, b]$, αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} a_k(x), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

έχει μηδενική τετραγωνική απόκλιση από την $S(x)$ στο διάστημα $[a, b]$, δηλαδή

$$\lim_{k\to\infty} p^2(S, S_k) = \lim_{k\to\infty} \int_a^b |S(x) - S_k(x)|^2\, dx = 0.$$

Θα προσδιορίσουμε την οικογένεια των συναρτήσεων $f(x)$, των οποίων τα αναπτύγματα Fourier συγκλίνουν κατά τον μέσο όρο σ'αυτές (βλ. W.E Boyce, R.C. DiPrima, 2001 και

Ν. Σταυρακάκης, 2011)

Θεώρημα 9.1.7 *[Ανισότητα Bessel] Έστω μια $2L$-περιοδική συνάρτηση $f(x)$ με την $f^2(x)$ ολοκληρώσιμη. Αν a_n, b_n είναι οι συντελεστές Fourier της $f(x)$, τότε ισχύει η ανισότητα Bessel:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx < +\infty \tag{9.27}$$

Απόδειξη

Έστω $S_k(x)$ τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της $f(x)$, δηλαδή

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\left\{a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}$$

Θεωρούμε το μη αρνητικό τετραγωνικό ολοκλήρωμα

$$0 \leq \int_{-L}^{L}\left(f(x) - S_k(x)\right)^2 dx = \int_{-L}^{L} f^2(x)dx - 2\int_{-L}^{L} f(x)S_k(x)dx + \int_{-L}^{L}\left(S_k(x)\right)^2 dx. \tag{9.28}$$

Χρησιμοποίωντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας που παρουσιάσαμε στο εδάφιο 9.1.1, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L}\left(S_k(x)\right)^2 dx &= \int_{-L}^{L}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\left\{a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}\right)^2 dx \\ &= 2\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\end{aligned}$$

Επιπλέον ισχύει

$$\int_{-L}^{L} f(x)S_k(x)dx = \int_{-L}^{L} f(x)\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\left\{a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right\} + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}\right)dx =$$

$$\begin{aligned}&= \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} f(x)dx + \sum_{n=1}^{k}\left\{a_n \int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + b_n \int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right\} \\ &= L\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right)\end{aligned}$$

’Ετσι η (9.28) γίνεται:

$$0 \le \int_{-L}^{L} (f(x) - S_k(x))^2 \, dx = \int_{-L}^{L} f^2(x)dx - L\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_n^2 + b_n^2)\right) \tag{9.29}$$

Επειδή η (9.29) ισχύει για κάθε k, θα ισχύει προφανώς η ανισότητα Bessel. □

Αν η $f(x)$ πληρεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 9.1.7, τότε ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \tag{9.30}$$

Πράγματι από την ανισότητα Bessel προκύπτει ότι, $a_n^2 + b_n^2 \to 0$, καθώς το $n \to \infty$. Επομένως θα ισχύει $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, δηλαδή η (9.30).

Από την (9.29) συνεπάγεται ότι, η σειρά Fourier της $f(x)$ συγκλίνει κατά μέσο όρο στην $f(x)$, αν και μόνο αν ισχύει η ακόλουθη *ταυτότητα Parseval.*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f^2(x)dx. \tag{9.31}$$

9.1.3 Παραγώγιση και Ολοκλήρωση σειρών Fourier

Έστω $f(x)$ μια τμηματικά συνεχής, $2L$-περιοδική συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{-L}^{x} f(t)dt, \tag{9.32}$$

είναι συνεχής προς x. Η $F(x)$ θα είναι $2L$-περιοδική, αν ικανοποιεί τη συνθήκη $F(-L) = F(L)$. Επειδή $F(-L) = 0$, θα πρέπει να ισχύει

$$F(L) = \int_{-L}^{L} f(t)dt = La_0 = 0 \tag{9.33}$$

δηλαδή θα πρέπει να είναι $a_0 = 0$. Έχουμε αποδείξει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 9.1.8 *[Ολοκλήρωση] Έστω $f(t)$ μια $2L$-περιοδική, τμηματικά συνεχής συνάρτηση. Τότε, το ολοκλήρωμα (9.32) ορίζει μια $2L$-περιοδική συνάρτηση, αν και μόνο αν $a_0 = 0$. Επιπλέον, σ’αυτή την περίπτωση η $F(x)$ είναι τμηματικά λεία.*

Θεώρημα 9.1.9 *[Αόριστο ολοκλήρωμα: $a_0 = 0$] Αν $f(x)$ είναι μια $2L$-περιοδική τμηματικά συνεχής συνάρτηση με ανάπτυγμα Fourier*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} \tag{9.34}$$

τότε κάθε μέρος της (9.34), μπορεί να ολοκληρωθεί, οπότε προκύπτει

$$\int_{-L}^{x} f(t)dt \sim -\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} xf(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{L}{n\pi}\right)\left\{a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}. \tag{9.35}$$

Τέλος, η σειρά (9.34), συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Αν η $F(x)$ είναι περιοδική, τότε έχει ένα συγκλίνον ανάπτυγμα Fourier

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\} dx.$$

Για $n \geq 1$, η ολοκλήρωση κατά παράγοντες δίνει

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L}\left[\frac{L}{n\pi}F(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{-L}^{L} \\ &= -\frac{L}{n\pi}\int_{-L}^{L} F'(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \frac{L}{n\pi}\left\{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\right\} \end{aligned}$$

Επομένως, ισχύει $A_n = -(L/n\pi)\, b_n$, όπου b_n οι ημιτονικοί συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f(x)$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $B_n = (L/n\pi)\, a_n$, όπου a_n οι συνημιτονικοί συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f(x)$. Επίσης, ισχύει:

$$A_0 = -\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} xf(x)dx \tag{9.36}$$

Παράδειγμα 9.1.13 Με τη χρήση του αναπτύγματος σε σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{για } -1 < x < 0. \end{cases} \tag{9.37}$$

Να δειχθεί ότι συνάρτηση $f(x) = |x|$, ορισμένη στο διάστημα $(-1, 1)$ και 2-περιοδική, έχει το ακόλουθο ανάπτυγμα στο $\mathbb{R}$

$$|x| \sim \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{\pi^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x\right\}. \tag{9.38}$$

Λύση Εύκολα αποδεικνύεται ότι το ανάπτυγμα Fourier της (9.37) είναι

$$f(x) \sim \left(\frac{4}{\pi}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\pi x\right\}.$$

Για $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt = |x| - 1, \quad \text{αφούι} \quad F(1) = 0$$

Επομένως, στο διάστημα $(-1, 1)$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} |x| - 1 \quad &\sim \quad \frac{A_0}{2} - \left(\frac{4}{\pi^2}\right)\left\{\cos(\pi x) + \left(\frac{1}{9}\right)\cos(3\pi x) + \left(\frac{1}{25}\right)\cos(5\pi x) + \dots\right\} \\ &= \quad \frac{A_0}{2} - \left(\frac{4}{\pi^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(2n-1\right)\pi x\right\}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$|x| \sim \left(\frac{A_0}{2} + 1\right) - \left(\frac{4}{\pi^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(2n-1\right)\pi x\right\}. \tag{9.39}$$

Ο όρος $\left(\dfrac{A_0}{2} + 1\right)$ μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους:

(i) Με χρήση της (9.36)

$$\frac{A_0}{2} + 1 = 1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} |x|dx = \frac{1}{2}.$$

(ii) Μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί το ήμισυ του μηδενικού συντελεστή Fourier της συνάρτησης $|x|$, ορισμένης στο διάστημα $(-1, 1)$. Δηλαδή ισχύει,

$$\frac{A_0}{2} + 1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} |x|dx = \frac{1}{2}.$$

Επομένως η συνάρτηση $f(x) = |x|$, ορισμένη στο διάστημα $(-1, 1)$ και 2-περιοδική, έχει το ακόλουθο ανάπτυγμα στο $\mathbb{R}$ (9.38).

Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύεται στην περίπτωση, που η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x)$ είναι μη μηδενική.

Θεώρημα 9.1.10 *[Ορισμένο ολοκλήρωμα: $a_0 \neq 0$]*

'Εστω ότι $f(x)$ είναι μια $2L$-περιοδική, τμηματικά συνεχής συνάρτηση. Τότε, για κάθε $c, d \in \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα

$$\int_{c}^{d} f(x)dx,$$

μπορεί να υπολογισθεί ολοκληρώνοντας τη σειρά Fourier της $f(x)$ όρο προς όρο.

Απόδειξη Αν η $f(x)$ έχει μη μηδενική μέση τιμή, δηλαδή $a_0 \neq 0$, τότε η συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$$

πληρεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 9.1.9. Για κάθε $c, d \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\int_c^d f(x)dx = \int_{-L}^d f(x)dx - \int_{-L}^c f(x)dx = \int_{-L}^d h(x)dx - \int_{-L}^c h(x)dx - \int_c^d \frac{a_0}{2}dx$$

Άρα, έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^d \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}.$$

■

Παράδειγμα 9.1.14 *Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x, -\pi < x < \pi$ Με τη χρήση του αναπτύγματος σε σειρα Fourier της f να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση x^2.*

Λύση Πράγματι, το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της f είναι

$$f(x) \equiv x = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right].$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ολοκληρώνοντας όρο προς όρο την τελευταία σειρά από c εως το x, προκύπτει

$$\frac{x^2 - c^2}{4} = -\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right) + \left(\cos c - \frac{\cos 2c}{2^2} + \frac{\cos 3c}{3^2} - \dots\right).$$

Για να προσδιορίσουμε το άθροισμα των σταθερών γράφουμε το παραπάνω ανάπτυγμα στη μορφή

$$\frac{x^2}{4} = C - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2}$$

όπου C προσδιοριστέα σταθερά. Επειδή η σειρά στα δεξιά είναι μια ομοιόμορφα συγκλίνουσα σειρά Fourier, μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο από $-\pi$ εως π, οπότε προκύπτει

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2}dx = 2\left[\int_{\pi}^{\pi} C dx - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}dx\right],$$

ή

$$\frac{\pi^3}{3} = 4\pi C, \quad \text{δηλαδή} \quad C = \frac{\pi^2}{12}$$

Επομένως η ολοκλήρωση της σειράς Fourier της $f(x)$, δίνει το ανάπτυγμα Fourier της x^2 το οποίο είναι

$$x^2 = 4\left[\frac{\pi^2}{12} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2}\right].$$

Παράδειγμα 9.1.15 *Από τα προηγούμενα είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ ορισμένη στο διάστημα $[0, L]$, δέχεται το ακόλουθο ημιτονικό ανάπτυγμα Fourier*

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi}(-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{για} \quad 0 \leq x \leq L.$$

Αν παραγωγίσουμε όρο προς όρο τη σειρά προκύπτει

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

η οποία είναι μεν συνημιτονική σειρά, όχι όμως αυτή που αποτελεί το συνημιτονικό ανάπτυγμα της $f(x) = 1$ (αφού το συνημιτονικό ανάπτυγμα της 1 είναι η 1).

