Κεφάλαιο 7

Μετασχηματισμός **Laplace** με εφαρμογές στις διαφορικές εξισώσεις

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ολοκληρωτικός μετασχηματισμός, ο οποίος εισάγεται με τη βοήθεια συγκεκριμένου γενικευμένου ολοκληρώματος και εφαρμόζεται εδώ για τη λύση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Η τεχνική που βασίζεται στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων με το μετασχηματισμό Laplace είναι μία αποδοτική εναλλακτική στις μεθόδους μεταβολής των παραμέτρων και προσδιοριστέων συντελεστών που αναλύθηκαν στα Κεφάλαια 4 και 5. Επιπλέον, είναι ειδικότερα πλεονεκτική για μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις στων οποίων τα δεύτερα μέλη συμμετέχουν συναρτήσεις που είναι τμηματικά συνεχείς ή/και περιοδικές.

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά εισάγεται η έννοια του μετασχηματισμού Laplace, εξετάζονται οι βασικές ιδιότητές του και ορίζεται ο αντίστροφός του και καταγράφονται οι βασικές ιδιότητες αυτού. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, διατυπώνονται στοιχειώδεις τεχνικές για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές και συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Τέλος, εξετάζεται η βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace της συνέλιξης δύο συναρτήσεων, η οποία χρησιμοποιείται σε τεχνικές επίλυσης ολοκληρωτικών και ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων που εμφανίζονται ευρέως στις θετικές επιστήμες και στις επιστήμες μηχανικών.

7.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Βασική έννοια για τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace είναι εκείνη του γενικευμένου ολοκληρώματος, την οποία υπενθυμίζουμε συνοπτικά και επεξεργαζόμαστε ορισμένα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα υπολογισμού γενικευμένων ολοκληρωμάτων, τα οποία χρησιμοποιούμε στα επόμενα.

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος (κατά Riemann) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ αναφέρεται σε φραγμένες συναρτήσεις f με πεδίο ορισμού ένα κλειστό (και φραγμένο) διάστημα $[a,b]$ του $\mathbb{R}$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Εξάλλου, η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος επεκτείνεται με εφαρμογή μιας συγκεκριμένης οριακής διαδικασίας σε μία ευρεία κλάση συναρτήσεων, οι οποίες ορίζονται σε τυχόν διάστημα I του $\mathbb{R}$ και δεν είναι κατά ανάγκη φραγμένες, αλλά είναι τοπικά ολοκληρώσιμες.

Ορισμός 7.1.1

Μία συνάρτηση $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, όπου I τυχόν διάστημα, ονομάζεται *τοπικά ολοκληρώσιμη* στο I όταν, για κάθε $v, w \in I$ με $v \le w$, η συνάρτηση $f : [v,w] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[v,w]$ (δηλαδή υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\int_v^w f(x)\mathrm{d}x$).

□

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα, το οποίο χρησιμοποιείται για τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, αναφέρεται σε συναρτήσεις με πεδίο ορισμού άπειρο διάστημα.

Ορισμός 7.1.2

Έστω $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο διάστημα I, όπου I είναι ένα από τα διαστήματα $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ και $(-\infty,+\infty)$ με $a,b\in\mathbb{R}$. Τότε, ορίζουμε

1. Ως γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ της συνάρτησης $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ ορίζεται το όριο
$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x,$$
υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το αναφερόμενο όριο.

2. Ως γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ της συνάρτησης $f : (-\infty,b] \to \mathbb{R}$ ορίζεται το όριο
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x,$$
υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το αναφερόμενο όριο.

3. Ως γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ της συνάρτησης $f : (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$ ορίζεται το άθροισμα
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ για το οποίο ορίζονται στο $\mathbb{R}$ τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα, οπότε σε αυτή την περίπτωση το $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του c.

Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις 1 έως 3 λέμε ότι υπάρχει ή συγκλίνει το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα. Όταν κάποιο από τα όρια αυτά δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$, τότε θα λέμε ότι το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει ή δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

□

Στη συνέχεια, επεξεργαζόμαστε ορισμένα χρηστικά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα υπολογισμών γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 7.1.1 Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}\mathrm{d}x, \ \ s \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Από την περίπτωση 1 του Ορισμού 7.1.2, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-sx}\mathrm{d}x &= \lim_{u\to+\infty}\int_0^{u} e^{-sx}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{u\to+\infty}\begin{cases} \left[-\frac{e^{-sx}}{s}\right]_0^u, & s\neq 0 \\ [x]_0^u, & s=0 \end{cases} \\
&= \lim_{u\to+\infty}\begin{cases} \frac{1}{s}(1-e^{-su}), & s\neq 0 \\ u, & s=0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{s}, & s>0 \\ +\infty, & s\leq 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 7.1.2 Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} x^{\alpha}\mathrm{d}x, \ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Υπολογίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα ως εξής

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} x^\alpha \mathrm{d}x &= \lim_{u\to+\infty}\int_1^u x^\alpha \mathrm{d}x \\
&= \lim_{u\to+\infty}\begin{cases} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^u, & \alpha\neq -1 \\ [\ln x]_1^u, & \alpha=-1 \end{cases} \\
&= \lim_{u\to+\infty}\begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}(u^{\alpha+1}-1), & \alpha\neq -1 \\ \ln u, & \alpha=-1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} +\infty, & \alpha\geq -1 \\ -\frac{1}{\alpha+1}, & \alpha<-1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 7.1.3 Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}.$$

Λύση. Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} &= \lim_{u\to+\infty}\int_0^u\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \\
&= \lim_{u\to+\infty}[\arctan x]_0^u \\
&= \lim_{u\to+\infty}(\arctan u-\arctan 0) \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

△

Απλοί συνδυασμοί του ορισμού του γενικευμένου ολοκληρώματος με γενικές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος (κατά Riemann) και των ορίων συναρτήσεων, επιβεβαιώνουν τις βασικές ιδιότητες των γενικευμένων ολοκληρωμάτων, οι οποίες είναι πολύ χρηστικές και εφαρμόζονται ευρέως, και ενοποιούνται στο ακόλουθο

Θεώρημα 7.1.1 Έστω $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, ισχύουν (α) (θετικότητα) Αν υπάρχει το γ.ο. $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ και ισχύει $f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a, +\infty)$, τότε $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

(β) (γραμμικότητα) Αν υπάρχουν τα γ.ο. $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ και $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ τότε υπάρχει επίσης και το γ.ο. $\int_a^{+\infty}(f(x) + g(x))\mathrm{d}x$ και ισχύει

$$\int_a^{+\infty}(f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x.$$

(γ) (μονοτονία) Αν υπάρχουν τα γ.ο. $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ και $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ και ισχύει

$$f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [a, +\infty),$$

τότε

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x.$$

(δ) (κριτήριο σύγκρισης) Αν $0 \leq f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [a, +\infty)$, τότε

(1) αν υπάρχει το γ.ο. $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$, τότε υπάρχει και το $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, και ισχύει

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) αν $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = +\infty$, τότε $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = +\infty$.

(ε) Το γ.ο. $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ υπάρχει τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει το γ.ο. $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ για κάποιο $c > a$, στην προκειμένη περίπτωση ισχύει

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

(στ) (απόλυτη σύγκλιση) Αν υπάρχει το γ.ο. $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$, τότε υπάρχει επίσης και το γ.ο. $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ και ισχύει

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Εξάλλου, δεν ισχύει ο αντίστροφος ισχυρισμός.

Απόδειξη. Ενδεικτικά, αποδεικνύουμε τις ιδιότητες (ε) και (στ).

Για την απόδειξη της (ε), υποθέτουμε ότι υπάρχει το γ.ο. $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ για κάποιο $c > a$ και, για τυχόν $u > c$, υπολογίζουμε

$$\int_a^u f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^u f(x)\mathrm{d}x,$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{u\to+\infty}\int_c^u f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Για την (στ), αρχικά παρατηρούμε ότι ισχύει

$$0 \le f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)|,\ \ \forall x \in [a, +\infty).$$

Έτσι, από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι υπάρχει το γ.ο. $\int_a^{+\infty}(f(x)+|f(x)|)\mathrm{d}x$ και επειδή ισχύει

$$f(x) = (f(x) + |f(x)|) - |f(x)|,\ \ \forall x \in [a, +\infty),$$

από τη γραμμικότητα του γ.ο. έπεται ότι υπάρχει το γ.ο. $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Περαιτέρω, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\right| = \lim_{u\to+\infty}\left|\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\le \lim_{u\to+\infty}\int_a^u |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

□

Κλείνουμε την παράγραφο, υπενθυμίζοντας από τον Απειροστικό Λογισμό τον ακόλουθο ορισμό της τμηματικά συνεχούς συνάρτησης.

Ορισμός 7.1.3

Μία συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ονομάζεται *τμηματικά συνεχής* (στο $[a, b]$) όταν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι (το πολύ) πεπερασμένο και σε κάθε σημείο ασυνέχειας της f υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα πλευρικά όρια της f, που σημαίνει ότι υπάρχει μία διαμέριση

$$[a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b]$$

του $[a, b]$ έτσι ώστε η συνάρτηση $f : (x_k, x_{k+1}) \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχής και να υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα πλευρικά όρια

$$\lim_{x \to x_k^+} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_k^-} f(x), \ \forall\, k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Εξάλλου, μία συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I τυχόν διάστημα, ονομάζεται *τοπικά τμηματικά συνεχής* στο I, όταν για κάθε $a, b \in I$ με $a \leq b$ η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$.

□

Η κλάση των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ περιέχει ασφαλώς την κλάση των τμηματικά συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$ και κατά συνέπεια η κλάση των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων σε ένα τυχόν διάστημα I περιέχει επίσης την κλάση των τοπικά τμηματικά συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα I.

Όπως θα εξηγήσουμε στην επόμενη παράγραφο, για μία περιεκτική κλάση τοπικά τμηματικά συνεχών συναρτήσεων σε ένα διάστημα $[0, +\infty)$, εκείνη των συναρτήσεων εκθετικής τάξης, ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace.

