

Εκφώνηση

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι διάφορες δραστηριότητες που απαιτούνται στο πλαίσιο υλοποίησης ενός μικρού έργου:

Δραστηριότητα	Διάρκεια (σε εβδομάδες)
1	1
2	4
3	2
4	6
5	2
6	5
7	3
8	6
9	1

Οι άμεσες σχέσεις προτεραιότητας είναι:

Activity Number		Activity Number
1	must be finished before	3 can start
2	must be finished before	4,5,6
3	must be finished before	5,6
4	must be finished before	7
5	must be finished before	8
6,7	must be finished before	9

Ερωτήσεις

1. Σχεδιάστε το διάγραμμα του δικτύου.
2. Υπολογίστε τον ελάχιστο συνολικό χρόνο εκτέλεσης του έργου.
3. Υπολογίστε το κρίσιμο μονοπάτι.
4. Πως θα επηρεαστεί ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του έργου και το κρίσιμο μονοπάτι αν συμβούν τα παρακάτω σενάρια:
 - i. Η διάρκεια της δραστηριότητας 6 αυξηθεί από 5 σε 7 εβδομάδες;
 - ii. Η διάρκεια της δραστηριότητας 8 μειωθεί από 6 σε 4 εβδομάδες;
5. Ένα μέλος της ομάδας υποστηρίζει ότι εάν η διάρκεια της δραστηριότητας 4 (κρίσιμη δραστηριότητα) μπορούσε να μειωθεί κατά 3 εβδομάδες τότε ο χρόνος υλοποίησης ολόκληρου του έργου θα μπορούσε επίσης να μειωθεί κατά 3

εβδομάδες. Συμφωνείτε με το παραπάνω; Αν όχι τότε ποια θα είναι η επίδραση στο έργο (ελάχιστος χρόνος υλοποίησης και κρίσιμο μονοπάτι) αν η διάρκεια της δραστηριότητας 4 μειωθεί κατά 3 εβδομάδες;

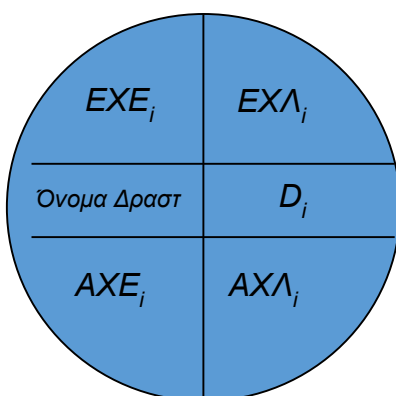
6. Σχολιάστε την πρόοδο υλοποίησης του έργου αν στο τέλος των 8 εβδομάδων η κατάσταση των δραστηριοτήτων έχει ως εξής:

- ✓ Έχουν ολοκληρωθεί οι 1,2,3
- ✓ Είναι υπό εξέλιξη η 4 (1 εβδομάδα για να ολοκληρωθεί)
- ✓ Είναι υπό εξέλιξη η 5 (1 εβδομάδα για να ολοκληρωθεί)
- ✓ Είναι υπό εξέλιξη η 6 (4 εβδομάδες για να ολοκληρωθεί)

Σημείωση:

1. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε την σημειογραφία που παρουσιάστηκε στο μάθημα - δηλαδή:

- ✓ EXE_i (EST_i) είναι ο ενωρίτερος χρόνος έναρξης για την δραστηριότητα i
- ✓ AXE_i (LST_i) είναι ο αργότερος χρόνος έναρξης για την δραστηριότητα i
- ✓ EXL_i (EFT_i) είναι ο ενωρίτερος χρόνος λήξης για την δραστηριότητα i
- ✓ AXL_i (LFT_i) είναι ο αργότερος χρόνος λήξης για την δραστηριότητα i
- ✓ D_i είναι η χρονική διάρκεια υλοποίησης για την δραστηριότητα i
- ✓ F_i είναι η ανεκτικότητα/χαλαρότητα (float, slack) της δραστηριότητας i σε αλλαγές