Θεώρημα 9.1.11 *[Παραγώγιση] Έστω $f(x)$ μια $2L$-περιοδική συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι, υπάρχει $f'(x)$ σχεδόν παντού στο $[-L, L]$ και ότι, η $f'(x)$ είναι τμηματικά λεία. Τότε, η σειρά Fourier της $f'(x)$ προκύπτει από την σειρά Fourier της $f(x)$, με όρο προς όρο παραγώγιση.*

Απόδειξη

Επειδή η $f(x)$ είναι τμηματικά λεία, θα δέχεται ανάπτυγμα Fourier της μορφής

$$f'(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}.$$

Επίσης, η $f(x)$ είναι $2L$-περιοδική

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(x)dx = \frac{1}{L}[f(L) - f(-L)] = 0$$

Επομένως

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}. \tag{9.40}$$

Επειδή δε

$$\int_{-L}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(-L)$$

η προηγούμενη σχέση και το Θεώρημα 9.1.9 δίνουν ότι

$$f'(x) \sim [f(-L) + C] + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{L}{n\pi} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \frac{L}{n\pi} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}.$$

Είναι φανρό, ότι η παραγώγιση όρο προς όρο της τελευταίας σειράς δίνει την (9.40). □

Παράδειγμα 9.1.16 *Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - \pi^2)^2 = (x - \pi)^2(x + \pi)^2$ ορισμένη* *στο* $[-\pi,\pi]$ *με* $f(x+2\pi)=f(x)$. *Αποδεικνύεται ότι*

$$f'(x) \sim \frac{48\pi^4}{90} + 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}\text{cos}nx, \quad x\in[-\pi,\pi]$$

Επίσης ισχύει $f'(x) = 4x(x^2-\pi^2)$ *για* $x \in [-\pi,\pi]$ *και η* $f'(x)$ *είναι τμηματικά λεία. Επομένως θα ισχύει*

$$f'(x) = 4x(x^2-\pi^2) \sim 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\text{sin}nx, x\in[-\pi,\pi]$$

Ακόμα ισχύει $f''(x) = 12x^2 - 4\pi^2$ *για* $x\in[-\pi,\pi]$*και η* $f''(x)$ *είναι τμηματικά λεία. Επομένως, έχουμε*

$$f''(x) = 12x^2 - 4\pi^2 \sim 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\text{cos}nx, \quad x\in[-\pi,\pi]$$

Τέλος $f'''(x) = 24x$ *για* $x\in[-\pi,\pi]$ *ενώ δεν ορίζεται η* $f'''(x)$ *για* $x=\pm\pi$. *Εντούτοις, η* f''' *είναι τμηματικά λεία και ισχύει*

$$f'''(x) = 24x \sim 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\text{sin}nx, \quad x\in[-\pi,\pi]$$

9.1 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-15 να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση f *στο* $[-L,L]$ *και να προσδιορίστε το αντίστοιχο άθροισμα για* $-L\le x\le L$. *Σχεδιάστε στους ίδιους άξονες την* f *και*

$$F_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

για διάφορες τιμές του m.

1. $L=1; \quad f(x)=2-x$

2. $L=\pi; \quad f(x)=2x-3x^2$

3. $L=1; \quad f(x)=1-3x^2$

4. $L=\pi; \quad f(x)=|\sin x|$

5. $L=\pi; \quad f(x)=x\cos x$

6. $L=\pi; \quad f(x)=|x|\cos x$

7. $L=\pi; \quad f(x)=x\sin x$

8. $L=\pi; \quad f(x)=|x|\sin x$

9. $L = 1; \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < \frac{1}{2}, \\ \cos \pi x, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

10. $L = 1; \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < \frac{1}{2}, \\ x\cos \pi x, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

11. $L = 1; \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < \frac{1}{2}, \\ \sin \pi x, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

12. $L = 1; \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < \frac{1}{2}, \\ |\sin \pi x|, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

13. $L = 1; \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < \frac{1}{2}, \\ x\sin \pi x, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

14. $L = 4; \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -4 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 4 \end{cases}$

15. $L = 1; \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0, \\ 1 - x^2, & 0 < x < 1 \end{cases}$

16. Από το Παράδειγμα 9.1.5 να αποδείξετε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

17. **(α΄)** Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η $f(x) = e^x$ στο $[-\pi, \pi]$.

(β΄) Από το **(a)** δείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi \coth \pi - 1}{2}.$$

18. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η $f(x) = (x - \pi)\cos x$ στο $[-\pi, \pi]$.

19. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η $f(x) = (x - \pi)\sin x$ στο $[-\pi, \pi]$.

20. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η $f(x) = \sin kx$ ($k \neq$ ακέραιος) στο $[-\pi, \pi]$.

21. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η $f(x) = \cos kx$ ($k \neq$ ακέραιος) στο $[-\pi, \pi]$.

22. **(α΄)** Υποθέτουμε ότι $f(-L) = f(L)$, $f'(-L) = f'(L)$, f' είναι συνεχής και και f'' τμηματικά συνεχής στο $[-L, L]$. Με χρήση του Θεωρήματος 9.1.2 και με παραγοντική ολοκλήρωση δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad -L \leq x \leq L,$$

με

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx,$$

$$a_n = -\frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^{L} f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \text{ και } b_n = -\frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^{L} f''(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx\, n \geq 1.$$

(β΄) Δείξτε ότι αν, επιπροσθέτως στο **(a)**, η f'' είναι συνεχής και η f''' τμηματικά συνεχής στο $[-L, L]$, τότε

$$a_n = \frac{L^2}{n^3\pi^3} \int_{-L}^{L} f'''(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

23. Δείξτε ότι αν f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-L, L]$ και

$$f(x + L) = f(x), \quad -L < x < 0$$

(Σχήμα 9.10), τότε η σειρά Fourier της f στο $[-L, L]$ έχει τη μορφή

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right)$$

όπου

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} f(x)\, dx,$$

και

$$A_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{L}\, dx,$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{L}\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

24. Δείξτε ότι αν f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-L, L]$ και

$$f(x + L) = -f(x), \quad -L < x < 0$$

(Σχήμα 9.11), τότε η σειρά Fourier της f στο $[-L, L]$ έχει τη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{(2n-1)\pi x}{L} + B_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right),$$

όπου

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{L}\,dx$$

και

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Στις Ασκήσεις 25-29 να βρείτε το ανάπτυγμα σε συνημιτονική σειρά Fourier για τη συνάρτηση f.

25. $f(x) = x^2; \quad [0, L]$

26. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ 0, & \frac{L}{2} < x < L; \end{cases} \qquad [0, L]$

27. $f(x) = e^x; \quad [0, \pi]$

28. $f(x) = x(L-x); \quad [0, L]$

29. $f(x) = x(x-2L); \quad [0, L]$

Στις Ασκήσεις 30-34 να βρείτε το ανάπτυγμα σε ημιτονική σειρά Fourier για τη συνάρτηση f.

30. $f(x) = 1; \quad [0, L]$

31. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ 0, & \frac{L}{2} < x < L; \end{cases} \qquad [0, L]$

32. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{L}{2}, \\ L-x, & \frac{L}{2} \le x \le L; \end{cases} \qquad [0, L].$

33. $f(x) = x\sin x; \quad [0, \pi]$

34. $f(x) = e^x; \quad [0, \pi]$

Στις Ασκήσεις 35-39 να βρείτε το ανάπτυγμα σε συνημιτονική σειρά Fourier για τη συνάρτηση f.

35. $f(x) = 1; \quad [0, L]$

36. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ 0, & \frac{L}{2} < x < L; \end{cases} \qquad [0, L]$

37. $f(x) = \cos x; \quad [0, \pi]$

38. $f(x) = \sin x; \quad [0, \pi]$

39. $f(x) = x(L-x); \quad [0, L]$

Στις Ασκήσεις 40-44 να βρείτε το ανάπτυγμα σε ημιτονική σειρά Fourier για τη συνάρτηση f

40. $f(x) = 1; \quad [0, L]$

41. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ 0, & \frac{L}{2} < x < L; \end{cases} \qquad [0, L]$

42. $f(x) = \cos x; \quad [0, \pi]$

43. $f(x) = \sin x; \quad [0, \pi]$

44. $f(x) = x(L - x); \quad [0, L].$

*Στις Ασκήσεις 45-48 με χρήση του Θεωρήματος 9.1.6***(a)** *να βρείτε το ανάπτυγμα σε συνημιτονική σειρά Fourier για τη συνάρτηση f στο* $[0, L]$.

45. $f(x) = 3x^2(x^2 - 2L^2)$

46. $f(x) = x^3(3x - 4L)$

47. $f(x) = x^2(3x^2 - 8Lx + 6L^2)$

48. $f(x) = x^2(x - L)^2$

49. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0 \\ 2, & 0 \le x \le 1; \end{cases}$$

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$$g : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x y f(y) \mathrm{d}y.$$

Να δείξετε ότι

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots.$$

50. Με τη χρήση της ταυτότητας Parseval και του αναπτύγματος

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \quad -\pi < x < \pi$$

να υπολογισθεί η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

51. Με τη χρήση της ταυτότητας Parseval και του αναπτύγματος

$$x^2 \sim -\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \quad -\pi < x < \pi$$

να υπολογισθεί η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

52. 'Εστω $f(x) = \cos ax$, $-\pi < x < \pi$, όπου $a > 0$ σταθερά. Να αποδειχθεί ότι

$$\cos(ax) \sim \frac{a\sin(\pi a)}{\pi}\left(\frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{a^2 - n^2}\cos(nx)\right).$$

Να υπολογισθεί η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a^2 - n^2}\right|.$$

Με τη χρήση της ταυτότητας Parseval να υπολογισθεί η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a^2 - n^2)^{-2}$.

53. 'Εστω ότι η $f(x) = x$, για $-\pi < x < \pi$ και $f_1(x+2\pi) = f_1(x)$, έτσι ώστε να έχουμε το ανάπτυγμα

$$f_1(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

Να υπολογισθεί με χρήση του παραπάνω στοιχείου η σειρά Fourier των συναρτήσεων $f_2(x) = x^2$, και $f_3(x) = x^4$ για $-\pi < x < \pi$.

54. Έστω $f(x)$ μια 4-περιοδική συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2}, & -2 < x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2}, & 0 \le x < 2 \end{cases}$$

Έτσι ώστε να ισχύει το ανάπτυγμα

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^3}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}.$$

Επιβεβαιώστε ότι, ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 9.1.11 για την $f(x)$. Να υπολογισθεί η σειρά Fourier της $f'(x)$. Επιβεβαιώστε ότι, δεν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 9.1.11 για τη συνάρτηση $f'(x)$.