7.2 Ορισμός του μετασχηματισμού Laplace

Ορισμός 7.2.1 Έστω $f = f(t) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ως *μετασχηματισμός Laplace* ορίζεται η πραγματική συνάρτηση

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} \, \mathrm{d}t \tag{7.2.1}$$

με πεδίο ορισμού το σύνολο

$$DL(f) = \left\{ s \in \mathbb{R} : \text{υπάρχει (στο } \mathbb{R}) \text{ το γ.ο. } \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} \, \mathrm{d}t \right\}.$$

Η συνάρτηση $\mathcal{L}\{f\}$ συμβολίζεται επίσης με F, ενώ στην πράξη, αντί για $\mathcal{L}\{f\}$ και F, γράφουμε συνήθως $\mathcal{L}\{f(t)\}$ και $F(s)$ αντιστοίχως, όπου εμφανίζονται και οι μεταβλητές t και s των συναρτήσεων f και F, και επομένως η (7.2.1) εμφανίζεται στη βιβλιογραφία ως

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} \, \mathrm{d}t. \tag{7.2.2}$$

□

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε με χρήση του τελευταίου ορισμού το μετασχηματισμό Laplace ορισμένων στοιχειωδών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 7.2.1 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = 1, \;\; t \in [0, +\infty).$$

Λύση. Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t &= \lim_{u \to +\infty} \int_0^u e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{u \to +\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^u \\
&= \lim_{u \to +\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-su} + \frac{1}{s} \right) \\
&= \frac{1}{s}, \; s > 0,
\end{aligned}$$

και άρα

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \;\; s > 0.$$

△

Παράδειγμα 7.2.2 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = t, \;\; t \in [0, +\infty).$$

Λύση. Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} te^{-st}\,\mathrm{d}t &= \lim_{u\to+\infty}\int_0^u te^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{u\to+\infty}\int_0^u t\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)'\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{s}\lim_{u\to+\infty}\left(\left[te^{-st}\right]_0^u - \int_0^u e^{-st}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{1}{s}\left(\lim_{u\to+\infty}(u\,e^{-su}) - \lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-st}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{1}{s}\left(\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u}{e^{su}}\right) - \int_0^{+\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{1}{s}\left(\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{s\,e^{su}}\right) - \frac{1}{s}\right),\ s>0 \\
&= \frac{1}{s^2},\ s>0,
\end{aligned}$$

όπου στα τελευταία βήματα χρησιμοποιήθηκαν ο κανόνας L'Hôpital καθώς και το αποτέλεσμα του τελευταίου παραδείγματος. Άρα, τελικά λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2},\quad s>0.$$

△

Παράδειγμα 7.2.3 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = t^n,\ \ t\in[0,+\infty),\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Λύση. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{+\infty} t^n e^{-st}\,\mathrm{d}t &= \lim_{u\to+\infty}\int_0^u t^n e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{u\to+\infty}\int_0^u t^n \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)'\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{s}\lim_{u\to+\infty}\left(\left[t^n e^{-st}\right]_0^u - \int_0^u n t^{n-1}e^{-st}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{1}{s}\left(\lim_{u\to+\infty}(u^n\,e^{-su}) - n\lim_{u\to+\infty}\int_0^u t^{n-1}e^{-st}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{1}{s}\left(\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u^n}{e^{su}}\right) - n\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-st}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\},\ \ s>0,
\end{aligned}$$

όπου στα τελευταία βήματα χρησιμοποιήθηκε n φορές ο κανόνας L'Hôpital.

Εφαρμόζοντας τώρα διαδοχικά την τελευταία, έχουμε

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n(n-1)}{s^2}\mathcal{L}\{t^{n-2}\} = \ldots = \frac{n!}{s^n}\mathcal{L}\{1\} = \frac{n!}{s^{n+1}},\ \ s>0.$$

Σημειώνουμε ότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει και για $n=0$, δηλαδή δίνει και το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης 1.

△

Παράδειγμα 7.2.4 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = e^{at},\ t\in[0,+\infty).$$

Λύση. Έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}\,\mathrm{d}t &= \lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{(a-s)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{u\to+\infty}\left[\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right]_0^u \\
&= \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{a-s}e^{(a-s)u} - \frac{1}{a-s}\right) \\
&= \frac{1}{s-a},\quad s>a,
\end{aligned}$$

και άρα

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \;\; s > a.$$

△

Παράδειγμα 7.2.5 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων

$$f(t) = \sin t, \;\; t \in [0, +\infty)$$

και

$$g(t) = \cos t, \;\; t \in [0, +\infty).$$

Λύση. Χρησιμοποιούμε το μιγαδικό ορισμό του ημιτόνου

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \sin t \, e^{-st} \, \mathrm{d}t &= \lim_{u \to +\infty} \int_0^u \sin t \, e^{-st} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i} \lim_{u \to +\infty} \left(\int_0^u e^{it} e^{-st} \mathrm{d}t - \int_0^u e^{-it} e^{-st} \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{2i} \lim_{u \to +\infty} \left(\int_0^u e^{(i-s)t} \mathrm{d}t - \int_0^u e^{-(i+s)t} \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{2i} \lim_{u \to +\infty} \left(\left[\frac{1}{i-s} e^{(i-s)t} \right]_0^u - \left[\frac{1}{-(i+s)} e^{-(i+s)t} \right]_0^u \right) \\
&= \frac{1}{2i} \lim_{u \to +\infty} \left(\frac{1}{i-s} \left[e^{(i-s)u} - 1 \right] + \frac{1}{i+s} \left[e^{-(i+s)u} - 1 \right] \right) \\
&= -\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{i-s} + \frac{1}{i+s} \right) \\
&= \frac{1}{s^2+1}, \quad s > 0,
\end{aligned}$$

και άρα

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}, \;\; s > 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το μιγαδικό ορισμό του συνημιτόνου

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2},$$

και εκτελώντας παρόμοιους υπολογισμούς, ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}, \;\; s > 0.$$

$\triangle$

7.3 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Αρχικά, αποδεικνύουμε ένα θέωρημα ύπαρξης του μετασχηματισμού Laplace για μία περιεκτική κλάση τοπικά ολοκληρωσίμων συναρτήσεων.

Ορισμός 7.3.1 Μία συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ονομάζεται *εκθετικής τάξης* (ή *εκθετικά φραγμένη*) (για $t \to +\infty$) όταν υπάρχουν πραγματικές σταθερές $M > 0$, α και $K > 0$, έτσι ώστε να ισχύει

$$|f(t)| \leq K e^{\alpha t}, \ \ \forall\, t \geq M. \tag{7.3.1}$$

(η σταθερά α αναφέρεται και ως εκθετική τάξη της f)

$\square$

Θεώρημα 7.3.1 (Ύπαρξης μετασχηματισμού Laplace)

Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία τοπικά τμηματικά συνεχής συνάρτηση, η οποία είναι εκθετικής τάξης ($\alpha \in \mathbb{R}$). Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st}\, \mathrm{d}t, \ \ \forall\, s > \alpha.$$

Απόδειξη. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_M^{+\infty} e^{-st} f(t) \mathrm{d}t$, για κάθε $s > \alpha$. Πράγματι, από την υπόθεση ότι η f είναι εκθετικής τάξης έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_M^{+\infty} e^{-st} |f(t)| \mathrm{d}t &\leq K \int_M^{+\infty} e^{(\alpha - s)t} \mathrm{d}t \\
&= K \lim_{u \to +\infty} \int_M^{u} e^{(\alpha - s)t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{K}{\alpha - s} \lim_{u \to +\infty} \left(e^{(\alpha - s)u} - e^{(\alpha - s)M} \right) \\
&= \frac{K}{\alpha - s} \left(0 - e^{(\alpha - s)M} \right) = \frac{K}{s - \alpha} e^{-(s - \alpha)M}.
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, από την ιδιότητα (ε) του Θεωρήματος 7.1.1, υπάρχει το $\int_0^{+\infty} e^{-st} |f(t)| \mathrm{d}t$ και ισχύει

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-st} |f(t)| \mathrm{d}t &= \int_0^{M} e^{-st} |f(t)| \mathrm{d}t + \int_M^{+\infty} e^{-st} |f(t)| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{M} e^{-st} |f(t)| \mathrm{d}t + \frac{K}{s - \alpha} e^{-(s - \alpha)M}.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την ιδιότητα (στ) του Θεωρήματος 7.1.1, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$, και άρα πράγματι υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace για κάθε $s > \alpha$.

□

Συνεχίζουμε με την καταγραφή των βασικών ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace και επεξεργαζόμαστε αντιπροσωπευτικά παραδείγματα για κάθε επιμέρους ιδιότητα.

Πρόταση 7.3.1 Έστω $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με μετασχηματισμούς Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),\ s > \alpha_1$ και $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s),\ s > \alpha_2$, αντιστοίχως. Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $af(t) \pm bg(t),\ a, b \in \mathbb{R}$ και ισχύει

$$\mathcal{L}\{af(t) \pm bg(t)\} = aF(s) \pm bG(s),\ s > \max\{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

□

Παράδειγμα 7.3.1 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων

$$f(t) = \sinh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2},\ \ t \in [0, +\infty)$$

και

$$g(t) = \cosh(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2},\ \ t \in [0, +\infty).$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας την τελευταία πρόταση, ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}.$$

Επειδή

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a},\ \ s > a,$$

λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right),\ \ s > |a|,$$

και άρα

$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2 - a^2},\ \ s > |a|.$$

Με παρόμοια διαδικασία, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{\cosh(at)\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2 - a^2},\ \ s > |a|.\end{aligned}$$

△

Πρόταση 7.3.2 Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),\ s > \alpha$. Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $e^{bt}f(t)$ και ισχύει

$$\mathcal{L}\{e^{bt}f(t)\} = F(s-b),\ \ s > \alpha + b.$$

□

Παράδειγμα 7.3.2 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = e^{5t}\cos t,\ \ t \in [0, +\infty).$$

Λύση. Γνωρίζουμε ότι για τη συνάρτηση $f(t) = \cos t,\ t \in [0, +\infty)$, έχουμε $F(s) = \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1},\ s > 0$. Έτσι, από την τελευταία πρόταση, λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{e^{5t}\cos t\} = F(s-5) = \frac{s-5}{(s-5)^2+1},\ \ s > 5.$$

△

Παράδειγμα 7.3.3 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = e^{-3t}t,\ \ t \in [0, +\infty).$$

Λύση. Γνωρίζουμε ότι για τη συνάρτηση $f(t) = t,\ t \in [0, +\infty)$, έχουμε $F(s) = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2},\ s > 0$. και επομένως, ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-3t}t\} = F(s+3) = \frac{1}{(s+3)^2},\ \ s > -3.$$

△

Παράδειγμα 7.3.4 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = e^{at},\ \ t \in [0, +\infty),\ \ a \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Για τη συνάρτηση $f(t) = 1,\ t \in [0, +\infty)$, έχουμε $F(s) = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s},\ s > 0$, οπότε, έχουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s-a) = \frac{1}{s-a},\ \ s > a,$$

την οποία είχαμε ήδη βρει και νωρίτερα με χρήση του ορισμού του μετασχηματισμού.