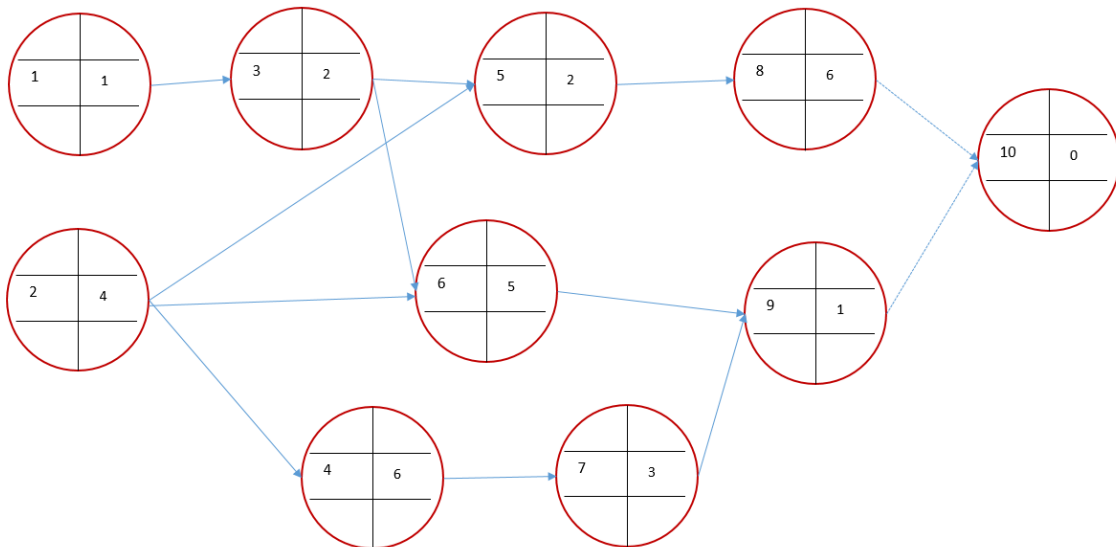
Λύση

1. Σχεδιάστε το διάγραμμα του δικτύου.

Το διάγραμμα δικτύου παρουσιάζεται παρακάτω.

Προσέξτε ότι γίνεται χρήση ψευδοδραστηριότητας (**dummy activity 10**) με μηδενική διάρκεια, ώστε να αναπαρασταθεί η λήξη του έργου.

Όλοι οι κόμβοι (δραστηριότητες) οι οποίοι, στο αρχικό δίκτυο, δεν έχουν σχέσεις προτεραιότητας θα πρέπει να συνδέονται με την ψευδοδραστηριότητα ώστε να επιβεβαιώσουμε ότι προσμετράτε η διάρκεια τους στον συνολικό χρόνο υλοποίησης του έργου. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, αυτό σημαίνει ότι οι δραστηριότητες 8 και 9 πρέπει να συνδεθούν με την δραστηριότητα 10.



2. Υπολογίστε τον ελάχιστο συνολικό χρόνο εκτέλεσης του έργου.

Σημείωση:

- **EST_i** is the earliest start time for node *i*
- **LST_i** is the latest start time for node *i*
- **EFT_i** is the earliest finish time for node *i*
- **LFT_i** is the latest finish time for node *i*
- **T_i** is the completion time for activity *i*
- **F_i** is the float for activity *i*

Για τον υπολογισμό της συνολικής διάρκειας του έργου πρέπει να εφαρμόσουμε την τεχνική **Forward Pass** στο δίκτυο. Οπότε έχουμε:

Earliest start time

$EST_j = \max [EST_i + T_i \mid i \text{ one of the nodes linked to } j \text{ by an arc from } i \text{ to } j]$

$EST_1 = 0$ (assuming we start at time zero)