9.2 Προβλήματα Συνοριακών Τιμών για ΔΕ 2ης τάξης

9.2.1 Προβλήματα Συνοριακών Τιμών δύο σημείων

Θεωρούμε την ΔΕ 2ης τάξης

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F(x). \tag{9.41}$$

Υποθέτουμε ότι P_0, P_1, P_2, και F είναι συνεχείς συναρτήσεις και P_0 δεν μηδενίζεται στο (a, b). Απο το Θεώρημα 5.3.1, έχουμε ότι αν $x_0 \in (a, b)$ και k_1 και k_2 είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί, τότε η ΔΕ (9.41) έχει μοναδική λύση στο (a, b), τέτοια ώστε $y(x_0) = k_1$ και $y'(x_0) = k_2$. Θεωρούμε τώρα ένα διαφορετικό πρόβλημα συνδεδεμένο με τη ΔΕ (9.41).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Υποθέτουμε ότι P_0, P_1, P_2, και F είναι συνεχείς και P_0 δεν μηδενίζεται στο κλειστό διάστημα $[a, b]$. Έστω α, β, ρ, και δ είναι πραγματικοί αριθμοί:

$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \text{ και } \quad \rho^2 + \delta^2 \neq 0, \tag{9.42}$$

και έστω k_1 και k_2 αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί. Το ερώτημα που τίθεται είναι η εύρεση λύσης της ΔΕ

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F(x) \tag{9.43}$$

στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, έτσι ώστε

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = k_1 \tag{9.44}$$

και

$$\rho y(b) + \delta y'(b) = k_2. \tag{9.45}$$

Τα σημεία a και b καλούνται *συνοριακά σημεία.* Οι συνθήκες (9.47) και (9.45) είναι *συνοριακές συνθήκες*, και το πρόβλημα καλείται *δύο σημείων ΠΣΤ* ή πιο απλά *ΠΣΤ*. Η ΔΕ (9.41) μπορεί να γραφεί εν συντομία ως $Ly = F$, όπου

$$Ly = P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y,$$

και οι συνθήκες ορίζονται

$$B_1(y) = \alpha y(a) + \beta y'(a) \text{ και } \quad B_2(y) = \rho y(b) + \delta y'(b).$$

Συνδυάζοντας τις (9.43), (9.47) και (9.45) ως

$$Ly = F, \qquad B_1(y) = k_1, \qquad B_2(y) = k_2. \tag{9.46}$$

Το ΠΣΤ είναι *ομογενές* αν $F = 0$ και $k_1 = k_2 = 0$ διαφορετικά καλείται *μη ομογενές*. Επίσης, σε μερικές εφαρμογές χρησιμοποιούμε *μεικτές* συνοριακές συνθήκες, της μορφής

$$\begin{aligned} \alpha y(a) + \beta y'(a) + Py(b) + \Delta y'(b) &= k_1 \\ \rho y(b) + \delta y'(b) + Ay(a) + By'(a) &= k_2. \end{aligned} \tag{9.47}$$

Στη συνέχεια δίνουμε χωρίς απόδειξη, ένα θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για ΠΣΤ στην γενική περίπτωση που η ΔΕ (9.41) είναι μη γραμμική. Για την απόδειξη,βλ. J.W. Brawn & d R. Churchill 1993

Θεώρημα 9.2.1 *Θεωρούμε το ομογενές μη γραμμικό ΠΣΤ*

$$y'' + f(x,y) = 0, \quad (x,y) \in (a,b) \times \mathbb{R}, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \tag{9.48}$$

Υποθέτουμε ότι η $f(x,y)$ είναι συνεχής στο $[a,b] \times \mathbb{R}$ και Lipschitz ως προς y σταθεράς k, δηλαδή υπάρχει σταθερά $k \in \mathbb{R}^+$, τέτοια ώστε, για κάθε ζεύγος σημείων $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ από το $[a,b] \times \mathbb{R}$, να ικανοποιείται η σχέση

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k\,|y_1 - y_2|\,.$$

Αν το $b-a$ είναι αρκετά μιρκό, ώστε να ισχύει $k-(b-a)^2 < 4$, τότε το ΠΣΤ (9.48) *έχει μοναδική λύση.*

Παράδειγμα 9.2.1 Θεωρούμε το ΠΣΤ

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0.$$

Η γενική λύση της ΔΕ $y'' + y = 1$ είναι

$$y = 1 + c_1 \sin x + c_2 \cos x,$$

για $y(0) = 0$, αν και μόνο αν $c_2 = -1$ και $y(\pi/2) = 0$, αν και μόνο αν $c_1 = -1$. Οπότε η

$$y = 1 - \sin x - \cos x$$

είναι μοναδική λύση του ΠΣΤ.

Παράδειγμα 9.2.2 Θεωρούμε το ΠΣΤ

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Η γενική λύση της ΔΕ $y'' + y = 1$ είναι

$$y = 1 + c_1 \sin x + c_2 \cos x,$$

για $y(0) = 0$, αν και μόνο αν $c_2 = -1$, αλλά $y(\pi) = 0$, αν και μόνο αν $c_2 = 1$. Συνεπώς, το ΠΣΤ δεν έχει λύση.

Παράδειγμα 9.2.3 Θεωρούμε το ΠΣΤ

$$y'' + y = \sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Η γενική λύση της ΔΕ (υπολογίζεται με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών) $y'' + y = \sin 2x$ είναι

$$y = -\frac{\sin 2x}{3} + c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Οι συνοριακές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y(\pi) = 0$ μας δίνουν $c_2 = 0$, χωρίς περιορισμό για το c_1. Συνεπώς, το ΠΣΤ έχει άπειρες λύσεις

$$y = -\frac{\sin 2x}{3} + c_1 \sin x,$$

όπου c_1 αυθαίρετη σταθερά.

Θεώρημα 9.2.2 *Αν z_1 και z_2 είνα λύσεις της $Ly = 0$, έτσι ώστε $B_1(z_1) = B_1(z_2) = 0$ ή $B_2(z_1) = B_2(z_2) = 0$, τότε $\{z_1, z_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο λύσεων. Ισοδύναμα , αν $\{z_1, z_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο λύσεων, τότε*

$$B_1^2(z_1) + B_1^2(z_2) \neq 0 \;\; \textit{και} \quad B_2^2(z_1) + B_2^2(z_2) \neq 0.$$

Απόδειξη Υπενθυμίζουμε $B_1(z) = \alpha z(a) + \beta z'(a)$ και $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Αν $B_1(z_1) = B_1(z_2) = 0$, τότε (α, β) είναι μια μη τετριμμένη λύση του

$$\begin{aligned} \alpha z_1(a) + \beta z_1'(a) &= 0 \\ \alpha z_2(a) + \beta z'(a) &= 0. \end{aligned}$$

Το οποίο συνεπάγεται ότι

$$z_1(a) z_2'(a) - z_1'(a) z_2(a) = 0,$$

οπότε $\{z_1, z_2\}$ είναι γραμμικό ανεξάρτητο σύνολο λύσεων από το Θεώρημα 5.1.6. Αφήνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη την απόδειξη του αν $\{z_1, z_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο λύσεων, τότε $B_2(z_1) = B_2(z_2) = 0$. □

Θεώρημα 9.2.3 *(P. Waltman, 1986) Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(α΄) *Υπάρχει ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων $\{z_1, z_2\}$ της ΔΕ $Ly = 0$, τέτοιο ώστε*

$$B_1(z_1) B_2(z_2) - B_1(z_2) B_2(z_1) \neq 0. \tag{9.49}$$

(β΄) *Αν $\{y_1, y_2\}$ είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων της $Ly = 0$, τότε*

$$B_1(y_1) B_2(y_2) - B_1(y_2) B_2(y_1) \neq 0. \tag{9.50}$$

(γ΄) *Για κάθε συνεχή συνάρτηση F και ζεύγος σταθερών (k_1, k_2), το ΠΣΤ*

$$Ly = F, \quad B_1(y) = k_1, \quad B_2(y) = k_2$$

έχει μοναδική λύση .

(δ΄) *Το ομογενές ΠΣΤ*

$$Ly = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0 \tag{9.51}$$

έχει τετριμμένη λύση την $y = 0$.

(ε΄) *Η ομογενής Δ Ε $Ly = 0$ έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις z_1 και z_2, έτσι ώστε $B_1(z_1) = 0$ και $B_2(z_2) = 0$.*

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να έχουμε στη διάθεση μας έναν τύπο για την λύση ενός ΠΣΤ. Οπως φαίνεται στο επόμενο θεώρημα αυτό είναι εφικτό.

Θεώρημα 9.2.4 *Θεωρούμε το ομογενές ΠΣΤ*

$$Ly = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0 \tag{9.52}$$

ότι έχει μοναδική λύση. Έστω y_1 και y_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ΔΕ $Ly = 0$ τέτοιες ώστε $B_1(y_1) = 0$ και $B_2(y_2) = 0$ και $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$. Τότε η μοναδική λύση του ΠΣΤ

$$Ly = F, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0 \tag{9.53}$$

είναι

$$y(x) = y_1(x) \int_x^b \frac{F(t) y_2(t)}{P_0(t) W(t)} \, dt + y_2(x) \int_a^x \frac{F(t) y_1(t)}{P_0(t) W(t)} \, dt. \tag{9.54}$$

Απόδειξη Στο εδάφιο 5.1 είδαμε ότι αν

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 \tag{9.55}$$

όπου

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= F, \end{aligned}$$

τότε $Ly = F$. Επιλύοντας ως προς u_1' και u_2', έχουμε

$$u_1' = -\frac{F y_2}{P_0 W} \quad \text{και} \quad u_2' = \frac{F y_1}{P_0 W},$$

που ισχύει αν

$$u_1(x) = \int_x^b \frac{F(t) y_2(t)}{P_0(t) W(t)} \, dt \quad \text{και} \quad u_2(x) = \int_a^x \frac{F(t) y_1(t)}{P_0(t) W(t)} \, dt.$$

Η προηγούμενη σχέση και η (9.55) δείχνουν ότι (9.54) είναι λύση της $Ly = F$. Παραγωγίζοντας την (9.54), έχουμε

$$y'(x) = y_1'(x) \int_x^b \frac{F(t) y_2(t)}{P_0(t) W(t)} \, dt + y_2'(x) \int_a^x \frac{F(t) y_1(t)}{P_0(t) W(t)} \, dt. \tag{9.56}$$

Από τις σχέσεις (9.54) και (9.56),

$$B_1(y) = B_1(y_1) \int_a^b \frac{F(t) y_2(t)}{P_0(t) W(t)} \, dt = 0$$

διότι $B_1(y_1) = 0$, και

$$B_2(y) = B_2(y_2) \int_a^b \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)}\, dt = 0$$

διότι $B_2(y_2) = 0$. Η, y ικανοποιεί την (9.53). ∎

Συνάρτηση Green

Η σχέση (9.54) μπορεί να γραφεί ως

$$y = \int_a^b G(x,t)F(t)\, dt, \tag{9.57}$$

όπου

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(x)}{P_0(t)W(t)} \quad , & a \leq t \leq x, \\ \dfrac{y_1(x)y_2(t)}{P_0(t)W(t)} \quad , & x \leq t \leq b. \end{cases}.$$

Η παραπάνω σχέση καλείται *συνάρτηση Green* για το ΠΣΤ (9.53).

Αφήνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη, να αποδείξει ότι οι υποθέσεις του Θεωρήματος 9.2.4 συνεπάγονται ότι το ΠΣΤ

$$Ly = F, \quad B_1(y) = k_1, \quad B_2(y) = k_2$$

έχει μοναδική λύση την

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)F(t)\, dt + \frac{k_2}{B_2(y_1)}y_1 + \frac{k_1}{B_1(y_2)}y_2.$$

Παράδειγμα 9.2.4 Να λυθεί το ΠΣΤ

$$y'' + y = F(x). \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0, \tag{9.58}$$

και προσδιορίστε τη συνάρτηση Green για το συγκεκριμένο ΠΣΤ.