$\triangle$

Πρόταση 7.3.3 Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),\ s > \alpha_0$. Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f(at),\ a > 0$, και ισχύει

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad s > a\alpha_0.$$

$\square$

Παράδειγμα 7.3.5 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων

$$g(t) = \cos(at),\ \ t \in [0, +\infty),\ \ a > 0$$

και

$$h(t) = \sin(at),\ \ t \in [0, +\infty),\ \ a > 0.$$

Λύση. Για τη συνάρτηση $f(t) = \cos t,\ t \in [0, +\infty)$, έχουμε ήδη υπολογίσει ότι $F(s) = \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1},\ s > 0$.

Έτσι, από την τελευταία πρόταση, ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{\cos(at)\} = \mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{\frac{s}{a}}{(\frac{s}{a})^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + a^2},\ \ s > 0.$$

Με παρόμοιους υπολογισμούς λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2},\ \ s > 0.$$

$\triangle$

Παράδειγμα 7.3.6 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = \cos^2 t,\ \ t \in [0, +\infty).$$

Λύση. Από το τελευταίο παράδειγμα και την ιδιότητα γραμμικότητας του μετασχηματισμού (Πρόταση 7.3.1), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{\cos^2 t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos(2t)\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4}\right) = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)},\ \ s > 0.
\end{aligned}$$

△

Πρόταση 7.3.4 Έστω συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),\ s > \alpha$. Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $t^n f(t),\ n \in \mathbb{N}$ και ισχύει

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad s > \alpha,\ n \in \mathbb{N}.$$

□

Παράδειγμα 7.3.7 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = t\cos(at), \quad t \in [0, +\infty).$$

Λύση. Από το Παράδειγμα 7.3.5, γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = \cos(at)$ είναι $F(s) = \mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2},\ \ s > 0$.

Έτσι, χρησιμοποιώντας την τελευταία πρόταση, ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{tf(t)\} = (-1)^1 F'(s) = -\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)' = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}, \quad s > 0.$$

△

Παράδειγμα 7.3.8 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων

$$g(t) = t\,e^{at}, \quad t \in [0, +\infty)$$

και

$$h(t) = t^2\,e^{at}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Λύση. Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = e^{at}$ είναι, σύμφωνα με το Παράδειγμα 7.3.4, $F(s) = \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a},\ \ s > a$.

Επομένως, με τη βοήθεια της τελευταίας πρότασης, λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{tf(t)\} = (-1)^1 F'(s) = -\left(\frac{1}{s-a}\right)' = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad s > a.$$

Ανάλογα, βρίσκουμε ότι

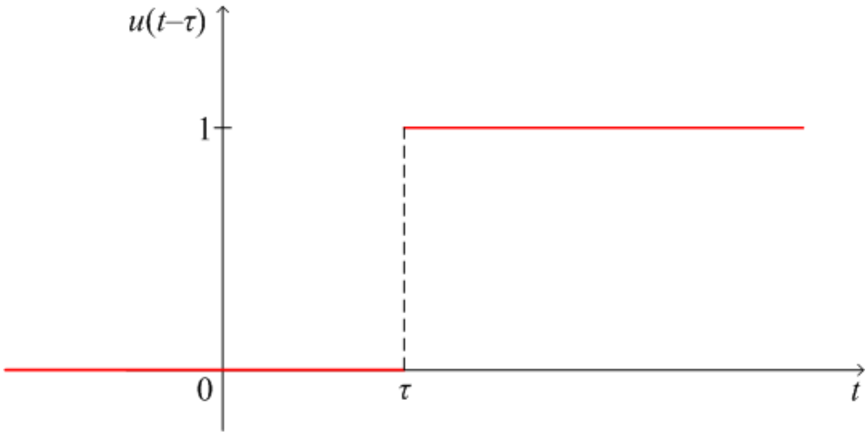
$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = (-1)^2 F''(s) = \left(\frac{1}{s-a}\right)'' = \frac{2}{(s-a)^3}, \quad s > a.$$

$\triangle$

Η συνάρτηση

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases}, \tag{7.3.2}$$

της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο Σχήμα 7.1, ονομάζεται συνάρτηση *Heaviside* ή *συνάρτηση μοναδιαίου βήματος* (*unit step function*). Με τη βοήθεια της συνάρτησης αυτής μπορούμε να λαμβάνουμε απλές και ενοποιημένες εκφράσεις συναρτήσεων, οι οποίες ορίζονται από διαφορετικούς τύπους σε διαφορετικά διαστήματα.



Σχήμα 7.1: Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

Επί παραδείγματι, η συνάρτηση (βλ. Σχήμα 7.2)

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$

γράφεται ως

$$g(t) = h(t)\sin t,$$

όπου η συνάρτηση $h(t)$ δίνεται από (βλ. Σχήμα 7.3)

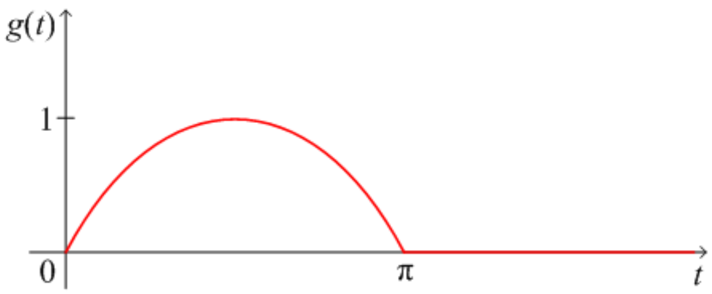
$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases},$$

η οποία μπορεί να γραφεί ως

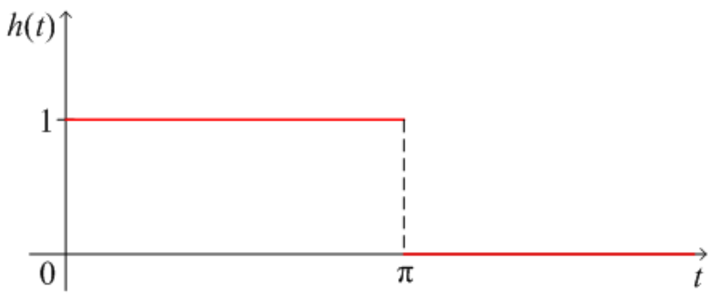
$$h(t) = u(t) - u(t-\pi),$$

και άρα τελικά προκύπτει

$$g(t) = [u(t) - u(t-\pi)]\sin t.$$



Σχήμα 7.2: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(t)$.



Σχήμα 7.3: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t)$.

Η ακόλουθη πρόταση αναδεικνύει τη σπουδαιότητα και τη χρησιμότητα της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος στο μετασχηματισμό Laplace.

Πρόταση 7.3.5 Έστω ότι η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ έχει μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $s > \alpha$. Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $u(t-\tau)f(t-\tau)$, $\tau \geq 0$ και ισχύει

$$\mathcal{L}\{u(t-\tau)f(t-\tau)\} = e^{-\tau s}F(s), \quad s > \alpha, \quad \tau \geq 0. \tag{7.3.3}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{u(t-\tau)f(t-\tau)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}u(t-\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}t = \int_\tau^{+\infty} e^{-st}f(t-\tau)\mathrm{d}t,$$

και το ζητούμενο προκύπτει κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $v = t - \tau$, διότι

$$\int_\tau^{+\infty} e^{-st}f(t-\tau)\mathrm{d}t = e^{-\tau s}\int_0^{+\infty} e^{-sv}f(v)\mathrm{d}v = e^{-\tau s}F(s).$$

□

Παράδειγμα 7.3.9 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος

$$g(t) = u(t-\tau), \quad t \in [0, +\infty), \quad \tau > 0.$$

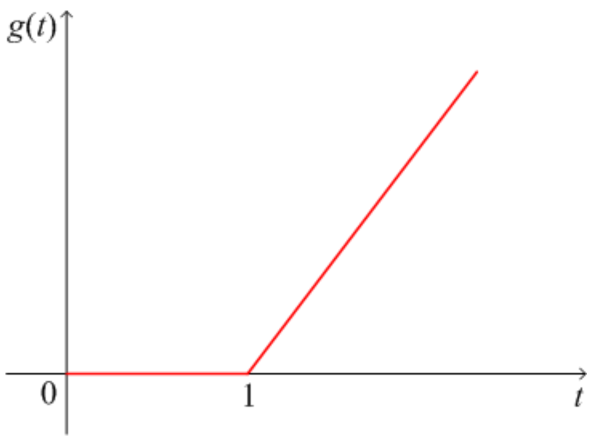
Λύση. Εφαρμόζοντας την (7.3.3) για τη συνάρτηση $f(t) = 1$, η οποία έχει μετασχηματισμό Laplace $F(s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$ (βλ. Παράδειγμα 7.2.1), ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{u(t-\tau)\} = \frac{e^{-\tau s}}{s}, \;\; s > 0.$$

△

Παράδειγμα 7.3.10 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης (βλ. Σχήμα 7.4)

$$g(t) = \begin{cases} t-1, & t \geq 1 \\ 0, & 0 \leq t < 1 \end{cases}.$$



Σχήμα 7.4: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(t)$ του Παραδείγματος 7.3.10.

Λύση. Η συνάρτηση g γράφεται, με τη βοήθεια της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος, ως εξής

$$g(t) = u(t-1)(t-1), \;\; t \in [0, +\infty).$$

Έτσι, εφαρμόζουμε την (7.3.3) για τη συνάρτηση $f(t) = t$, η οποία (σύμφωνα με το Παράδειγμα 7.2.2) έχει μετασχηματισμό Laplace $F(s) = \frac{1}{s^2}$, $s > 0$, και ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{u(t-1)(t-1)\} = \frac{e^{-s}}{s^2}, \;\; s > 0.$$

△

Παράδειγμα 7.3.11 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης (βλ. Σχήμα 7.2)

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t < \pi \\ \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}.$$

Λύση. Όπως αναλύθηκε παραπάνω, η συνάρτηση g γράφεται ως

$$g(t) = [u(t) - u(t-\pi)] \sin t = u(t) \sin t - u(t-\pi) \sin t, \;\; t \in [0, +\infty).$$

Επομένως, για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την (7.3.3), πρέπει να εκφράσουμε την $\sin t$ στο δεύτερο προσθετέο ως συνάρτηση του $t - \pi$. Αυτό μπορεί να γίνει με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\sin t = -\sin(t - \pi),$$

και άρα έχουμε ότι

$$g(t) = u(t) \sin t + u(t-\pi) \sin(t-\pi), \;\; t \in [0, +\infty),$$

οπότε εφαρμόζοντας την (7.3.3) για τη συνάρτηση $f(t) = \sin t$, η οποία (σύμφωνα με το Παράδειγμα 7.2.5) έχει μετασχηματισμό Laplace $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$, $s > 0$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \mathcal{L}\{u(t) \sin t\} + \mathcal{L}\{u(t-\pi) \sin(t-\pi)\} \\ &= \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} = \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}, \;\; s > 0. \end{aligned}$$

△

Στην ακόλουθη πρόταση δίνεται η θεμελιώδης ιδιότητα για το μετασχηματισμό Laplace των παραγώγων συνάρτησης, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο σε μεθοδολογίες επίλυσης Δ.Ε. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace, όπως θα αναλυθεί στη συνέχεια.