$EST_2 = 0$ (assuming we start at time zero)

$EST_3 = EST_1 + T_1 = 0 + 1 = 1$

$EST_4 = EST_2 + T_2 = 0 + 4 = 4$

$EST_5 = \max [EST_3 + T_3, EST_2 + T_2] = \max [1 + 2, 0 + 4] = 4$

$EST_6 = \max [EST_3 + T_3, EST_2 + T_2] = \max [1 + 2, 0 + 4] = 4$

$EST_7 = EST_4 + T_4 = 4 + 6 = 10$

$EST_8 = EST_5 + T_5 = 4 + 2 = 6$

$EST_9 = \max [EST_6 + T_6, EST_7 + T_7] = \max [4 + 5, 10 + 3] = 13$

$EST_{10} = \max [EST_8 + T_8, EST_9 + T_9] = \max [6 + 6, 13 + 1] = 14$

Earliest finish time

$EFT_i = EST_i + T_i$

$EFT_1 = EST_1 + T_1 = 0 + 1 = 1$

$EFT_2 = EST_2 + T_2 = 0 + 4 = 4$

$EFT_3 = EST_3 + T_3 = 1 + 2 = 3$

$EFT_4 = EST_4 + T_4 = 4 + 6 = 10$

$EFT_5 = EST_5 + T_5 = 4 + 2 = 6$

$EFT_6 = EST_6 + T_6 = 4 + 5 = 9$

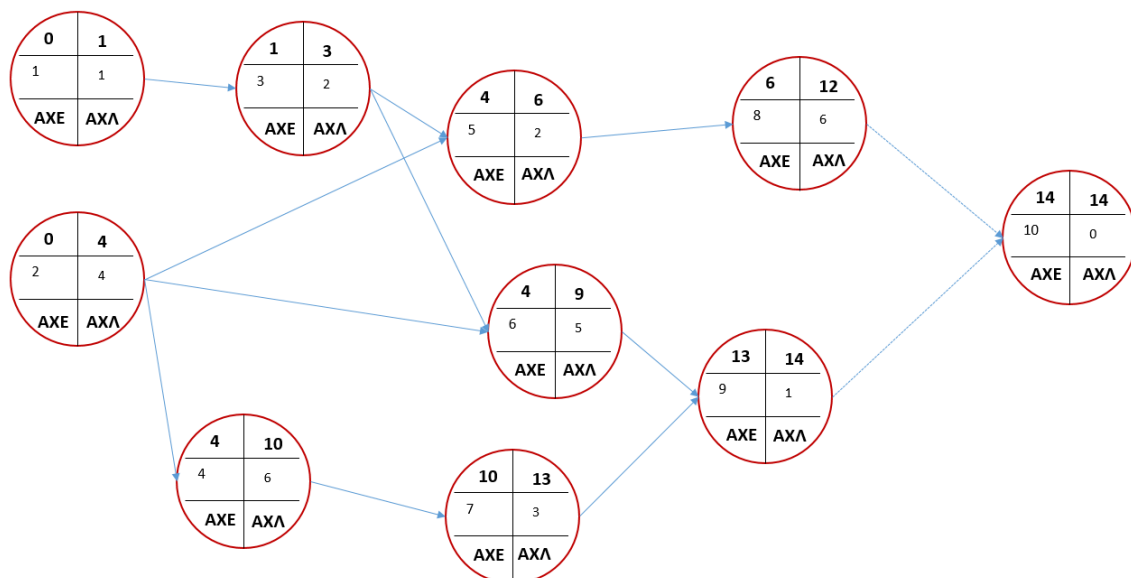
$EFT_7 = EST_7 + T_7 = 10 + 3 = 13$

$EFT_8 = EST_8 + T_8 = 6 + 6 = 12$

$EFT_9 = EST_9 + T_9 = 13 + 1 = 14$

$EFT_{10} = EST_{10} + T_{10} = 14 + 0 = 14$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η συνολική διάρκεια του έργου είναι **14 εβδομάδες**.