Λύση Έχουμε

$$B_1(y) = y(0) + y'(0) \;\text{ και }\; B_2(y) = y(\pi) - y'(\pi).$$

Έστω $\{z_1, z_2\} = \{\cos x, \sin x\}$, το οποίο είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων για τη ΔΕ $y'' + y = 0$. Τότε

$$\begin{aligned} B_1(z_1) &= (\cos x - \sin x)\big|_{x=0} = \ \ 1 \\ B_2(z_1) &= (\cos x + \sin x)\big|_{x=\pi} = -1 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} B_1(z_2) &= (\sin x + \cos x)\big|_{x=0} = 1 \\ B_2(z_2) &= (\sin x - \cos x)\big|_{x=\pi} = 1. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$B_1(z_1)B_2(z_2) - B_1(z_2)B_2(z_1) = 2,$$

το Θεώρημα 9.2.3 συνεπάγεται ότι το (9.58) έχει μοναδική λύση. Έστω

$$y_1 = B_1(z_2)z_1 - B_1(z_1)z_2 = \cos x - \sin x$$

και

$$y_2 = B_2(z_2)z_1 - B_2(z_1)z_2 = \cos x + \sin x.$$

Τότε $B_1(y_1) = 0$, $B_2(y_2) = 0$, και η ορίζουσα Wronski του $\{y_1, y_2\}$ είναι $W(x) = 2$. Λόγω $P_0 = 1$, η (9.54) δίνει ως λύση τη

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\cos x - \sin x}{2} \int_x^\pi F(t)(\cos t + \sin t)\, dt \\ &\quad + \frac{\cos x + \sin x}{2} \int_0^x F(t)(\cos t - \sin t)\, dt. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση Green είναι

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(\cos t - \sin t)(\cos x + \sin x)}{2}, & 0 \le t \le x, \\ \dfrac{(\cos x - \sin x)(\cos t + \sin t)}{2}, & x \le t \le \pi. \end{cases}$$

Θα θεωρήσουμε την περίπτωση που δεν καλύπτεται από το Θεώρημα 9.2.4.

Θεώρημα 9.2.5 *Θωρούμε ότι το ομογενές ΠΣΤ*

$$Ly = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0 \tag{9.59}$$

έχει μη τετριμμένη λύση την y_1, και έστω y_2 είναι οποιαδήποτε λύση της ΔΕ $Ly = 0$ που δεν είναι πολλαπλάσια της y_1. Έστω $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$. Αν

$$\int_a^b \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)}\, dt = 0, \tag{9.60}$$

τότε το ομογενές ΠΣΤ

$$Ly = F, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0 \tag{9.61}$$

έχει άπειρες λύσεις, της μορφής $y = y_p + c_1 y_1$, όπου

$$y_p = y_1(x) \int_x^b \frac{F(t)y_2(t)}{P_0(t)W(t)}\, dt + y_2(x) \int_a^x \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)}\, dt$$

και c_1 είναι αυθαίρετη σταθερά. Αν

$$\int_a^b \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)}\,dt \neq 0,$$

τότε το ΠΣΤ (9.61) *δεν έχει λύση.*

Απόδειξη Από την απόδειξη του Θεωρήματος 9.2.4, y_p είναι μια ειδική λύση της ΔΕ $Ly = F$, και

$$y_p'(x) = y_1'(x)\int_x^b \frac{F(t)y_2(t)}{P_0(t)W(t)}\,dt + y_2'(x)\int_a^x \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)}\,dt.$$

Συνεπώς, η γενική λύση της (9.59) έχει τη μορφή

$$y = y_p + c_1y_1 + c_2y_2,$$

όπου c_1 και c_2 είναι σταθερές. Τότε

$$\begin{aligned} B_1(y) &= B_1(y_p + c_1y_1 + c_2y_2) = B_1(y_p) + c_1B_1(y_1) + c_2B_1y_2 \\ &= B_1(y_1)\int_a^b \frac{F(t)y_2(t)}{P_0(t)W(t)}\,dt + c_1B_1(y_1) + c_2B_1(y_2) \\ &= c_2B_1(y_2) \end{aligned}$$

Αφού $B_1(y_1) = 0$, από το Θεώρημα 9.2.2 συνεπάγεται ότι $B_1(y_2) \neq 0$; $B_1(y) = 0$ αν και μόνο αν $c_2 = 0$. Συνεπώς $y = y_p + c_1y_1$ και

$$\begin{aligned} B_2(y) &= B_2(y_p + c_1y_1) = B_2(y_2)\int_a^b \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)}\,dt + c_1B_2(y_1) \\ &= B_2(y_2)\int_a^b \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)}\,dt, \end{aligned}$$

αφού $B_2(y_1) = 0$. Από το Θεώρημα 9.2.2, $B_2(y_2) \neq 0$ (διότι $B_2(y_1 = 0)$). Συνεπώς, $Ly = 0$ αν και μόνο αν ισχύει η (9.60). □

Παράδειγμα 9.2.5 Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9.2.5 στο ΠΣΤ

$$y'' + y = F(x), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \tag{9.62}$$

μπορούμε να επιβεβαιώσουμε το Παραδείγμα 9.2.2 και 9.2.3. Η αντίστοιχη ομογενής ΔΕ $y'' + y = 0$ έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $y_1 = \sin x$ και $y_2 = \cos x$, και y_1 ικανοποιεί και τις δύο συνοριακές συνθήκες. Επίσης, $P_0 = 1$ και $W = |(\sin x, \cos x) = -1$, η σχέση (9.60) γίνεται

$$\int_0^\pi F(x)\sin x\,dx = 0.$$

Από το Παράδειγμα 9.2.2, έχουμε $F(x) = 1$ και

$$\int_0^\pi F(x)\sin x\,dx = \int_0^\pi \sin x\,dx = 2,$$

από το Θεώρημα 9.2.4 έχουμε ότι το ΠΣΤ (9.62) δεν έχει λύση. Στο Παράδειγμα 9.2.3, $F(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$ και

$$\int_0^\pi F(x)\sin x\,dx = 2\int_0^\pi \sin^2 x\cos x\,dx = \frac{2}{3}\sin^3 x\Big|_0^\pi = 0,$$

από το Θεώρημα 9.2.4 συνεπάγεται ότι το ΠΣΤ (9.62) έχει άπειρες λύσεις, πολλαπλάσιες της $y_1(x) = \sin x$ κατά μια σταθερά.

9.2.2 ΠΣΤ Sturm-Liouville.

Sturm-Liouville ΠΣΤ-Εισαγωγικά

Στο σημείο αυτό θα θεωρήσουμε το ΠΣΤ ΔΕ 2ης τάξης με την παράμετρο λ

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y + \lambda R(x)y = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0, \tag{9.63}$$

όπου

$$B_1(y) = \alpha y(a) + \beta y'(a) \quad \text{και} \quad B_2(y) = \rho y(b) + \delta y'(b).$$

Όπως αναφέρθηκαμε στο εδάφιο 9.2.2, α, β, ρ, και δ είναι πραγματικοί αριθμοί, με

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \;\text{ και }\; \rho^2 + \delta^2 > 0,$$

P_0, P_1, P_2, και R είναι συνεχείς και, P_0 και R είναι θετικά ορισμένες στο $[a, b]$.

Θα λέμε ότι η παράμετρος λ είναι μια *ιδιοτιμή* για το ΠΣΤ (9.63) αν το (9.63) έχει μη τετριμμένη λύση y. Σε αυτή την περίπτωση, η y είναι *ιδιοσυνάρτηση που σχετίζεται με τη* λ ή μια λ-*ιδιοσυνάρτηση*. *Επίλυση* του προβλήματος ιδιοτιμών σημαίνει να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του (9.63).

Παράδειγμα 9.2.6 Να λυθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y' + 3y' + 2y + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{9.64}$$

Λύση Η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}.$$

όπου

$$r_1 = \frac{-3 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} \quad \text{και} \quad r_2 = \frac{-3 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}.$$

Αν $\lambda < 1/4$, τότε r_1 και r_2 είναι πραγματικές ρίζες του αντίστοιχου χαρακτηριστικού πολυωνύμου $r^2 + 3r + 2 + \lambda = 0$ και η γενική λύση της (9.64) είναι

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες παρατηρούμε ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 \quad + c_2 \quad &= 0 \\ c_1 e^{r_1} + c_2 e^{r_2} &= 0. \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση την $c_1 = c_2 = 0$. Συνεπώς, λ δεν είναι ιδιοτιμή του (9.64).

Αν $\lambda = 1/4$, τότε $r_1 = r_2 = -3/2$, οπότε η γενική λύση της ΔΕ (9.64) είναι

$$y = e^{-3x/2}(c_1 + c_2 x).$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες παρατηρούμε ότι $\lambda = 1/4$ δεν είναι ιδιοτιμή του (9.64).

Αν $\lambda > 1/4$, τότε η γενική λύση της (9.64) είναι

$$y = e^{-3x/2}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x).$$

όπου

$$\omega = \frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2} \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad \lambda = \frac{1 + 4\omega^2}{4}. \tag{9.65}$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες, έχουμε $c_1 = 0$, οπότε $y = c_2 e^{-3x/2} \sin \omega x$, η οποία ισχύει για $c_2 \neq 0$ αν και μόνο αν $\omega = n\pi$, όπου n είναι θετικός ακέραιος. Από την (9.65), οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_n = (1 + 4n^2\pi^2)/4$ και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$y_n = e^{-3x/2} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Για θεωρητικούς λόγους είναι καλό να γράψουμε την ΔΕ του ΠΣΤ (9.63) σε διαφορετική μορφή, όπως στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 9.2.6 *Αν P_0, P_1, P_2 και R είναι συνεχείς συναρτήσεις, και P_0 και R είναι θετικά ορισμένες στο $[a, b]$, τότε η ΔΕ*

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y + \lambda R(x)y = 0 \tag{9.66}$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \tag{9.67}$$

όπου p, p', q και r είναι συνεχείς και p και r είναι θετικά ορισμένες στο $[a, b]$.

Απόδειξη Ξαναγράφουμε τη ΔΕ (9.66) ως

$$y'' + u(x)y' + v(x)y + \lambda R_1(x)y = 0, \tag{9.68}$$

με $u = P_1/P_0$, $v = P_2/P_0$,και $R_1 = R/P_0$. Έστω $p(x) = e^{U(x)}$, όπου U είναι η παράγουσα της u. Τότε p είναι θετικά ορισμένη στο $[a, b]$ και $U' = u$,

$$p'(x) = p(x)u(x) \tag{9.69}$$

είναι συνεχής στο $[a, b]$. Πολλαπλασιάζοντας την (9.68) με $p(x)$ δίνει

$$p(x)y'' + p(x)u(x)y' + p(x)v(x)y + \lambda p(x)R_1(x)y = 0. \tag{9.70}$$

Αφού p είναι θετικά ορισμένη στο $[a, b]$, η ΔΕ έχει την ίδια λύση με τη (9.66). Από (9.69),

$$(p(x)y')' = p(x)y'' + p'(x)y' = p(x)y'' + p(x)u(x)y',$$

έχουμε ότι η (9.70) μπορεί να γραφεί στη μορφή (9.67), με $q(x) = p(x)v(x)$ και $r(x) = p(x)R_1(x)$. ■

Ορισμός 9.2.1 Μια γραμμική ΔΕ 2ης τάξης, θεωρούμε ότι είναι σε αυτοσυζυγή μορφή (self-adjoint), αν και μόνο αν είναι της μορφής

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \tag{9.71}$$

όπου p, p', q και r είναι συνεχείς και p και r είναι θετικά ορισμένες στο $[a, b]$.

Το Θεώρημα 9.2.6 μας λέει ότι μια ΔΕ της μορφής (9.66) μπορεί να αναχθεί σε αυτοσυζυγή μορφή (9.71) αν πολλαπλασιαστεί με τη συνάρτηση

$$\mu(x) = \exp\left[\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)}dx\right] / P_0(x).$$

Στο υπόλοιπο του εδαφίου οι συναρτήσεις p, q, και r έχουν τις ιδιότητες που ισχύουν στο Θεώρημα 9.2.6. Η συνάρτηση $\mu(x)$ ονομάζεται πολλαπλασιαστής αυτοσυζυγοποίησης. Επίσης, όταν γράφουμε τον τελεστή L σε γενική περίπτωση θα εννοούμε

$$L = D(p(x)D) + q(x), \quad \text{όπου} \quad D = \frac{d}{dx}.$$

Έτσι, η ΔΕ (9.71) γράφεται

$$Ly + \lambda r(x)y = 0, \tag{9.72}$$

η συνάρτηση $r(x)$ ονομάζεται *συνάρτηση βάρους* της ΔΕ.