Πρόταση 7.3.6 Έστω ότι η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ έχει μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $s > \alpha$, και είναι n φορές παραγωγίσιμη με $f^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, να είναι συναρτήσεις εκθετικής τάξης. Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f^{(n)}(t)$ και ισχύει

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \;\; s > \alpha, \;\; n \in \mathbb{N}. \quad (7.3.4)$$

□

Από την (7.3.4) λαμβάνουμε για $n = 1, 2$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \tag{7.3.5}$$

και

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \tag{7.3.6}$$

Έτσι, οι μετασχηματισμοί Laplace των παραγώγων μιας συνάρτησης είναι *αλγεβρικές* έκφρασεις των μετασχηματισμών Laplace. Αυτή η βασική ιδιότητα καθιστά δυνατή τη μετατροπή, μέσω του μετασχηματισμού Laplace, μιας Δ.Ε. σε αλγεβρική εξίσωση.

Παράδειγμα 7.3.12 Βρείτε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $y(t)$, η οποία ικανοποιεί το Π.Α.Τ.

$$y'(t) + 2y(t) = e^{-3t},\ y(0) = 1.$$

Λύση. Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace και των δύο μελών της Δ.Ε., και χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα γραμμικότητας του μετασχηματισμού, ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + 2\,\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-3t}\}.$$

Από την (7.3.5), έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = s\mathrm{Y}(s) - y(0),$$

όπου $\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathrm{Y}(s)$. Επιπλέον, σύμφωνα με το Παράδειγμα 7.3.4, ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3},\ s > -3.$$

Έτσι, συνδυάζοντας όλες τις προηγούμενες, λαμβάνουμε

$$s\mathrm{Y}(s) - y(0) + 2\mathrm{Y}(s) = \frac{1}{s+3},\ \ s > -3,$$

από όπου, με την ενσωμάτωση της δοσμένης αρχικής συνθήκης, έχουμε

$$(s+2)\mathrm{Y}(s) = \frac{1}{s+3} + 1,\ \ s > -3,$$

και τελικά

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)},\ \ s > -3,\ s \neq -2.$$

$\triangle$

Παράδειγμα 7.3.13 Βρείτε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $y(t)$, η οποία ικανοποιεί το Π.Α.Τ.

$$y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 1,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Λύση. Με ανάλογη διαδικασία, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + 2\mathcal{L}\{y'(t)\} - 3\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{1\},$$

από όπου, με εφαρμογή των (7.3.5) και (7.3.6) και χρήση του Παραδείγματος 7.2.1, λαμβάνουμε

$$s^2\mathrm{Y}(s) - sy(0) - y'(0) + 2(s\mathrm{Y}(s) - y(0)) - 3\mathrm{Y}(s) = \frac{1}{s},\ \ s > 0$$

και με την ενσωμάτωση των δοσμένων αρχικών συνθηκών, έχουμε

$$(s^2 + 2s - 3)\mathrm{Y}(s) = \frac{1+s}{s},\ \ s > 0,$$

και άρα

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s+3)},\ \ s > 0,\ s \neq 1.$$

△

Στην ακόλουθη πρόταση δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace μιας περιοδικής συνάρτησης.

Πρόταση 7.3.7 *Έστω ότι η T-περιοδική συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ έχει μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.*

Τότε, ισχύει

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\mathrm{d}t,\ \ s > 0. \tag{7.3.7}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t)\mathrm{d}t + \int_T^{2T} e^{-st} f(t)\mathrm{d}t + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)\mathrm{d}t + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Στην τελευταία κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $\tau = t - nT$, και λαμβάνουμε

$$F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^T e^{-s(\tau+nT)} f(\tau + nT) \mathrm{d}\tau,$$

και επειδή η συνάρτηση f είναι T-περιοδική, προκύπτει

$$F(s) = \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) \mathrm{d}\tau \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nsT}.$$

Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nsT}$ είναι γεωμετρική με λόγο $0 < e^{-sT} < 1$ (εφόσον $sT > 0$), επομένως ισχύει ότι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nsT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}},$$

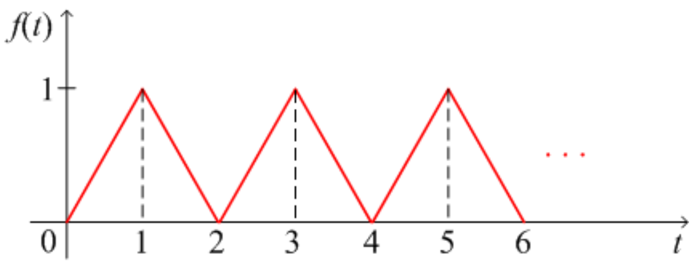
και άρα το ζητούμενο έπεται συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις.

□

Παρατήρηση 7.3.1 Από την (7.3.7) φαίνεται ότι για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace μιας περιοδικής συνάρτησης $f(t)$, χρειάζεται να υπολογίσουμε μόνο το μετασχηματισμό της συνάρτησης που είναι ίση με την $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο και είναι ίση με μηδέν παντού αλλού. Αυτό οφείλεται στο ότι μια περιοδική συνάρτηση καθορίζεται πλήρως από τον περιορισμό της στο διάστημα της θεμελιώδους περιόδου.

△

Παράδειγμα 7.3.14 Βρείτε το μετασχηματισμό Laplace του *τριγωνικού κύματος* $f(t)$, το οποίο απεικονίζεται στο Σχήμα 7.5.

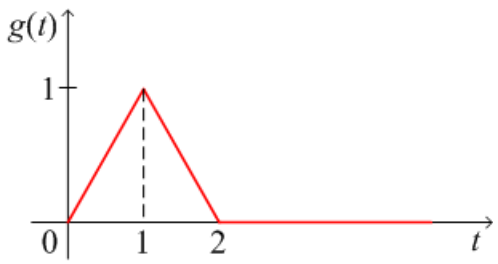


Σχήμα 7.5: Γραφική παράσταση του τριγωνικού κύματος $f(t)$ του Παραδείγματος 7.3.14.

Λύση. Αρχικά, υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ -t+2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases},$$

η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 7.6 και η οποία είναι ίση με τη συνάρτηση $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο $(0 \leq t \leq 2)$ και ίση με μηδέν παντού αλλού.



Σχήμα 7.6: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(t)$ της λύσης του Παραδείγματος 7.3.14.

Η συνάρτηση $g(t)$ γράφεται, με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης, ως εξής

$$g(t) = [u(t) - u(t-1)]t + [u(t-1) - u(t-2)](-t+2),$$

όπου ο πρώτος όρος $[u(t)-u(t-1)]t$ παριστάνει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$, ενώ ο δεύτερος όρος $[u(t-1)-u(t-2)](-t+2)$ το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(1,1)$ και $(2,0)$.

Λαμβάνοντας τώρα το μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.5, ευρίσκουμε

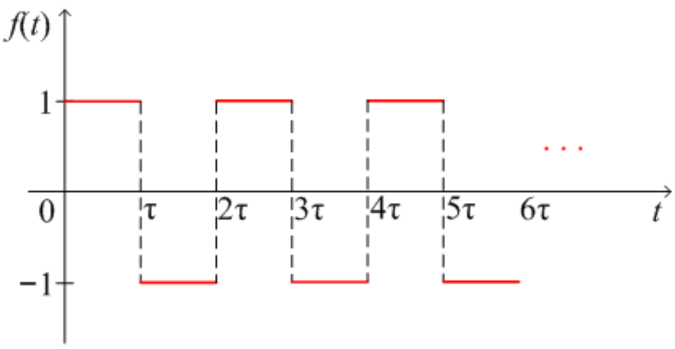
$$G(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}.$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.7, τελικά λαμβάνουμε

$$F(s) = \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2(1-e^{-2s})} = \frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})}, \quad s > 0.$$

△

Παράδειγμα 7.3.15 Βρείτε το μετασχηματισμό Laplace του *τετραγωνικού κύματος* $f(t)$, το οποίο απεικονίζεται στο Σχήμα 7.7.

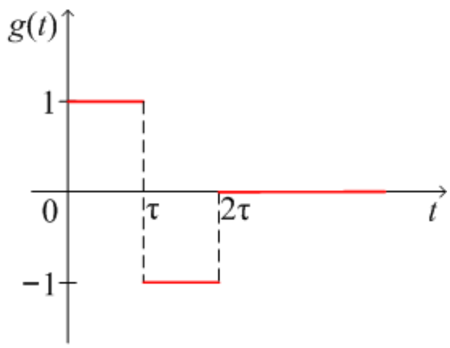


Σχήμα 7.7: Γραφική παράσταση του τετραγωνικού κύματος $f(t)$ του Παραδείγματος 7.3.15.

Λύση. Αρχικά, υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \tau \\ -1, & \tau \leq t < 2\tau \\ 0, & t \geq 2\tau \end{cases},$$

η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 7.8 και η οποία είναι ίση με τη συνάρτηση $f(t)$ στη θεμελιώδη περίοδο $(0 \leq t \leq 2\tau)$ και ίση με μηδέν παντού αλλού.



Σχήμα 7.8: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(t)$ της λύσης του Παραδείγματος 7.3.15.