3. Υπολογίστε το κρίσιμο μονοπάτι.

Για τον υπολογισμό των κρίσιμων δραστηριοτήτων του έργου πρέπει να εφαρμόσουμε την τεχνική **Backward Pass** στο δίκτυο.

Latest start time

$LST_j = \min [LST_i - T_j \mid j \text{ one of the nodes linked to } i \text{ by an arc from } i \text{ to } j]$

$$LST_{10} = EST_{10} = 14$$

$$LST_9 = LST_{10} - T_9 = 14 - 1 = 13$$

$$LST_8 = LST_{10} - T_8 = 14 - 6 = 8$$

$$LST_7 = LST_9 - T_7 = 13 - 3 = 10$$

$$LST_6 = LST_9 - T_6 = 13 - 5 = 8$$

$$LST_5 = LST_8 - T_5 = 8 - 2 = 6$$

$$LST_4 = LST_7 - T_4 = 10 - 6 = 4$$

$$LST_3 = \min [LST_5 - T_3, LST_6 - T_3] = \min [6 - 2, 8 - 2] = 4$$

$$LST_2 = \min [LST_5 - T_2, LST_6 - T_2, LST_4 - T_2] = \min [6 - 4, 8 - 4, 4 - 4] = 0$$

$$LST_1 = LST_3 - T_1 = 4 - 1 = 3$$

Για να επιβεβαιώσουμε την ορθότητα της ανάλυσης μας αναφορικά με τον υπολογισμό των EST και LST πρέπει να έχουμε:

- Όλοι οι LST (latest start times) πρέπει ≥ 0
- Τουλάχιστον ένας κόμβος πρέπει να έχει LST (latest start time) = 0