Παράδειγμα 9.2.7 Να τεθεί σε αυτοσυζυγλη μορφή η ΔΕ (Bessel)

$$x^2y'' + xy' + \left(\lambda x^2 - n^2\right)y = 0, \quad x > 0. \tag{9.73}$$

Λύση Από την σχέση

$$\mu(x) = \exp\left[\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)}dx\right] / P_0(x),$$

με αντικατάσταση έχουμε ότι $\mu(x) = 1/x$, οπότε πολλαπλασιάζοντας την (9.84) με $1/x$, προκύπτει η αντίστοιχη αυτοσυζυγής ΔΕ που είναι

$$xy'' + y' + \left(\lambda x - n^2 x^{-1}\right) y = 0, \quad x > 0,$$

ή ισοδύναμα

$$(xy')' + \left(\lambda x - n^2 x^{-1}\right) y = 0, \quad x > 0.$$

Ορισμός 9.2.2 Ο αυτοσυζυγής τελεστής L, ονομάζεται συμμετρικός στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, αν και μόνο αν

$$\int_a^b (uLv - vLu)\, dx = 0, \tag{9.74}$$

για κάθε ζεύγος $C^2[a, b]$-συναρτήσεων u, v οι οποίες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες που συνοδεύουν τον L.

Θεώρημα 9.2.7 *Έστω ο διαφορικός τελεστής $L = D(p(x)D) + q(x)$, ορισμένος στο διάστημα $[a, b]$ και οι συναρτήσεις $u, v \in C^2[a, b]$, τότε ισχύει ο τύπος*

$$\int_a^b (uLv - vLu)\, dx = p(x)W(u, v|x)|_a^b \tag{9.75}$$

όπου $W(u, v) = uv' - vu'$ είναι η ορίζουσα Wronski των u, v.

Απόδειξη Πράγματι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_a^b (uLv - vLu)\, dx &= \int_a^b \left\{ u\frac{d}{dx}(pv') + uq(x)v - v\frac{d}{dx}(pu') - vq(x)u \right\} dx \\
&= \int_a^b \frac{d}{dx}\left\{p(x)v'u - p(x)u'v\right\} dx \\
&= \int_a^b \frac{d}{dx}\left\{p(x)W(u, v|x)\right\} dx = p(x)W(u, v|x)\Big|_a^b.
\end{aligned}$$

■

Στο εδάφιο 9.1.1 ορίσαμε την έννοια της ορθογωνιότητας συναρτήσεων, επίσης δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f και g καλούνται ορθογώνιες ως προς μια συνάρτηση βάρους $r(x) > 0$ στο διάστημα $[a, b]$, αν έχουμε

$$\int_a^b r(x)f(x)g(x)dx = 0.$$

Θεώρημα 9.2.8 *Έστω L ένας συμμετρικός τελεστής στο διάστημα $[a, b]$, ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση*

$$Ly(x) + \lambda r(x)y(x) = 0, \quad x \in (a, b).$$

Αν λ_n και λ_k είναι δύο διαφορετικές ιδιοτιμές του L, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $y_n(x)$ και $y_k(x)$, τότε οι $y_n(x)$ και $y_k(x)$, είναι ορθογώνιες ως προς τη συνάρτηση βάρους $r(x)$.

Απόδειξη Για τις ιδιοσυναρτήσεις $y_n(x)$ και $y_k(x)$, έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις

$$Ly_n(x) = -\lambda_n r(x) y_n(x), \qquad Ly_k(x) = -\lambda_k r(x) y_k(x)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο εξισώσεις με $y_k(x)$ και $y_n(x)$ αντίστοιχα ολοκληρώνουμε και αφαιρούμε κατά μέλη, οπότε έχουμε

$$\int_a^b \{y_k(x)Ly_n(x) - y_n(x)Ly_k(x)\}\, dx = (\lambda_k - \lambda_n)\int_a^b r(x)y_n(x)y_k(x)dx.$$

Επειδή ο L είναι συμμετρικός, το πρώτο μέλος της προηγούμενης σχέσης θα είναι μηδέν. Επομένως, προκύπτει

$$\int_a^b r(x)y_n(x)y_k(x)dx = 0.$$

■

Θεώρημα 9.2.9 *Οι ιδιοτιμές ενός συμμετρικού τελεστή είναι όλες πραγματικές και αποτελούν μια άπειρη ακολουθία, διατεταγμένη κατά αύξουσα τιμή, έτσι ώστε*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

όπου το $\lambda_n \to \infty$, καθώς το $n \to \infty$.

Ομαλά Sturm-Liouville προβλήματα

Ορισμός 9.2.3 Η ΔΕ (9.67) καλείται *Sturm–Liouville εξίσωση*, και το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$Ly + \lambda r(x)y = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0, \tag{9.76}$$

με $Ly = (p(x)y')' + q(x)y$ το οποίο είναι ισοδύναμο με την (9.63), καλείται *Sturm-Liouville πρόβλημα.*

Οι διαχωρισμένες ομογενείς συνοριακές συνθήκες διακρίνονται σε τρείς βασικές κατηγορίες:

(α΄) Συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* οι οποίες είναι της μορφής

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0,$$

(β΄) Συνοριακές συνθήκες *Neumann* οι οποίες είναι της μορφής

$$y'(a) = 0, \quad y'(b) = 0$$

(γ΄) Συνοριακές συνθήκες *Robin* ή *μεικτές* οι οποίες είναι της γενικής μορφής

$$k_1 y(a) + y'(a) = 0, \quad k_2 y(b) + y'(b) = 0$$

όπου k_1, k_2 είναι σταθερές με μια τουλάχιστον μη μηδενική.

Αρκετά συχνά στις εφαρμογές μας ενδιαφέρει να επιλύσουμε μια ΔΕ σε ένα πεπερασμένο διάστημα και υπό ορισμένες συνθήκες στα άκρα του διαστήματος :

ΠΣΤ 1: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$

ΠΣΤ 2: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0$

ΠΣΤ 3: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$

ΠΣΤ 4: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0$

ΠΣΤ 5: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(-L) = y(L), \quad y'(-L) = y'(L)$

Σε καθένα από τα παραπάνω ΠΣΤ η ΔΕ συνοδεύεται από συγκεκριμένες συνθήκες τις αποκαλλούμενες *συνοριακές συνθήκες*. Οι συνοριακές συνθήκες για το Πρόβλημα 5, σε αντιδιαστολή με τις συνθήκες των ΠΣΤ 1-4, δεν απαιτούν οι y ή y' άν είναι μηδέν στα άκρα του διαστήματος, μόνο η y έχει την ίδια τιμή στα $x = \pm L$, όπως επίσης η y' έχει την ίδια τιμή στα $x = \pm L$. Οι συνοριακές συνθήκες του Προβλήματος 5 είναι *περιοδικές*. Φυσικά η μηδενική λύση $y = 0$ είναι η τετριμμένη. Το ερώτημα που τίθεται είναι:

Για ποιες τιμές της παραμέτρου λ έχει μη τετριμμένη λύση και ποια είναι η μορφή της;

Η τιμή της παραμέτρου λ για την οποία το πρόβλημα έχει μη τετριμμένη λύση καλείται *ιδιοτιμή* του προβλήματος και η αντίστοιχη μη τετριμμένη λύση είναι λ-ιδιοσυνάρτηση. Τα Προβλήματα 1-5 καλούνται προβλήματα ιδιοτιμών. Σε αυτό το σημείο θα θεωρήσουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικοί αριθμοί.

Θεώρημα 9.2.10 *Τα ΠΣΤ 1-5 έχουν μη μηδενικές ιδιοτιμές. Επίσης, $\lambda = 0$ είναι μια ιδιοτιμή των ΠΣΤ 2 και5, με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση $y_0 = 1$, αλλά $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή των ΠΣΤ 1, 3, ή 4.*

Απόδειξη Θεωρούμε τα ΠΣΤ 1-4, και αφήνουμε την απόδειξη για το ΠΣΤ 5 ως άσκηση στον αναγνώστη. Αν $y'' + \lambda y = 0$, τότε $y(y'' + \lambda y) = 0$, οπότε

$$\int_0^L y(x)(y''(x) + \lambda y(x))\, dx = 0.$$

$$\lambda \int_0^L y^2(x)\, dx = -\int_0^L y(x) y''(x)\, dx. \tag{9.77}$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^L y(x)y''(x)\, dx &= y(x)y'(x)\Big|_0^L - \int_0^L (y'(x))^2\, dx \\ &= y(L)y'(L) - y(0)y'(0) - \int_0^L (y'(x))^2\, dx. \end{aligned} \tag{9.78}$$

Όμως, αν y ικανοποιεί οποιαδήποτε από τις συνοριακές συνθήκες των ΠΣΤ 1-4, τότε

$$y(L)y'(L) - y(0)y'(0) = 0.$$

δηλ, (9.77) και (9.78) συνεπάγονται ότι

$$\lambda \int_0^L y^2(x)\,dx = \int_0^L (y'(x))^2\,dx.$$

Αν $y \not\equiv 0$, τότε $\int_0^L y^2(x)\,dx > 0$. Συνεπώς, $\lambda \geq 0$και, αν $\lambda = 0$, τότε $y'(x) = 0$ για όλα x στο $(0, L)$, και y είναι σταθερή στο $(0, L)$. Οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση ικανοποιεί τις συνθήκες του ΠΣΤ 2, οπότε $\lambda = 0$ είναι μια ιδιοτιμή του ΠΣΤ 2 και κάθε μη μηδενική σταθερή συνάρτηση είναι ιδιοσυνάρτηση. Όμως, η μόνη σταθερή συνάρτηση που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες των Προβλημάτων 1, 3 ή 4 είναι $y \equiv 0$. Συνεπώς $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή κανενός από αυτά τα προβλήματα. □

Παράδειγμα 9.2.8 (ΠΣΤ 1) Να λυθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0. \tag{9.79}$$

Λύση Από το Θεώρημα 9.2.10, κάθε ιδιοτιμή του (9.79) πρέπει να είναι θετική. Αν y ικανοποιεί την (9.79) με $\lambda > 0$, τότε

$$y = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x,$$

και c_2 είναι σταθερές. Η συνοριακή συνθήκη $y(0) = 0$ δίνει t $c_1 = 0$. Οπότε $y = c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x$. Η συνοριακή συνθήκη $y(L) = 0$ συνεπάγεται ότι $c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,L = 0$. Για να είναι $c_2 \neq 0$, πρέπει να διαλέξουμε εκείνες τις τιμές του $\sqrt{\lambda} = n\pi/L$, όπου n είναι θετικός ακέραιος. Συνεπώς $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$ είναι ιδιοτιμή και

$$y_n = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση. ■

Διατυπώνουμε το παρακάτω θεώρημα που περιγράφει τις λύσεις των ΠΣΤ 1-5.