Η συνάρτηση $g(t)$ γράφεται, με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης, ως εξής

$$\begin{aligned} g(t) &= [u(t) - u(t-\tau)] - [u(t-\tau) - u(t-2\tau)] \\ &= u(t) - 2u(t-\tau) + u(t-2\tau), \end{aligned}$$

όπου ο πρώτος όρος $u(t) - u(t-\tau)$ έχει τιμή 1 μόνο όταν $0 \leq t < \tau$ και μηδέν παντού αλλού και ο δεύτερος όρος $-[u(t-\tau) - u(t-2\tau)]$ έχει τιμή -1 όταν $\tau \leq t < 2\tau$ και μηδέν παντού αλλού.

Λαμβάνοντας τώρα το μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.5, ευρίσκουμε

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-\tau s}}{s} + \frac{e^{-2\tau s}}{s} = \frac{(1-e^{-\tau s})^2}{s}.$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.7, και επειδή το τετραγωνικό κύμα είναι 2τ-περιοδική συνάρτηση, τελικά έχουμε

$$F(s) = \frac{(1-e^{-\tau s})^2}{s(1-e^{-2\tau s})} = \frac{1-e^{-\tau s}}{s(1+e^{-\tau s})}, \quad s > 0.$$

△

7.4 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Στην παράγραφο αυτή συζητούμε την αντιστρεψιμότητα του μετασχηματισμού Laplace. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιείται στην εύρεση λύσεων Π.Α.Τ., όπως περιγράφεται αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 7.4.1 Έστω μία πραγματική συνάρτηση $F = F(s) : (\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχει μία συνάρτηση $f = f(t) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε η f ονομάζεται *αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace* της F και συμβολίζεται με $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, οπότε έχουμε

$$\mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\} = F(s)$$

και

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\} = f(t).$$

□

Μία αυστηρή απόδειξη της ύπαρξης του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace προϋποθέτει προχωρημένα αποτελέσματα της θεωρίας μιγαδικής ολοκλήρωσης, τα οποία θεωρούνται εκτός του σκοπού του βιβλίου.

Το ακόλουθο σχετικό θεώρημα δίνει πληροφορίες για την ύπαρξη του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace.

Θεώρημα 7.4.1 Έστω $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τοπικά τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις, οι οποίες είναι εκθετικής τάξης, οπότε υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Laplace $F(s)$ και $G(s)$ αυτών (Θεώρημα 7.3.1). Αν ισχύει $F(s) = G(s)$ για κάθε $s > c$ (για κάποιο c) τότε $f(t) = g(t)$ σε κάθε υποδιάστημα του $[0, +\infty)$, όπου οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς.

□

Όπως συνάγεται από το θεώρημα αυτό, δύο τοπικά τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις εκθετικής τάξης στο διάστημα $[0, +\infty)$ με τον ίδιο μετασχηματισμό Laplace είναι δυνατόν να διαφέρουν μόνο στα σημεία ασυνέχειας. Έτσι, στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace στις Δ.Ε., λόγω της συνέχειας των λύσεών τους, οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί θεωρούνται μοναδικοί.

Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις συνεχών συναρτήσεων, των οποίων οι μετασχηματισμοί Laplace καταχωρούνται σε πίνακες, λόγω της μοναδικότητας του αντιστρόφου μετασχηματισμού, από τους πίνακες αυτούς προκύπτουν και οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί.

Συνεχίζουμε τώρα με την καταγραφή των βασικών χρηστικών ιδιοτήτων του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace.

Πρόταση 7.4.1 (Ιδιότητες του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace)

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace αποδεικνύονται οι ακόλουθες ιδιότητες του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

1. $\mathcal{L}^{-1}\{a\,F(s) \pm b\,G(s)\} = a\,\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \pm b\,\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$.
2. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$.
3. $\mathcal{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$.

□

Ο απευθείας υπολογισμός του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace απαιτεί σε ορισμένες περιπτώσεις προχωρημένες γνώσεις θεωρίας μιγαδικής ολοκλήρωσης (βλ. [1]). Στην πράξη, συνήθως, προσπαθούμε να φέρουμε τη συνάρτηση $F(s)$, της οποίας θέλουμε να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, σε κάποια κατάλληλη μορφή αθροίσματος στοιχειωδών συναρτήσεων (κυρίως με χρήση της *ανάλυσης σε απλά κλάσματα*, η οποία περιγράφεται στη συνέχεια μέσω παραδειγμάτων), των οποίων γνωρίζουμε τους μετασχηματισμούς Laplace. Κατά αυτή τη διαδικασία είναι, συνήθως, πολύ χρήσιμοι οι πίνακες μετασχηματισμού Laplace στοιχειωδών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 7.4.1 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2+4}.$$

Λύση.

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 1 της Πρότασης 7.4.1 και τα γνωστά αποτελέσματα για το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων $\cos(at)$ και $\sin(at)$ (βλ. Παράδειγμα 7.3.5), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2+4}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} \\ &= \cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t).\end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 7.4.2 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{1}{s^2-3s+2}.$$

Λύση. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο ανάλυσης σε απλά κλάσματα. Αρχικά, έχουμε ότι

$$\frac{1}{s^2-3s+2} = \frac{1}{(s-1)(s-2)},$$

οπότε αναζητούμε A και B τέτοια ώστε

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}$$

και άρα

$$1 = A(s-2) + B(s-1).$$

Για $s = 1$ έχουμε $1 = -A \Rightarrow A = -1$, ενώ για $s = 2$ έχουμε $B = 1$, και έτσι προκύπτει

$$F(s) = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}\,.$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.3.4, τελικά ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3s+2}\right\} &= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= -e^t + e^{2t}\,.\end{aligned}$$

△

Παρατήρηση 7.4.1 Στο προηγούμενο παράδειγμα, για να υπολογίσουμε τις τιμές των συντελεστών A και B, αντικαταστήσαμε στην έκφραση

$$(*) \qquad 1 = A(s-2) + B(s-1)$$

τις τιμές $s = 1$ και $s = 2$, οι οποίες ήταν ρίζες των παρανομαστών στην αμέσως προηγούμενη έκφραση

$$(**) \qquad \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}.$$

Αυτό είναι, πράγματι, επιτρεπτό διότι αν δύο πολυώνυμα βαθμού n είναι ίσα για περισσότερες από n αντικαταστάσεις της μεταβλητής, τότε είναι ίσα για κάθε τιμή της μεταβλητής. Η (*) ισχύει για όλες τις τιμές της s, εκτός πιθανά από τις $s = 1$ και $s = 2$ για τις οποίες οι παρανομαστές της (**) μηδενίζονται. Επομένως, η (*) ισχύει *για κάθε* τιμή της s συμπεριλαμβανομένων και των $s = 1$ και $s = 2$.

△

Παράδειγμα 7.4.3 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 6s + 9}.$$

Λύση. Επειδή

$$\frac{1}{s^2 - 6s + 9} = \frac{1}{(s-3)^2},$$

χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.3.8, ευρίσκουμε

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} = te^{3t}.$$

△

Παράδειγμα 7.4.4 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)^3}.$$

Λύση. Η δοσμένη συνάρτηση γράφεται ως εξής

$$\frac{s}{(s+1)^3} = \frac{s+1-1}{(s+1)^3} = \frac{s+1}{(s+1)^3} - \frac{1}{(s+1)^3} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3}$$

και άρα, από το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.3.8, λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\} = te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t}.$$

△

Παράδειγμα 7.4.5 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2-2s+5}.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{s+2}{s^2-2s+5} &= \frac{s+2}{(s-1)^2+4} \\ &= \frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} + \frac{3}{(s-1)^2+2^2} \\ &= \frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} + \frac{3}{2}\,\frac{2}{(s-1)^2+2^2},\end{aligned}$$

και άρα, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.2, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}L^{-1}\{F(s)\} &= L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\} + \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right\} \\ &= e^t\cos(2t) + \frac{3}{2}e^t\sin(2t)\,.\end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 7.4.6 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{2s-1}{s(s-1)(s-2)}.$$

Λύση. Η συνάρτηση $F(s)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής

$$\frac{2s-1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2},$$

οπότε

$$2s-1 = A(s-1)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s-1).$$

Για $s=0$, λαμβάνουμε $-1 = 2A \Rightarrow A = -1/2$. Για $s=1$, έχουμε $1 = -B \Rightarrow B = -1$. Για $s=2$, έχουμε $3 = 2C \Rightarrow C = 3/2$.

Επομένως, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= -\frac{1}{2} - e^t + \frac{3}{2}e^{2t}.\end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 7.4.7 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$

Λύση. Βρίσκουμε A, B και C τέτοια ώστε

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2},$$

οπότε

$$1 = A(s+1)^2 + Bs(s+1) + Cs.$$

Για $s = 0$, έχουμε $A = 1$. Για $s = -1$, έχουμε $1 = -C \Rightarrow C = -1$ και για $s = 1$, λαμβάνουμε $B = -1$.

Άρα, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}\\ &= 1 - e^{-t} - te^{-t}.\end{aligned}$$

△

7.5 Λύση προβλημάτων αρχικών τιμών με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace

Μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace είναι η χρησιμοποίησή του για την επίλυση Π.Α.Τ για Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές. Η διαδικασία επίλυσης συνοψίζεται ως εξής

1. λαμβάνουμε αρχικά το μετασχηματισμό Laplace και των δύο μελών της Δ.Ε. (οπότε το πρόβλημα ανάγεται σε μία *αλγεβρική* εξίσωση ως προς $\mathrm{Y}(s) \equiv \mathcal{L}\{y(t)\}$),

2. επιλύουμε την αλγεβρική εξίσωση ως προς $\mathrm{Y}(s)$,

3. λαμβάνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό και υπολογίζουμε την άγνωστη συνάρτηση ως $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{Y}(s)\}$.

Τονίζουμε ότι το πρώτο βήμα της παραπάνω διαδικασίας είναι κάτι περισσότερο από μία απλή μετατροπή της Δ.Ε. σε αλγεβρική εξίσωση διότι οι αρχικές συνθήκες του Π.Α.Τ. ενσωματώνονται στη μετασχηματισμένη αλγεβρική εξίσωση και έτσι δεν εμφανίζονται αυθαίρετες σταθερές στη λύση.

Ακολουθούν ενδεικτικά παραδείγματα για την εφαρμογή της διαδικασίας επίλυσης σε συγκεκριμένα Π.Α.Τ.