Latest finish time

$LFT_i = \min [LST_j]$

$$LFT_{10} = EFT_{10} = 14$$

$$LFT_9 = LST_{10} = 14$$

$$LFT_8 = LST_{10} = 14$$

$$LFT_7 = LST_9 = 13$$

$$LFT_6 = LST_9 = 13$$

$$LFT_5 = LST_8 = 8$$

$$LFT_4 = LST_7 = 10$$

$$LFT_3 = \min [LST_5, LST_6] = \min [6, 8] = 6$$

$$LFT_2 = \min [LST_5, LST_6, LST_4] = \min [6, 8, 4] = 4$$

$$LFT_1 = LST_3 = 4$$

Float times for each activity F_i

$= LST_i - EST_i$

$$F_1 = LST_1 - EST_1 = 3 - 0 = 3 \quad (= LFT_1 - EFT_1)$$

$$F_2 = LST_2 - EST_2 = 0 - 0 = 0 \quad (= LFT_2 - EFT_2)$$

$$F_3 = LST_3 - EST_3 = 4 - 1 = 3 \quad (= LFT_3 - EFT_3)$$

$$F_4 = LST_4 - EST_4 = 4 - 4 = 0 \quad (= LFT_4 - EFT_4)$$

$$F_5 = LST_5 - EST_5 = 6 - 4 = 2 \quad (= LFT_5 - EFT_5)$$

$$F_6 = LST_6 - EST_6 = 8 - 4 = 4 \quad (= LFT_6 - EFT_6)$$

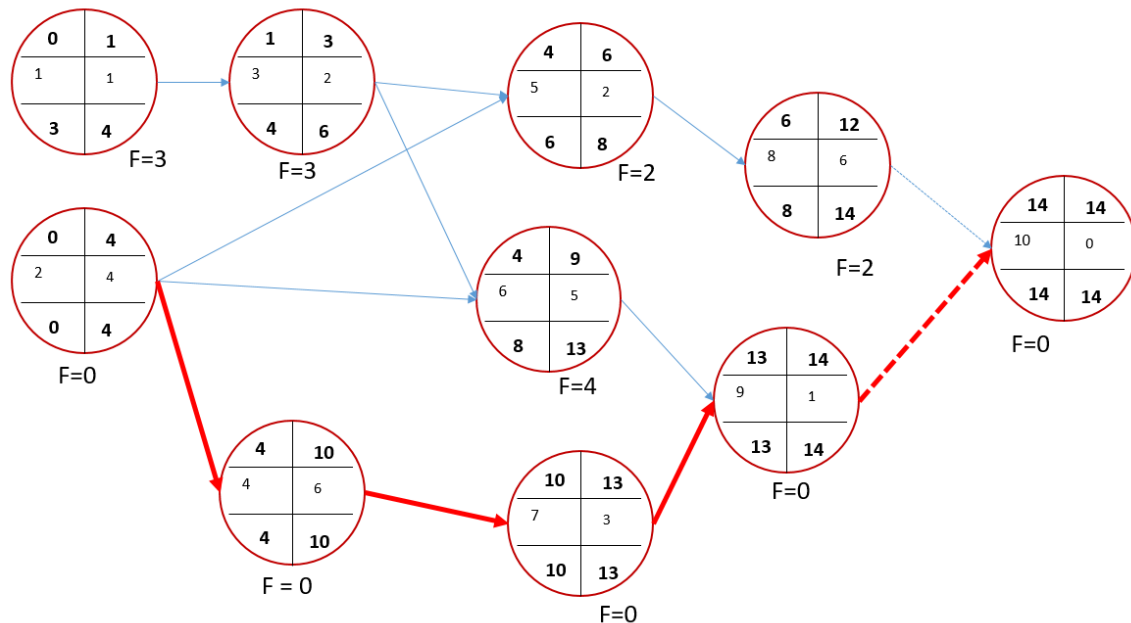
$$F_7 = LST_7 - EST_7 = 10 - 10 = 0 \quad (= LFT_7 - EFT_7)$$

$$F_8 = LST_8 - EST_8 = 8 - 6 = 2 \quad (= LFT_8 - EFT_8)$$

$$F_9 = LST_9 - EST_9 = 13 - 13 = 0 \quad (= LFT_9 - EFT_9)$$

Οι δραστηριότητες με float/slack = 0 είναι οι κρίσιμες δραστηριότητες του δικτύου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω οι κρίσιμες δραστηριότητες του δικτύου είναι οι δραστηριότητες 2,4,7 & 9, η αλληλουχία των οποίων δημιουργεί το κρίσιμο μονοπάτι.



4. Πως θα επηρεαστεί ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του έργου και το κρίσιμο μονοπάτι αν συμβούν τα παρακάτω σενάρια:

→ **Η διάρκεια της δραστηριότητας 6 αυξηθεί από 5 σε 7 εβδομάδες;**

Η αύξηση της χρονικής διάρκειας οποιασδήποτε δραστηριότητας επηρεάζει την συνολική διάρκεια του έργου μόνο εάν η αύξηση είναι μεγαλύτερη από το float της δραστηριότητας. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η αύξηση (καθυστέρηση) για την δραστηριότητα 6 είναι 2 εβδομάδες (από 5 εβδομάδες σε 7) και το float της δραστηριότητας 6 είναι 4 εβδομάδες, άρα ο συνολικός χρόνος υλοποίησης του έργου δεν επηρεάζεται καθώς το περιθώριο είναι μεγαλύτερο από την καθυστέρηση. Προφανώς το κρίσιμο μονοπάτι δεν αλλάζει.

→ **Η διάρκεια της δραστηριότητας 8 μειωθεί από 6 σε 4 εβδομάδες;**

Η μείωση της χρονικής διάρκειας οποιασδήποτε δραστηριότητας επηρεάζει την συνολική διάρκεια του έργου μόνο εάν η μείωση αφορά δραστηριότητα που βρίσκεται στο κρίσιμο μονοπάτι. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η δραστηριότητα 8 δεν ανήκει στο κρίσιμο μονοπάτι άρα ο συνολικός χρόνος υλοποίησης του έργου δεν επηρεάζεται. Προφανώς το κρίσιμο μονοπάτι δεν αλλάζει.