Θεώρημα 9.2.11 *(i) Το πρόβλημα ιδιοτιμών*

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

έχει άπειρες το πλήθος θετικές ιδιοτιμές $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$y_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

(ii) Το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

έχει την ιδιοτιμή $\lambda_0 = 0$, με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση $y_0 = 1$, άπειρες το πλήθος *θετικές ιδιοτιμές* $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$*, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις*

$$y_n = \cos\frac{n\pi x}{L}, n = 1, 2, 3 \ldots.$$

(iii) Το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

έχει άπειρες το πλήθος θετικές ιδιοτιμές $\lambda_n = (2n-1)^2\pi^2/4L^2$*, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις*

$$y_n = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

(iv) Το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

έχει άπειρες το πλήθος θετικές ιδιοτιμές $\lambda_n = (2n-1)^2\pi^2/4L^2$*, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις*

$$y_n = \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

(v) Το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(-L) = y(L), \quad y'(-L) = y'(L),$$

έχει την ιδιοτιμή $\lambda_0 = 0$*, με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση* $y_0 = 1$ *και άπειρες το πλήθος θετικές ιδιοτιμές* $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$*, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις*

$$y_{1n} = \cos\frac{n\pi x}{L} \quad \textit{και} \quad y_{2n} = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Παράδειγμα 9.2.9 (ΠΣΤ 5) Να λυθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(-L) = y(L), \quad y'(-L) = y'(L). \tag{9.80}$$

Λύση Από το Θεώρημα 9.2.10, $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του (9.80) με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση $y_0 = 1$, και οποιαδήποτε άλλη ιδιοτιμή πρέπει να είναι θετική. Αν y ικανοποιεί την (9.80) με $\lambda > 0$, τότε

$$y = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x, \tag{9.81}$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές, οι οποίες θα προσδιοριστούν εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες. Η συνοριακή συνθήκη $y(-L) = y(L)$ δίνει μετά από απλές πράξεις:

$$c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, L = 0. \tag{9.82}$$

Παραγωγίζοντας την (9.81) και εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη $y'(-L) = y'(L)$, έχουμε

$$c_1 \sin\sqrt{\lambda}\, L = 0. \tag{9.83}$$

Οι εξισώσεις (9.82) και (9.83) συνεπάγονται ότι $c_1 = c_2 = 0$, εκτός αν $\sqrt{\lambda} = n\pi/L$ όπου n θετικός ακέραιος. Σε αυτή την περίπτωση οι (9.82) και (9.83) ισχύουν για αυθαίρετο c_1 και c_2. Η ιδιοτιμή καθορίζεται από $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, και κάθε τέτοια ιδιοτιμή έχει γραμμικά ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις

$$\cos\frac{n\pi x}{L} \quad \text{και} \quad \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

■

Παράδειγμα 9.2.10 Να γραφεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + 3y' + (2+\lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \tag{9.84}$$

του Παραδείγματος 9.2.6 σε μορφή Sturm-Liouville προβλήματος.

Λύση Συγκρίνοντας την (9.84) με την (9.68), έχουμε ότι $u(x) = 3$, θεωρούμε $U(x) = 3x$ και $p(x) = e^{3x}$. Πολλαπλασιάζοντας τη ΔΕ στην (9.84) με e^{3x} έχουμε

$$e^{3x}(y'' + 3y') + 2e^{3x}y + \lambda e^{3x}y = 0, \quad \Leftrightarrow \quad e^{3x}(y''+3y') = (e^{3x}y')',$$

η ΔΕ (9.84) είναι ισοδύναμη με το Sturm-Liouville πρόβλημα

$$(e^{3x}y')' + 2e^{3x}y + \lambda e^{3x}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{9.85}$$

■

Παράδειγμα 9.2.11 Να γραφεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 0 \tag{9.86}$$

σε μορφή Sturm-Liouville προβλήματος.

Λύση Διαιρώντας τη ΔΕ (9.86) με x^2 έχουμε

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{\lambda}{x^2}y = 0.$$

Συγκρίνοντας την τελευταία με τη (9.68) έχουμε ότι $u(x) = 1/x$, θεωρούμε $U(x) = \ln x$ και $p(x) = e^{\ln x} = x$. Πολλαπλασιάζοντας τη ΔΕ με x έχουμε

$$xy'' + y' + \frac{\lambda}{x}y = 0. \quad \Leftrightarrow \quad xy'' + y' = (xy')',$$

η ΔΕ (9.86) είναι ισοδύναμη με το Sturm-Liouville πρόβλημα

$$(xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 0. \tag{9.87}$$

■

Παράδειγμα 9.2.12 Να επιλυθεί το Sturm-Liouville πρόβλημα

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) + 3y'(1) = 0. \tag{9.88}$$

Λύση Αν $\lambda = 0$, η ΔΕ στο (9.88) ανάγεται στην $y'' = 0$, με γενική λύση $y = c_1 + c_2 x$. Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες, έχουμε $c_1 = c_2 = 0$. Συνεπώς το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή για το (9.88).

Αν $\lambda < 0$, θεωρούμε $\lambda = -k^2$ με $k > 0$ και η ΔΕ στο (9.88) γίνεται $y'' - k^2 y = 0$, η γενική λύση της οποίας είναι

$$y = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx, \tag{9.89}$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$\begin{gathered} c_1 + kc_2 = 0 \\ (\cosh k + 3k \sinh k)c_1 + (\sinh k + 3k \cosh k)c_2 = 0. \end{gathered} \tag{9.90}$$

Η ορίζουσα του αλγεβρικού συστήματος είναι

$$\begin{aligned} D_N(k) &= \begin{vmatrix} 1 & k \\ \cosh k + 3k \sinh k & \sinh k + 3k \cosh k \end{vmatrix} \\ &= (1 - 3k^2) \sinh k + 2k \cosh k. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το σύστημα (9.90) έχει μη τετριμμένη λύση, αν και μόνο αν $D_N(k) = 0$ ή, ισοδύναμα,

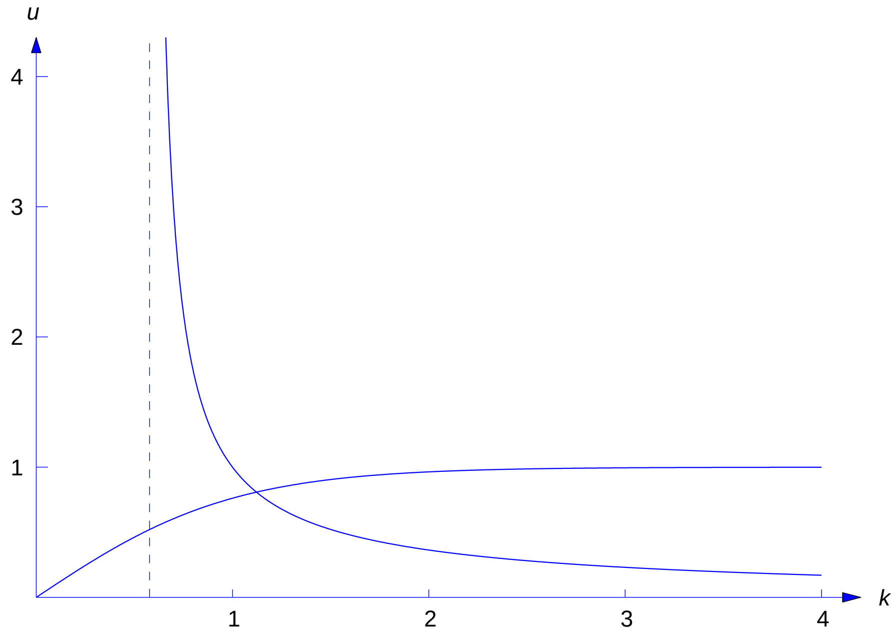
$$\tanh k = -\frac{2k}{1 - 3k^2}. \tag{9.91}$$

Το γράφημα της συνάρτησης στο δεξί μέρος (βλ. Σχήμα 9.12) έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο σημείο $k = 1/\sqrt{3}$. Οι συναρτήσεις $\tanh k$, $-\dfrac{2k}{1-3k^2}$ έχουν αντίθετα πρόσημα αν $k < 1/\sqrt{3}$, η υπερβατική εξίσωση δεν έχει λύση στο $(0, 1/\sqrt{3})$. Εύκολα φαίνεται ότι οι δύο καμπύλες τέμνονται κοντά στο $k_0 = 1.2$. Ξεκινώντας από αυτή την εκτίμηση, μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαναληπτική μέθοδο Newton (βλ. Β. Ρόθος & Χ. Σφυράκης 2011, κώδικας σε Maple) από όπου υπολογίζουμε ότι $k_0 \approx 1.1219395$. Συνεπώς $-k_0^2 \approx -1.2587483$ είναι μια ιδιοτιμή του (9.88). Από την (9.89) και την πρώτη εξίσωση της (9.90),

$$y_0 = k_0 \cosh k_0 x - \sinh k_0 x.$$

Αν $\lambda > 0$, θεωρούμε $\lambda = k^2$ με $k > 0$, και η ΔΕ στο (9.88) γίνεται $y'' + k^2 y = 0$, με γενική λύση

$$y = \cos kx + c_2 \sin kx. \tag{9.92}$$



Σχήμα 9.12: $u = \tanh k$ και $u = -2k/(1-3k^2)$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες έχουμε ότι

$$\begin{aligned} c_1 + kc_2 &= 0 \\ (\cos k - 3k\sin k)c_1 + (\sin k + 3k\cos k)c_2 &= 0. \end{aligned} \tag{9.93}$$

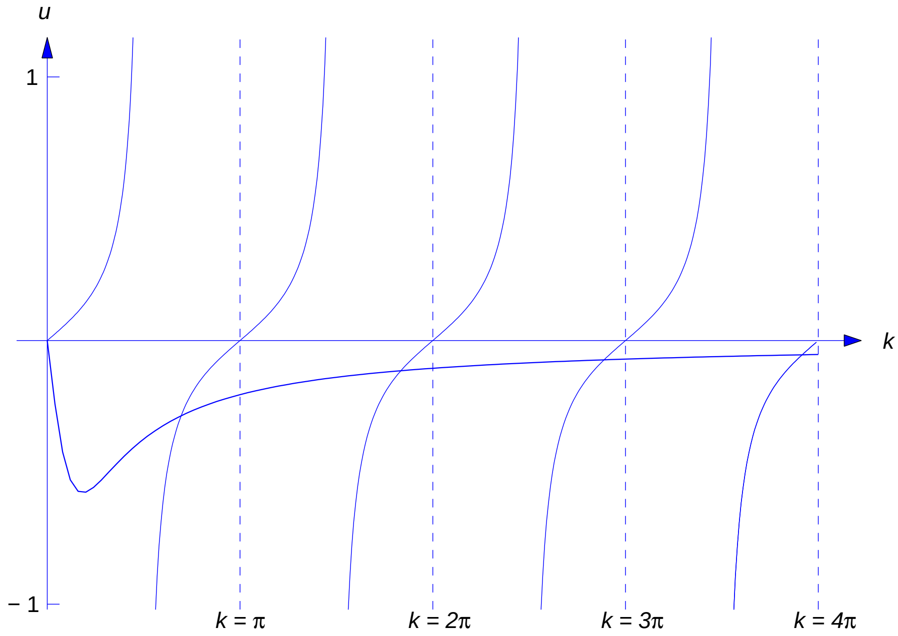
Η ορίζουσα του αλγεβρικού συστήματος είναι

$$\begin{aligned} D_P(k) &= \begin{vmatrix} 1 & k \\ \cos k - 3k\sin k & \sin k + 3k\cos k \end{vmatrix} \\ &= (1+3k^2)\sin k + 2k\cos k. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το σύστημα (9.93) έχει μη τετριμμένη λύση, αν και μόνο αν $D_P(k) = 0$ ή, ισοδύναμα,

$$\tan k = -\frac{2k}{1+3k^2}.$$

Στο Σχήμα 9.13 δείχνουμε τα γραφήματα των δύο μερών της υπερβατικής εξίσωσης. Όπως φαίνεται και από το σχήμα τα γραφήματα τέμνονται σε άπειρα το πλήθος σημεία $k_n \approx n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), όπου το σφάλμα στην πρόσεγγιση πλησιάζει το μηδέν καθώς $n \to \infty$. Μπορούμε με χρήση της αριθμητικής μεθόδου Newton (βλ. Β. Ρόθος & Χ. Σφυράκης 2011, κώδικας σε Maple) να υπολογίσουμε τα σημεία k_n με περισσότερη ακρίβεια. Έχουμε



Σχήμα 9.13: $u = \tan k$ και $u = -2k/(1+k)$.