Παράδειγμα 7.5.1 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$2y'(t) - y(t) = e^{2t}, \; y(0) = 1.$$

Λύση. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace στη Δ.Ε., λαμβάνουμε

$$2\mathcal{L}\{y'(t)\} - \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\},$$

οπότε από τον τύπο (7.3.5) και το Παράδειγμα 7.3.4, ευρίσκουμε

$$2s\mathrm{Y}(s) - 2y(0) - \mathrm{Y}(s) = \frac{1}{s-2},$$

και μετά και την ενσωμάτωση και της αρχικής συνθήκης

$$(2s-1)\mathrm{Y}(s) = 2 + \frac{1}{s-2}$$

ή

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{2s-3}{(2s-1)(s-2)}.$$

Η $\mathrm{Y}(s)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής

$$\frac{2s-3}{(2s-1)(s-2)} = \frac{A}{2s-1} + \frac{B}{s-2},$$

οπότε

$$2s-3 = A(s-2) + B(2s-1)\,.$$

Για $s = \frac{1}{2}$, έχουμε $-2 = -\frac{3}{2}A \Rightarrow A = \frac{4}{3}$ και για $s = 2$, έχουμε $1 = 3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$.

Επομένως, τελικά προκύπτει

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{(2s-1)(s-2)}\right\} &= \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s-1}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{3}e^{2t}. \end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 7.5.2 Λύστε το Π.Α.Τ.

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = e^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

Λύση. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace στη Δ.Ε., ευρίσκουμε

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - 5\mathcal{L}\{y'(t)\} + 6\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^t\},$$

από όπου με τη βοήθεια των τύπων (7.3.5) και (7.3.6) και του Παραδείγματος 7.3.4, λαμβάνουμε

$$s^2\mathrm{Y}(s) - sy(0) - y'(0) - 5(s\mathrm{Y}(s) - y(0)) + 6\mathrm{Y}(s) = \frac{1}{s-1}$$

και μετά από την ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών

$$(s^2 - 5s + 6)\mathrm{Y}(s) = s + 1 - 5 + \frac{1}{s-1}$$

ή

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{s^2 - 5s + 5}{(s-1)(s-2)(s-3)}.$$

Στη συνέχεια, αναλύουμε την $\mathrm{Y}(s)$ σε απλά κλάσματα ως εξής

$$\frac{s^2 - 5s + 5}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3},$$

οπότε

$$s^2 - 5s + 5 = A(s-2)(s-3) + B(s-1)(s-3) + C(s-1)(s-2).$$

Για $s = 1$, έχουμε $1 = A(-1)(-2) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$. Για $s = 2$, έχουμε $-1 = -B \Rightarrow B = 1$. Για $s = 3$, έχουμε $-1 = 2C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$.

Έτσι, τελικά λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 - 5s + 5}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\ &= \frac{1}{2}e^t + e^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t}. \end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 7.5.3 Ένα σώμα μάζας m κρέμεται από (ιδανικό) ελατήριο, του οποίου το άνω άκρο είναι πακτωμένο. Το ελατήριο υποτίθεται ότι έχει μηδενική μάζα και η δύναμη επαναφοράς του είναι ανάλογη της επιμήκυνσης. Το σώμα μετακινείται κατακορύφως προς τα κάτω κατά μία αρχική απόσταση y_0 και αφήνεται ελεύθερο με αρχική ταχύτητα v_0.

1. Περιγράψτε την απομάκρυνση $y(t)$ του σώματος από τη θέση ισορροπίας του με ένα Π.Α.Τ. υπό την υπόθεση ότι στην κίνηση υπάρχει δύναμη τριβής λόγω του αέρα, η οποία είναι ανάλογη της στιγμιαίας ταχύτητας $v(t)$.
2. Λύστε το Π.Α.Τ. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

Λύση. Έστω ότι η αρχή O είναι το σημείο ισορροπίας και $y > 0$ ($y < 0$) δηλώνει μετατόπιση του σώματος προς τα κάτω (άνω). Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σώμα είναι η δύναμη επαναφοράς F του ελατηρίου, η οποία από το νόμο Hooke δίνεται από

$$F(t) = -ky(t),$$

όπου $k > 0$ η σταθερά του ελατηρίου, και η αντίσταση τριβής T λόγω του αέρα, η οποία δίνεται από

$$T(t) = -bv(t) = -by'(t).$$

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, το άθροισμα των δυνάμεων αυτών είναι ίσο με το γινόμενο της μάζας του επί την επιτάχυνση $a(t)$, επομένως ισχύει

$$F(t) + T(t) = ma(t),$$

δηλαδή η απομάκρυνση $y(t)$ πληρεί τη Δ.Ε.

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,$$

η οποία είναι γνωστή ως *θεμελιώδης εξίσωση του αποσβεννύμενου αρμονικού ταλαντωτή* (*fundamental equation of the damped harmonic oscillator*).

Άρα, το Π.Α.Τ. το οποίο περιγράφει την κίνηση του σώματος είναι

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \;\; y(0) = y_0, \;\; y'(0) = v_0. \tag{7.5.1}$$

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στη Δ.Ε., και έχουμε

$$m\mathcal{L}\{y''(t)\} + b\mathcal{L}\{y'(t)\} + k\mathcal{L}\{y(t)\} = 0,$$

από όπου με τη βοήθεια των τύπων (7.3.5) και (7.3.6), λαμβάνουμε

$$m\left(s^2\mathrm{Y}(s) - sy(0) - y'(0)\right) + b\left(s\mathrm{Y}(s) - y(0)\right) + k\mathrm{Y}(s) = 0$$

και μετά από την ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών

$$ms^2\mathrm{Y}(s) - msy_0 - mv_0 + bs\mathrm{Y}(s) - by_0 + k\mathrm{Y}(s) = 0$$

ή

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{sy_0 + \frac{b}{m}y_0 + v_0}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}},$$

η οποία γράφεται ως

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{sy_0 + \alpha}{(s+\beta)^2 + \tilde{\gamma}},$$

όπου $\alpha = \frac{b}{m}y_0 + v_0$, $\beta = \frac{b}{2m}$ και $\tilde{\gamma} = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}$.

Ο τρόπος αντιστροφής της $\mathrm{Y}(s)$ και τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης απομάκρυνσης $y(t)$, η οποία περιγράφει την κίνηση του σώματος, εξαρτώνται από το πρόσημο του συντελεστή $\tilde{\gamma}$, για το οποίο διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις.

1. $\tilde{\gamma} = \gamma^2 > 0$

Η $\mathrm{Y}(s)$ έχει, τότε, τη μορφή

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{sy_0 + \alpha}{(s+\beta)^2 + \gamma^2},$$

η οποία γράφεται ως εξής

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{y_0(s+\beta) + \alpha - \beta y_0}{(s+\beta)^2 + \gamma^2}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathrm{Y}(s) = y_0\frac{s+\beta}{(s+\beta)^2 + \gamma^2} + \frac{\alpha - \beta y_0}{(s+\beta)^2 + \gamma^2}.$$

Λαμβάνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και με τη βοήθεια της Πρότασης 7.3.2 και των αποτελεσμάτων του Παραδείγματος (7.3.5), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_0\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\beta}{(s+\beta)^2+\gamma^2}\right\} + \frac{\alpha-\beta y_0}{\gamma}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\gamma}{(s+\beta)^2+\gamma^2}\right\} \\
&= y_0\,e^{-\beta t}\cos(\gamma t) + \frac{\alpha-\beta y_0}{\gamma}e^{-\beta t}\sin(\gamma t) \\
&= e^{-\beta t}\frac{y_0\gamma\cos(\gamma t) + (\alpha-\beta y_0)\sin(\gamma t)}{\gamma}.
\end{aligned}$$

Επομένως, η λύση ταλαντώνεται διότι περιέχει ημιτονικούς και συνημιτονικούς όρους. Το πλάτος, όμως, των ταλαντώσεων φθίνει συνεχώς λόγω του παράγοντα $e^{-\beta t} = e^{-\frac{b}{2m}t}$. Το σύστημα, σε αυτή την περίπτωση, καλείται *υποαποσβεννύμενο* (*underdamped*).

2. $\tilde{\gamma} = -\gamma^2 < 0$

Η $\mathrm{Y}(s)$ έχει, τότε, τη μορφή

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{sy_0 + \alpha}{(s+\beta)^2 - \gamma^2},$$

και, ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με την περίπτωση 1, λαμβάνουμε

$$y(t) = e^{-\beta t} \frac{y_0 \gamma \cosh(\gamma t) + (\alpha - \beta y_0) \sinh(\gamma t)}{\gamma}.$$

Τώρα, η λύση δεν ταλαντώνεται διότι περιέχει μόνο εκθετικούς όρους. Το σύστημα σε αυτή την περίπτωση καλείται *υπεραποσβεννύμενο* (*overdamped*). Από φυσικής πλευράς, αυτό σημαίνει ότι η δύναμη τριβής είναι μεγάλη συγκρινόμενη με τη δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου και έτσι η μάζα μετακινείται αργά προς τη θέση ισορροπίας της.

3. $\tilde{\gamma} = 0$

Η $\mathrm{Y}(s)$ έχει τη μορφή

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{sy_0 + \alpha}{(s+\beta)^2},$$

η οποία γράφεται ως εξής

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{y_0}{s+\beta} + \frac{\alpha - \beta y_0}{(s+\beta)^2}.$$

Λαμβάνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων των Παραδειγμάτων (7.3.5) και (7.3.8), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{y_0}{s+\beta}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha - \beta y_0}{(s+\beta)^2}\right\} \\ &= y_0\, e^{-\beta t} + (\alpha - \beta y_0) t e^{-\beta t} \\ &= e^{-\beta t}\left[y_0 + (\alpha - \beta y_0) t\right]. \end{aligned}$$

Η λύση και εδώ δεν ταλαντώνεται και το σύστημα τώρα καλείται *κρίσιμα αποσβεννύμενο* (*critically damped*). Το σώμα έρχεται στη θέση ισορροπίας του στον ελάχιστο χρόνο και δεν περνάει πάνω από τη θέση αυτή.

△

Παρατήρηση 7.5.1 Όπως σε κάθε ταλαντούμενο σύστημα, οι ταλαντώσεις δεν μπορούν να διατηρηθούν για πάντα λόγω της βαθμιαία αποσβεννύμενης μηχανικής ενέργειας του συστήματος, εκτός αν το σύστημα τροφοδοτηθεί με ενέργεια εξωτερικά. Για παράδειγμα, αν εφαρμοστεί μία εξωτερική δύναμη $f(t)$, τότε το Π.Α.Τ. (7.5.2) παίρνει τη μορφή

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t), \;\; y(0) = y_0, \;\; y'(0) = v_0, \tag{7.5.2}$$

και οι λύσεις του καλούνται *εξαναγκασμένες ταλαντώσεις* (*forced oscillations*).

$\triangle$

Παρατήρηση 7.5.2 Το ηλεκτρικό ανάλογο του μηχανικού συστήματος του Παραδείγματος 7.5.3 είναι το RLC-κύκλωμα, το οποίο παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 1.2, και μοντελοποιείται από το ακόλουθο Π.Α.Τ. με άγνωστη τη συνάρτηση φορτίου $q(t)$ στους οπλισμούς του πυκνωτή

$$L\,q''(t) + R\,q'(t) + \frac{1}{C}\,q(t) = v(t), \;\; q(0) = q_0, \;\; q'(0) = i_0. \tag{7.5.3}$$

Παρατηρούμε ότι η Δ.Ε. του Π.Α.Τ. (7.5.3) ανάγεται σε Δ.Ε. της μορφής (7.5.2) για $L = m$, $R = b$ και $C = \frac{1}{k}$, και έτσι η μελέτη του ηλεκτρικού κυκλώματος είναι ανάλογη με εκείνη του μηχανικού συστήματος.

$\triangle$

Παράδειγμα 7.5.4 Ένα πηνίο με αυτεπαγωγή L και ένας πυκνωτής χωρητικότητας C συνδέονται σε σειρά με μία πηγή τάσης

$$v(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \tau \\ v_0, & t \ge \tau \end{cases}. \tag{7.5.4}$$

Βρείτε τη συνάρτηση φορτίου $q(t)$ αν $q(0) = 0$ και $i(0) = 0$.

Λύση. Η τάση v γράφεται με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης

$$v(t) = v_0\,u(t - \tau).$$

Έτσι, με βάση τα αναφερόμενα για τη μοντελοποίηση του προβλήματος στην Παράγραφο 1.2 και λαμβάνοντας υπόψη ότι εδώ η αντίσταση των στοιχείων του κυκλώματος είναι ίση με μηδέν, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση φορτίου $q(t)$ είναι λύση του Π.Α.Τ.

$$L\,q''(t) + \frac{1}{C}\,q(t) = v_0\,u(t - \tau), \;\; q(0) = 0, \;\; q'(0) = 0. \tag{7.5.5}$$

Λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Laplace της Δ.Ε. και με τη βοήθεια των τύπων (7.3.6) και (7.3.3) και χρησιμοποιώντας και τις αρχικές συνθήκες, έχουμε

$$Ls^2Q(s) + \frac{1}{C}Q(s) = v_0\frac{e^{-\tau s}}{s},$$

από την οποία προκύπτει

$$Q(s) = \frac{v_0}{L}\frac{e^{-\tau s}}{s\left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)},$$

και μετά από ανάλυση της τελευταίας σε απλά κλάσματα παίρνουμε

$$Q(s) = v_0C\left(\frac{e^{-\tau s}}{s} - \frac{se^{-\tau s}}{s^2 + \frac{1}{LC}}\right).$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.3.3) και το αποτέλεσμα του Παραδείγματος (7.3.5), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} q(t) &= v_0Cu(t-\tau)\left[1 - \cos\left(\frac{t-\tau}{\sqrt{LC}}\right)\right] \\ &= \begin{cases} 0, & 0 \le t < \tau \\ v_0C\left[1 - \cos\left(\frac{t-\tau}{\sqrt{LC}}\right)\right], & t \ge \tau \end{cases}. \end{aligned}$$

△

Παρατήρηση 7.5.3 Από το τελευταίο παράδειγμα φαίνεται καθαρά η πραγματική δύναμη του μετασχηματισμού Laplace: το ότι η συνάρτηση δευτέρου μέλους $v(t)$ δεν είναι συνεχής θα ήταν πρόβλημα για την επίλυση του Π.Α.Τ. με τις μεθόδους που έχουν αναλυθεί στα προηγούμενα κεφάλαια. Με τη γραφή όμως των συναρτήσεων μέσω της βηματικής συνάρτησης και τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace είναι εφικτή η επίλυση Π.Α.Τ. αυτής της μορφής.

△

Παράδειγμα 7.5.5 Βρείτε τη λύση του συστήματος των Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$\begin{aligned} y'(t) + x(t) &= t \\ x'(t) - y(t) &= 1 \end{aligned},$$

η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$ και $y(0) = 1$.

Λύση.

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στις Δ.Ε. και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{t\} \\ \mathcal{L}\{x'(t)\} - \mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{1\} \end{aligned},$$

από όπου χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.3.5) και τα αποτελέσματα των Παραδειγμάτων 7.2.1 και 7.2.2, έχουμε

$$\begin{aligned} s\mathrm{Y}(s) - y(0) + \mathrm{X}(s) &= \tfrac{1}{s^2} \\ s\mathrm{X}(s) - x(0) - \mathrm{Y}(s) &= \tfrac{1}{s} \end{aligned}$$

και με ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών

$$\begin{aligned} s\mathrm{Y}(s) + \mathrm{X}(s) &= \tfrac{1}{s^2} + 1 \\ s\mathrm{X}(s) - \mathrm{Y}(s) &= \tfrac{1}{s} + 1 \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} \mathrm{X}(s) &= \tfrac{1}{s^2} + \tfrac{s+1}{s^2+1} \\ \mathrm{Y}(s) &= \tfrac{s-1}{s^2+1} \end{aligned}.$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s^2}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{s+1}{s^2+1}\} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{s-1}{s^2+1}\} \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s^2}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{s}{s^2+1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s^2+1}\} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{s}{s^2+1}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s^2+1}\} \end{aligned},$$

από την οποία, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των Παραδειγμάτων (7.2.2) και (7.3.5), τελικά προκύπτει

$$\begin{aligned} x(t) &= t + \cos t + \sin t \\ y(t) &= \cos t - \sin t \end{aligned}.$$

△

Παράδειγμα 7.5.6 Βρείτε τη λύση του συστήματος των Δ.Ε. δεύτερης τάξης

$$\begin{aligned} y''(t) - 4y(t) + x(t) &= e^{-t} \\ x''(t) - x(t) + y(t) &= e^{2t} \end{aligned},$$

η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $x'(0) = -1$ και $y'(0) = 2$.

Λύση.

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στις Δ.Ε. και έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t)\} - 4\mathcal{L}\{y(t)\} + \mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{e^{-t}\} \\ \mathcal{L}\{x''(t)\} - \mathcal{L}\{x(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{e^{2t}\} \end{aligned},$$

από όπου, χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.3.6) και το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.3.4, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} s^2\mathrm{Y}(s) - sy(0) - y'(0) - 4\mathrm{Y}(s) + \mathrm{X}(s) &= \tfrac{1}{s+1} \\ s^2\mathrm{X}(s) - sx(0) - x'(0) - \mathrm{X}(s) + \mathrm{Y}(s) &= \tfrac{1}{s-2} \end{aligned}$$

και με ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών

$$\begin{aligned} (s^2 - 4)\mathrm{Y}(s) + \mathrm{X}(s) &= \tfrac{1}{s+1} + s + 2 \\ (s^2 - 1)\mathrm{X}(s) + \mathrm{Y}(s) &= \tfrac{1}{s-2} + s - 1 \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} [(s^2 - 1)(s^2 - 4) - 1]\mathrm{Y}(s) &= \tfrac{(s^2-1)(s^2-4)-1}{s-2} \\ (s^2 - 1)\mathrm{X}(s) &= \tfrac{1}{s-2} + s - 1 - \mathrm{Y}(s) \end{aligned},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}(s) &= \tfrac{1}{s-2} \\ \mathrm{X}(s) &= \tfrac{1}{s+1} \end{aligned}.$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s-2}\} \\ x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s+1}\} \end{aligned},$$

από την οποία, με τη βοήθεια του αποτελέσματος του Παραδείγματος (7.3.4), τελικά προκύπτει

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{2t} \\ x(t) &= e^{-t} \end{aligned}.$$

△

7.6 Συνέλιξη και εφαρμογές

Ορισμός 7.6.1 Έστω δύο συναρτήσεις f, $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Ονομάζουμε συνέλιξη $f * g$ των συναρτήσεων f και g τη συνάρτηση που ορίζεται από

$$(f * g)(t) \equiv \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

□

Προφανώς, ισχύει ότι

$$(g * f)(t) \equiv \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = (f * g)(t)\,.$$

Για το μετασχηματισμό Laplace της συνέλιξης δύο συναρτήσεων ισχύει το ακόλουθο βασικό

Θεώρημα 7.6.1 Έστω συναρτήσεις $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με μετασχηματισμούς Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),\ s > \alpha_1$ και $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s),\ s > \alpha_2$, αντιστοίχως. Τότε, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f * g$ και ισχύει

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)\, G(s), \quad s > \max\{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό (7.2.2) του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε

$$F(s)\, G(s) = F(s) \int_0^{+\infty} g(\tau) e^{-s\tau} \mathrm{d}\tau = \int_0^{+\infty} g(\tau) F(s) e^{-s\tau} \mathrm{d}\tau,$$

από την οποία χρησιμοποιώντας την (7.3.3), λαμβάνουμε

$$F(s)\, G(s) = \int_0^{+\infty} g(\tau) \left[\int_0^{+\infty} u(t-\tau) f(t-\tau) e^{-st} \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\tau.$$

Επειδή οι συνάρτήσεις f και g είναι τοπικά τμηματικά συνεχείς και εκθετικής τάξης, μπορούμε στην τελευταία να εναλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, οπότε προκύπτει

$$F(s)\, G(s) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} u(t-\tau) f(t-\tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau \right] e^{-st} \mathrm{d}t,$$

και επειδή η συνάρτηση $u(t-\tau) = u(-(\tau - t))$ είναι μηδέν για $\tau > t$, τελικά ευρίσκουμε

$$F(s)\, G(s) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{t} f(t-\tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau \right] e^{-st} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (f * g)(t) e^{-st} \mathrm{d}t.$$

□

Άμεσες συνέπειες του τελευταίου θεωρήματος είναι οι εξής

Πόρισμα 7.6.1

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = (f * g)(t), \quad t \geq 0.$$

□

Πόρισμα 7.6.2

$$\mathcal{L}\{(f * 1)(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s).$$

□

Παράδειγμα 7.6.1 Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}.$$

Λύση. Θεωρούμε την παρακάτω γραφή της δοθείσας συνάρτησης σε μορφή γινομένου

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+4)} = F(s)G(s) = \frac{1}{s^2+4}\,\frac{1}{s},$$

για την οποία έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin(2t) \\ g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1. \end{aligned}$$