υπολογίσει

$$\begin{aligned} k_1 &\approx 2.9256856, \\ k_2 &\approx 6.1765914, \\ k_3 &\approx 9.3538959, \\ k_4 &\approx 12.5132570. \end{aligned}$$

Οι εκτιμήσεις των αντίστοιχων ιδιοτιμών $\lambda_n = k_n^2$ είναι

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx 8.5596361, \\ \lambda_2 &\approx 38.1502809, \\ \lambda_3 &\approx 87.4953676, \\ \lambda_4 &\approx 156.5815998. \end{aligned}$$

Από τη σχέση (9.92) και την πρώτη εξίσωση της (9.93), έχουμε ότι η

$$y_n = k_n \cos k_n x - \sin k_n x$$

είναι η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση στην ιδιοτιμή λ_n . ■

Θεώρημα 9.2.12 *Αν $Ly = (p(x)y')' + q(x)y$ και u και v είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$ που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $B_1(y) = 0$ και $B_2(y) = 0$, τότε ο L είναι* *συμμετρικός τελεστής, δηλαδή*

$$\int_a^b [u(x)Lv(x) - v(x)Lu(x)]\,dx = 0. \tag{9.94}$$

Απόδειξη Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b [u(x)Lv(x) - v(x)Lu(x)]\,dx &= \int_a^b [u(x)(p(x)v'(x))' - v(x)(p(x)u'(x))']\,dx \\ &= p(x)[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)]\Big|_a^b \\ &\quad - \int_a^b p(x)[u'(x)v'(x) - u'(x)v'(x)]\,dx.\end{aligned}$$

Τα δύο τελευταία ολοκληρώματα είμαι μηδέν

$$\int_a^b [u(x)Lv(x) - v(x)Lu(x)]\,dx = p(x)[u(x)v'(x) - u'(x)v'(x)]\Big|_a^b. \tag{9.95}$$

Από τις υποθέσεις έχουμε, $B_1(u) = B_1(v) = 0$ και $B_2(u) = B_2(v) = 0$. Συνεπώς,

$$\begin{matrix}\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0 & & \rho u(b) + \delta u'(b) = 0 \\ & \text{και} & \\ \alpha v(a) + \beta v'(a) = 0 & & \rho v(b) + \delta v'(b) = 0,\end{matrix}$$

διότι $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ και $\rho^2 + \delta^2 > 0$, οι ορίζουσες των δύο συστημάτων πρέπει να είναι μηδέν,

$$u(a)v'(a) - u'(a)v(a) = u(b)v'(b) - u'(b)v(b) = 0.$$

Από την τελευταία συνθήκη και την (9.95) συνεπάγεται η (9.94). ■

Το επόμενο Θεώρημα αποδεικνύει ότι ένα Sturm-Liouville πρόβλημα δεν έχει μιγαδικές ιδιοτιμές, η απόδειξη απαιτεί να θεωρήσουμε μιγαδικές συναρτήσεις και είναι έξω από τους σκοπούς του παρόντος βιβλίου. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία (J.W. Brawn & d R. Churchill 1993, B. Rai & D. P. Choudhury, 2005)

Θεώρημα 9.2.13 *Αν $\lambda = p + qi$ με $q \neq 0$, τότε το ΠΣΤ*

$$Ly + \lambda r(x)y = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0$$

έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.

Θεώρημα 9.2.14 *Αν λ_1 και λ_2 είναι διακριτές ιδιοτιμές του Sturm-Liouville προβλήματος*

$$Ly + \lambda r(x)y = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0 \tag{9.96}$$

με ιδιοσυναρτήσεις u και v αντίστοιχα, τότε

$$\int_a^b r(x)u(x)v(x)\,dx = 0. \tag{9.97}$$

Απόδειξη Αφού u και v ικανοποιούν τις συνοριακές συνθηκες στην (9.96), από το Θεώρημα 9.2.12 συνεπάγεται ότι

$$\int_a^b [u(x)Lv(x) - v(x)Lu(x)]\,dx = 0.$$

Επίσης, $Lu = -\lambda_1 ru$ και $Lv = -\lambda_2 rv$, δηλαδή

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b r(x)u(x)v(x)\,dx = 0.$$

Αφού $\lambda_1 \neq \lambda_2$, συνεπάγεται η (9.97). ■

Αν u και v είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b r(x)u(x)v(x)\,dx = 0,$$

θα λέμε ότι u και v *ορθογώνιες στο* $[a, b]$ *αναφορικά με* $r = r(x)$.

Από το Θεώρημα 9.2.2 συνεπάγεται το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 9.2.15 *Αν $u \not\equiv 0$ και v ικανοποιούν την*

$$Ly + \lambda r(x)y = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0,$$

τότε $v = cu$ για κάποια σταθερά c.

Έχουμε αποδείξει ένα μέρος του επόμενου θεωρήματος, για την πλήρη απόδειξη βλέπε σχετική βιβλιογραφία (J.W. Brawn & d R. Churchill 1993, B. Rai & D. P. Choudhury, 2005)

Θεώρημα 9.2.16 *Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών ενός Sturm-Liouville προβλήματος*

$$Ly + \lambda r(x)y = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0$$

μπορεί να δηλωθεί

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots,$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Για κάθε n, αν y_n είναι αυθαίρετη λ_n-ιδιοσυνάρτηση, τότε κάθε λ_n-ιδιοσυνάρτηση είναι πολλαπλάσια της y_n με μια σταθερά. Αν $m \neq n$, y_m και y_n είναι ορθογώνιες στο $[a, b]$

αναφορικά με τη συνάρτηση βάρους $r = r(x)$ έτσι είναι,

$$\int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x)\, dx = 0. \tag{9.98}$$

Αφήνουμε ως άσκηση να επιβεβαιώσει ο αναγνώστης την (9.98) για τις ιδιοσυναρτήσεις που υπολογίστηκαν στα Παραδείγματα 9.2.6 και 9.2.10.

Γενικευμένες σειρές Fourier

Οι ιδιοσυναρτήσεις $\{y_n(x)\}$ ενός προβλήματος Sturm-Liouville, κάτωαπό ορισμένες προϋποθέσεις, είναι ορθογώνιες μεταξύ τους σε κάποιο διάστημα I ως προς συγκεκριμένη συνάρτηση βάρους $r(x)$. Αποτελούν δε μια άπειρη ακολουθία συναρτήσεων που αντιστοιχεί στην άπειρη ακολουθία των ιδιοτιμών. Σε μερικές περιπτώσεις παρουσιάζεται η ανάγκη της παράστασης μιας συνάρτησης $f(x)$ ορισμένης στο I στη μορφή

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad x \in I. \tag{9.99}$$

Τα αναπτύγματα αυτά ονομάζονται *Γενικευμένες σειρές Fourier* ή *σειρές Sturm-Liouville* . Οι συντελεστές c_n αποτελούν τους *συντελεστές Sturm-Liouville* του αναπτύγματος. Οι $\{y_n(x)\}$ ικανοποιούν την συνθήκη ορθογωνιότητας:

Το επόμενο Θεώρημα μας δείχνει την μέθοδο να αναπτύσουμε μια τυχαία συνάρτηση σε σειρά ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις ενός Sturm-Liouville προβλήματος, και αποτελεί γενίκευση των σειρών Fourier. Για την απόδειξη του επόμενου Θεωρήματος βλ.(J.W. Brawn & d R. Churchill 1993),

$$\int_I r(x) y_n(x) y_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \neq 0, & m = n \end{cases} \tag{9.100}$$

Αρκετές φορές, είναι χρήσιμο, να γίνεται κατά τέτοιο τρόπο η επιλογή των ιδιοσυναρτήσεων, ώστε να ικανοποιούν συγχρόνως τη σχέση

$$\int_I r(x) y_n^2(x) dx = 1, \quad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{9.101}$$

Η συνθήκη (9.101) αποτελεί τη *συνθήκη κανονικοποίησης* των ιδιοσυναρτήσεων. Τότε λέμε ότι, οι ιδιοσυναρτήσεις $\{y_n(x)\}$ αποτελούν ένα *ορθοκανονικό σύνολο* συναρτήσεων και η σχέση (9.100) γράφεται

$$\int_I r(x) y_n(x) y_m(x) dx = \delta_{n,m}$$

όπου $\delta_{n,m}$ το *δ-σύμβολο του Kronecker*

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Ορισμός 9.2.4 Η μη αρνητική ποσότητα

$$\|y_n(x)\|_I = \left(\int_I r(x)\,(y_n(x))^2\,dx\right)^{1/2} \tag{9.102}$$

ονομάζεται *νόρμα* ή *στάθμη* της $y_n(x)$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $r(x)$.

Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο $\{y_n(x)\}$ είναι ορθοκανονικό, αν ισχύει

$$\|y_n(x)\|_I = 1, \quad n = 1, 2, 3 \ldots.$$

Επίσης, αν $\{y_n(x)\}$ είναι ένα τυχαίο ορθογώνιο σύνολο, τότε το σύνολο $\{y_n(x)\}\,\|y_n(x)\|^{-1}$ αποτελεί το αντίστοιχο ορθοκανονικό σύνολο αυτού.