Επομένως, από το Πόρισμα 7.6.1, λαμβάνουμε

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = (f * g)(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2\tau)\,d\tau = \frac{1}{4}(1-\cos(2t))\,.$$

△

Παράδειγμα 7.6.2 Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+a^2)^2}, \quad a \neq 0.$$

Λύση. Η συνάρτηση $H(s)$ γράφεται σε μορφή γινομένου

$$H(s) = F(s)G(s) = \frac{1}{s^2+a^2}\,\frac{1}{s^2+a^2},$$

για την οποία έχουμε ότι $f(t) = g(t)$ με

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{1}{a}\sin(at).$$

Έτσι, από το Πόρισμα 7.6.1, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = (f * f)(t) \\ &= \frac{1}{a^2}\int_0^t \sin(a\tau)\,\sin(a(t-\tau))\,d\tau \\ &= \frac{1}{2a^3}\left[\sin(at) - at\cos(at)\right]. \end{aligned}$$

△

Παράδειγμα 7.6.3 Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$H(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)},\quad a \neq \pm b,\;\; b \neq 0.$$

Λύση. Θεωρούμε την παρακάτω γραφή της δοθείσας συνάρτησης σε μορφή γινομένου

$$H(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} = F(s)G(s) = \frac{1}{s^2+b^2}\,\frac{s}{s^2+a^2},$$

για την οποία έχουμε

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+b^2}\right\} = \frac{1}{b}\sin(bt) \\ g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos(at). \end{aligned}$$

Έτσι, από το Πόρισμα 7.6.1, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = (f * g)(t) = \frac{1}{b}\int_0^t \sin(b\tau)\,\cos(a(t-\tau))\,d\tau \\ &= \frac{1}{2b}\int_0^t \left[\sin(at + (b-a)\tau)\; + \;\sin((b+a)\tau - at)\right]\,d\tau \\ &= \frac{\cos(at) - \cos(bt)}{b^2 - a^2}. \end{aligned}$$

△

Η χρήση του μετασχηματισμού Laplace της συνέλιξης συναρτήσεων βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στην επίλυση *ολοκληρωτικών εξισώσεων συνελικτικού τύπου*, οι οποίες είναι εξισώσεις της μορφής

$$y(t) = f(t) + \int_0^t k(t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{7.6.1}$$

όπου y είναι η άγνωστη συνάρτηση και f, k είναι γνωστές συναρτήσεις. Τέτοιες ολοκληρωτικές εξισώσεις μετασχηματίζονται σε αλγεβρικές χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.6.1, όπως φαίνεται στο ακόλουθο

Παράδειγμα 7.6.4 Λύστε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(t) = 4t - 3\int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

Λύση. Η ολοκληρωτική εξίσωση γράφεται ισοδύναμα, με βάση τον ορισμό της συνέλιξης συναρτήσεων, ως εξής

$$y(t) = 4t - 3\,\left(y(t) * \sin(t)\right).$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.6.1, ευρίσκουμε

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{4}{s^2} - 3\mathrm{Y}(s)\frac{1}{s^2+1},$$

οπότε

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{4(s^2+1)}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^2+4},$$

και έτσι, τελικά, με εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace, λαμβάνουμε

$$y(t) = t + \frac{3}{2}\sin(2t).$$

△

Επίσης, *ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις*, οι οποίες περιλαμβάνουν παραγώγους και ολοκληρώματα της άγνωστης συνάρτησης, μπορούν να λυθούν με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace της συνέλιξης και της παραγώγισης συναρτήσεων, όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 7.6.5 Λύστε την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + \frac{Q_0}{C} = E_0e^{-at},$$

η οποία προκύπτει όταν τάση $E_0 e^{-at}$ εφαρμοστεί στα άκρα ενός πυκνωτή C και ενός πηνίου L που είναι συνδεδεμένα σε σειρά, έχοντας υποθέσει ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ δεν υπάρχει ρεύμα ενώ ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με φορτίο Q_0. Η λύση $i(t)$ της εξίσωσης δίνει την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

Λύση. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace και χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 7.6.2, ευρίσκουμε

$$Ls\mathrm{I}(s) - Li(0) + \frac{1}{Cs}\mathrm{I}(s) + \frac{Q_0}{Cs} = \frac{E_0}{s+a},$$

από όπου ενσωματώνοντας την αρχική συνθήκη $i(0) = 0$ και λύνοντας ως προς $\mathrm{I}(s)$, προκύπτει

$$\mathrm{I}(s) = \frac{E_0}{L}\frac{s}{(s+a)\left(s^2+\frac{1}{LC}\right)} - \frac{Q_0}{LC}\frac{1}{s^2+\frac{1}{LC}}$$

ή

$$\mathrm{I}(s) = \frac{E_0}{L(a^2+\frac{1}{LC})}\left[-\frac{a}{s+a} + \frac{as}{s^2+\frac{1}{LC}} + \frac{1}{LC}\frac{1}{s^2+\frac{1}{LC}}\right] - \frac{Q_0}{LC}\frac{1}{s^2+\frac{1}{LC}}.$$

Τελικά, με εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace, λαμβάνουμε

$$i(t) = \frac{E_0}{L(a^2+\frac{1}{LC})}\left[-ae^{-at} + a\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \frac{1}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right] - \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

△

Παράδειγμα 7.6.6 Λύστε την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = e(t),$$

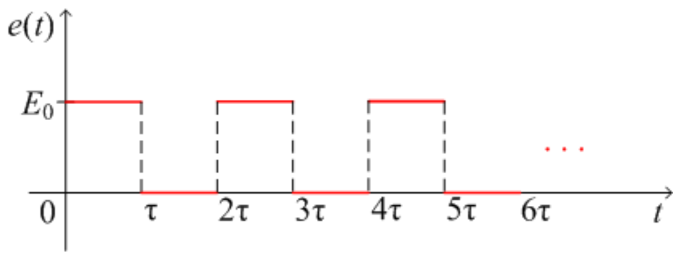
όπου $e(t)$ το τετραγωνικό κύμα που φαίνεται στο Σχήμα 7.9.

Λύση. Το τετραγωνικό κύμα γράφεται ως

$$e(t) = E_0\left[u(t) - u(t-\tau) + u(t-2\tau) - \ldots\right].$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace, χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 7.6.2, καθώς και την Πρόταση 7.3.5, λαμβάνουμε

$$R\mathrm{I}(s) + \frac{1}{Cs}\mathrm{I}(s) = E_0\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-\tau s}}{s} + \frac{e^{-2\tau s}}{s} - \ldots\right),$$



Σχήμα 7.9: Γραφική παράσταση του τετραγωνικού κύματος $e(t)$ του Παραδείγματος 7.6.6.

από όπου λύνοντας ως προς $\mathrm{I}(s)$, προκύπτει

$$\mathrm{I}(s) = \frac{E_0/R}{s+\frac{1}{RC}}\left(1 - e^{-\tau s} + e^{-2\tau s} - \dots\right),$$

οπότε, με εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace, ευρίσκουμε

$$i(t) = \frac{E_0}{R}\left[e^{-\frac{t}{RC}} - u(t-\tau)e^{-\frac{t-\tau}{RC}} + u(t-2\tau)e^{-\frac{t-2\tau}{RC}} - \dots\right].$$

△

7.7 Πίνακες μετασχηματισμών Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(s)$
$(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$
$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$u(t-\tau)f(t-\tau)$	$e^{-\tau s}F(s)$
$f(t+T) = f(t)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	
1	$\frac{1}{s}$,	$s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$,	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$,	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$,	$s > a$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$,	$s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$,	$s > 0$
$e^{bt}\sin(at)$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$,	$s > \|b\|$
$e^{bt}\cos(at)$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$,	$s > \|b\|$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$,	$s > a$
$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$,	$s > 0$
$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$,	$s > 0$
$u(t-\tau)$	$\frac{e^{-s\tau}}{s}$,	$s > 0$

7.8 Ασκήσεις

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων

Άσκηση 7.8.1 $f(t) = t^2 - t + 2$

Άσκηση 7.8.2 $f(t) = te^{3t} \cos t$

Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων

Άσκηση 7.8.3 $F(s) = \dfrac{s+2}{s^2+s+1}$

Άσκηση 7.8.4 $F(s) = \dfrac{s-3}{s^2+5s+6}$

Άσκηση 7.8.5 $F(s) = \frac{1}{s^2-2s+5}$

Λύστε τα παρακάτω Π.Α.Τ. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace

Άσκηση 7.8.6 $y' + y = \cos t,\ \ y(0) = 3$

Άσκηση 7.8.7 $y' + 3y = e^t,\ \ y(0) = -1$

Άσκηση 7.8.8 $y'' - 4y' + 5y = 2t,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$

Άσκηση 7.8.9 $y'' + y = t^2 + t,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = -1$

Άσκηση 7.8.10 $y'' + 2y' + y = (t^2-1)e^t,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$

Άσκηση 7.8.11 $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^t,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 1$

Άσκηση 7.8.12 $y'' - 2y' + 5y = t - \cos t + e^t,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$

Άσκηση 7.8.13 $y''' - y'' + y' - 1 = e^t + 2\cos t + t - 1,\ \ y'(0) = 1,\ \ y''(0) = -2$

Λύστε τα συστήματα Δ.Ε. με χρήση του μετασχηματισμού Laplace

Άσκηση 7.8.14

$$y' + 2x = e^{-t}$$
$$x' - 2y = e^{t}$$

με $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Άσκηση 7.8.15

$$2y' + x' - 3x = -e^{-2t}$$
$$2x' - 4y - 3x = 3e^{-t} - 3e^{-2t}$$

με $x(0) = 3$, $y(0) = 0$.

Άσκηση 7.8.16

$$2x - 3y' = 0$$
$$x' - 2y = t$$

με $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Άσκηση 7.8.17

$$x' - y = 0$$
$$x + y' + z = 1$$
$$x - y + z' = 2\sin t$$

με $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ $z(0) = 0$.

Άσκηση 7.8.18 Λύστε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(t) = 1 + \int_0^t \cos(t - \tau) y(\tau)\, d\tau.$$

Βιβλιογραφία

[1] P. K. Kuhfittig, *Introduction to the Laplace Transform*, Plenum Press, New York, 1978.

[2] J. Lebl, *Differential Equations for Engineers*, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2014.

[3] B. E. Shapiro, *Lecture Notes in Differential Equations*, California State University, Northridge, 2011.

[4] Λ. Ν. Τσίτσας, *Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός, 2η Έκδοση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2003.