Παράδειγμα 9.2.13 *Να βρεθούν οι ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις του ΠΣΤ*

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Λύση Από το Θεώρημα 9.2.11, γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$\lambda_n = n^2\pi^2/L^2, \quad y_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Η συνάρτηση βάρους είναι $r(x) = 1$. Επομένως, για να ισχύει η σχέση (9.101), πρέπει να επιλεγούν λ_n, έτσι ώστε

$$\int_0^L \lambda_n^2 \left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)^2 dx = 1, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Όμως ισχύει,

$$\lambda_n^2 \int_0^L \left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)^2 dx = \lambda_n^2 \frac{L}{2}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Επομένως, θα πρέπει να επιλέξουμε $\lambda_n = \sqrt{2/L}$, $n = 1, 2, 3 \ldots$. Άρα, οι ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος θα είναι

$$y_n = \sqrt{2/L}\sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots.$$

Όπως και στις σειρές Fourier, για τον υπολογισμό των συντελεστών c_n του αναπτύγματος (9.99), θα κάνουμε χρήση της ορθογωνιότητας των $\{y_n(x)\}$. Για το σκοπό, αυτό πολλαπλασιάζουμε την (9.99) με την παράσταση $r(x)\,\{y_k(x)\}$ και ολοκληρώνουμε στο I, οπότε προκύπτει

$$\int_I r(x)y_k(x)f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_I r(x)y_k(x)y_n(x)dx = c_k\,\|y_k(x)\|_I^2,$$

αφού όλοι οι υπόλοιποι όροι $(n \neq k)$, είναι μηδέν. Έτσι, έχουμε ότι , οι *συντελεστές Sturm-Liouville* της $f(x)$ δίνονται από τη σχέση:

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_I r(x) y_k(x) f(x) dx}{\|y_k(x)\|_I^2}$$

Η θεωρία των γενικευμένων σειρών Fourier αναπτύσσεται αντίστοιχα με αυτή των απλών τριγωνομετρικών σειρών Fourier. Διατυπώνουμε το ακόλουθο θεώρημα σύγκλισης, για την απόδειξη του οποίου ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία (J.W. Brawn & d R. Churchill 1993)

Θεώρημα 9.2.17 *Αν $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ είναι ιδιοτιμές του Sturm-Liouville προβλήματος*

$$Ly + \lambda r(x) y = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0,$$

με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις y_1, y_2, ..., y_n, ... Υποθέτουμε ότι αν η f είναι τμηματικά ομαλή συνάρτηση (Ορισμός 9.1.3) στο $[a, b]$, τότε δέχεται το ακόλουθο ανάπτυγμα:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad x \in (a, b)$$

όπου οι συντελεστές Sturm-Liouville δίνονται από τον τύπο

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_a^b r(x) f(x) y_n(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b r(x) y_n^2(x)\, dx}. \tag{9.103}$$

Το ανάπτυγμα συγκλίνει σημειακά στην $f(x)$, σε κάθε σημείο συνέχειας αυτής στο (a, b) και στην τιμή $f(x-) + f(x+)/2$ δηλαδή ισχύει

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) \tag{9.104}$$

σε κάθε σημείο ασυνέχειας της $f(x)$ στο (a, b).

Παράδειγμα 9.2.14 Να επιλυθεί το Sturm-Liouville πρόβλημα

$$y'' + y' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{9.105}$$

Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x) = 1, 0 < x < 1$ ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις του ΠΣΤ.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕ του ΠΣΤ (9.105) είναι $r^2 + r + \lambda = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm ik$ όπου $k^2 = \lambda - 1/4$. Έτσι, η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\left(c_1 \cos kx + c_2 \sin kx\right)$$

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες προκύπτει

$$c_1 = 0, \quad \text{και} \quad c_2 \mathrm{e}^{-1/2} \sin k = 0$$

Επομένως, για $c_2 \neq 0$ θα πρέπει $k_n = n\pi$, $n = 1, 2, 3\dots$. Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις θα είναι

$$y_n(x) = \mathrm{e}^{-x/2} \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 9.2.17, θα πρέπει να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση βάρους $r(x)$ ώστε να γράψουμε τη ΔΕ στην μορφή $Ly + \lambda r(x) y = 0$. Παρατηρούμε αν πολλαπλασιάσουμε τη ΔΕ με e^x

$$\mathrm{e}^x y'' + \mathrm{e}^x y' + \lambda \mathrm{e}^x y = 0 \tag{9.106}$$

Έτσι βλέπουμε ότι η συνάρτηση βάρους είναι $r(x) = \mathrm{e}^x > 0$. Έχουμε, λοιπόν, από την σχέση (9.103)

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\displaystyle\int_a^b r(x) f(x) y_n(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b r(x) y_n^2(x)\, dx} = \frac{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x) \sin(n\pi x) dx}{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x \left(\mathrm{e}^{-x/2}\sin(n\pi x)\right)^2 dx} \\ &= 2\int_0^1 \mathrm{e}^{-x/2} \sin(n\pi x) dx \\ &= \frac{2n\pi}{n^2\pi^2 + \dfrac{1}{4}}\left[(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{1/2} + 1\right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{9.107}$$

Γι'αυτό το σύνολο ιδιοσυναρτήσεων, το ανάπτυγμα της $f(x)$ θα δίνεται από:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n\pi}{4n^2\pi^2 + 1}\left[(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{1/2} + 1\right] \sin(n\pi x), \quad x \in (0, 1)$$

9.2 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-4 να βρείτε έναν γενικό τύπο για τη λύση του ΠΣΤ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 9.2.4. Υποθέτουμε ότι $a < b$.

1. $y'' - y = F(x), \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0$

2. $y'' - y = F(x), \quad y(a) = 0, \quad y'(b) = 0$

3. $y'' - y = F(x), \quad y'(a) = 0, \quad y'(b) = 0$

4. $y'' - y = F(x), \quad y(a) - y'(a) = 0, \quad y(b) + y'(b) = 0$

Στις Ασκήσεις 5-8 να βρείτε όλες τις τιμές του ω για τις οποίες το ΠΣΤ έχει μοναδική λύση, και να λύσετε το ΠΣΤ με τη χρήση του Θεωρήματος 9.2.4. Για άλλες τιμές του ω, να βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να πληρεί η F έτσι ώστε το ΠΣΤ να έχει λύση, και να βρείτε τη λύση με χρήση του Θεωρήματος 9.2.5.

5. $y'' + \omega^2 y = F(x), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

6. $y'' + \omega^2 y = F(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$

7. $y'' + \omega^2 y = F(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

8. $y'' + \omega^2 y = F(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$

9. Να βρείτε τη συνάρτηση Green για το ΠΣΤ

$$y'' = F(x), \quad y(0) - 2y'(0) = 0, \quad y(1) + 2y'(1) = 0. \qquad \text{(A)}$$

Με χρήση της συνάρτησης Green να λυθεί το (A) με **(a)** $F(x) = 1$, **(b)** $F(x) = x$ και **(c)** $F(x) = x^2$.

10. Να βρείτε τη συνάρτηση Green για το ΠΣΤ

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = F(x), \quad y(\pi/2) = 0, \quad y(\pi) = 0, \qquad \text{(A)}$$

όπου

$$y_1(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad y_2(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

είναι λύσεις της ομογενούς ΔΕ. Να λυθεί το (A) με χρήση της συνάρτησης Green για **(a)** $F(x) = x^{3/2}$ και **(b)** $F(x) = x^{5/2}$.

11. Να βρείτε τη συνάρτηση Green για το ΠΣΤ

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = F(x), \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 0, \qquad \text{(A)}$$

όπου $\{x, x^2\}$ είναι το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς ΔΕ. Να λυθεί το (A) με χρήση της συνάρτησης Green για **(a)** $F(x) = 2x^3$ και **(b)** $F(x) = 6x^4$.

12. Να βρείτε τη συνάρτηση Green για το ΠΣΤ

$$x^2 y'' + xy' - y = F(x), \quad y(1) - 2y'(1) = 0, \quad y'(2) = 0, \qquad \text{(A)}$$

όπου $\{x, 1/x\}$ είναι το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς ΔΕ. Να λυθεί το (A) με χρήση της συνάρτησης Green για **(a)** $F(x) = 1$, **(b)** $F(x) = x^2$, και **(c)** $F(x) = x^3$.

Στις Ασκήσεις 13-15 να βρείτε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για α, β, ρ, και δ έτσι το αντίστοιχο ΠΣΤ να έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε συνάρτηση F, και να βρεθεί η συνάρτηση Green.

13. $y'' = F(x), \quad \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \quad \rho y(1) + \delta y'(1) = 0$

14. $y'' + y = F(x), \quad \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \quad \rho y(\pi) + \delta y'(\pi) = 0$

15. $y'' - 2y' + 2y = F(x), \quad \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \quad \rho y(\pi/2) + \delta y'(\pi/2) = 0$

Στις Ασκήσεις 16-22 να γράψετε την ΔΕ σε Sturm-Liouville μορφή (με $\lambda = 0$). Υποθέτουμε ότι b, c, α, και ν είναι σταθερές.

16. $y'' + by' + cy = 0$

17. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ (ΔΕ Bessel)

18. $(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$ (ΔΕ Chebyshev)

19. $x^2 y'' + bxy' + cy = 0$ (ΔΕ Euler)

20. $y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$ (ΔΕ Hermite)

21. $xy'' + (1 - x)y' + \alpha y = 0$ (ΔΕ Laguerre)

22. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$ (ΔΕ Legendre)

23. Να λυθεί το Sturm-Liouville πρόβλημα

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) + \delta y'(L) = 0.$$

24. Να λυθεί το Sturm-Liouville πρόβλημα

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) + \alpha y'(0) = 0, \quad y(\pi) + \alpha y'(\pi) = 0,$$

όπου $\alpha \neq 0$.

25. Να λυθεί το Sturm-Liouville πρόβλημα

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) + \alpha y'(0) = 0, \quad y(1) + (\alpha - 1)y'(1) = 0, \tag{A}$$

όπου $0 < \alpha < 1$.

Στις Ασκήσεις 26-30 να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις των ΠΣΤ.

26. $y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0.$

27. $y''2y' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < L, \quad y'(0) = y'(L) = 0.$

28. $(xy')' + \lambda x^{-1} y = 0, \quad 1 < x < b, \quad y'(1) = 0, y(b) = 0$

29. $y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1 \quad y(0) = 0, y'(1) = 0$

30. $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$

31. Να βρεθούν οι γενικευμένες σειρές Fourier των ακόλουθων συναρτήσεων ως προς τα αντίστοιχα Sturm-Liouville προβλήματα:

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0.$$

$$f(x) = x, \quad 1 \le x \le b, \quad (xy')' + \lambda x^{-1} y = 0, \quad y(1) = y(b) = 0.$$

$$f(x) = 1, \quad 0 \le x \le a, \quad (\mathrm{e}^x y')' + \lambda \mathrm{e}^x y = 0, \quad y(0) = y(a) = 0.$$

$$f(x) = 1 + x, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad y'' + 4\lambda y = 0, \quad y(-\pi) = y(\pi), y'(-\pi) = y'(\pi).$$

$$f(x) = 1, \quad 0 \le x \le 1, \quad y'' - 3y' + 2\lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = 0.$$

$$f(x) = x^2, \quad 0 < x < L \quad , y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(L) = 0.$$

Βιβλιογραφία

Ν. Αλικάκος, & Γ.Η.Καλογερόπουλος,2003. *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα.
Π. Σιαφαρίκας, 2002 *Εφαρμογές των Σ.Δ.Ε., Τόμος Ι,* Πάτρα.
Ν. Σταυρακάκης, 2011 *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις: γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή*, Παπασωτηρίου, Αθήνα.
W.E Boyce, & R.C. DiPrima, 2001 *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th edn. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
Β. Μ. Ρόθος, Χ. Α. Σφυράκης, 2011 *Λογισμός μιας Μεταβλητής* Εκδόσεις Αφοι Βλάσσοι, Αθήνα.
L. Brand,1984 *Μαθηματική Ανάλυση*, Ε.Μ.Ε.
J.W. Brawn & d R. Churchill 1993. *Fourier Series and Boundary Value Problems* (5th edition), MvGraw-Hill Int. Ed. NY.
H. B. Keller (1992). *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*. NewYork: Dover.
J. E. Marsden & M. J. Hoffman, 1993 *Elementary Classical Analysis*, 2nd Ed., W. H. Freeman, New York.
B. Rai & D. P. Choudhury, 2005 *Ordinary Differential Equations, An introduction*, Alpha Science, International Ltd.
W. F. Trenc, 2013 *Elementary Differential Equations*, Books and Monographs, Trinity University.
P. Waltman, 1986, *A second Couse in Elementary Differential Equations*, Academic Press, Inc. NY.