5. Ένα μέλος της ομάδας υποστηρίζει ότι εάν η διάρκεια της δραστηριότητας 4 (κρίσιμη δραστηριότητα) μπορούσε να μειωθεί κατά 3 εβδομάδες τότε ο (ελάχιστος) χρόνος υλοποίησης ολόκληρου του έργου θα μπορούσε επίσης να μειωθεί κατά 3 εβδομάδες. Συμφωνείτε με το παραπάνω; Αν όχι τότε ποια θα είναι η επίδραση στο έργο

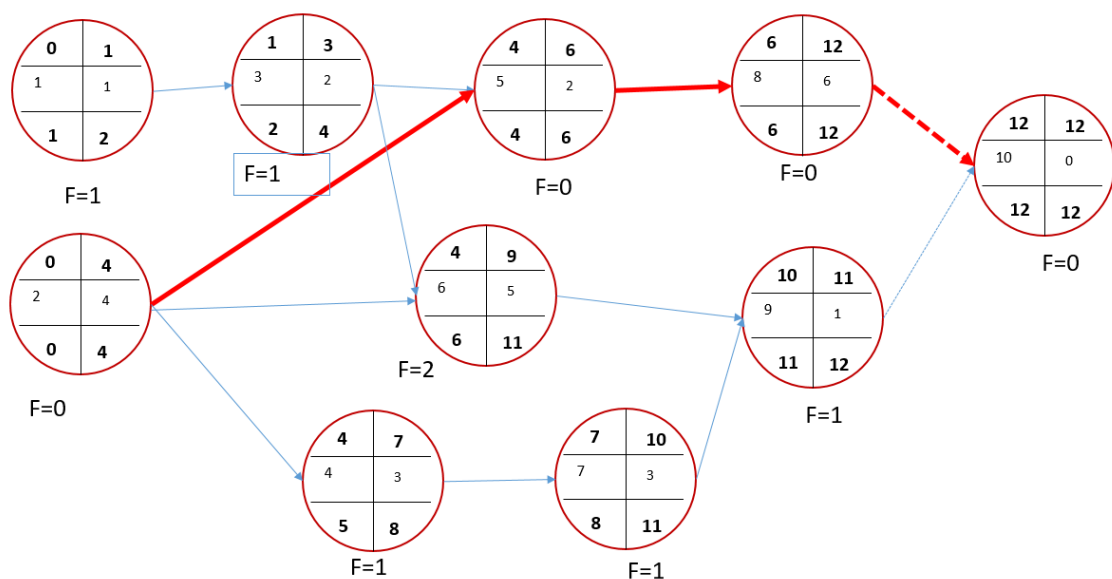
(ελάχιστος χρόνος υλοποίησης και κρίσιμο μονοπάτι) αν η διάρκεια της δραστηριότητας 4 μειωθεί κατά 3 εβδομάδες;

Μειώνοντας την διάρκεια της δραστηριότητας 4 κατά 3 εβδομάδες ο συνολικός χρόνος υλοποίησης του έργου θα επηρεαστεί καθώς η δραστηριότητα 4 χαρακτηρίζεται ως κρίσιμη δραστηριότητα για το έργο. Εξαιρέση στο συγκεκριμένο κανόνα έχουμε μόνο όταν έχουμε πάνω από δυο κρίσιμα μονοπάτια σε ένα έργο και υπάρχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο μονοπάτι το οποίο δεν περιλαμβάνει την δραστηριότητα για την οποία εφαρμόζεται μείωση χρονικής διάρκειας.

Παρόλο αυτά, δεν μπορούμε να υποθέσουμε κατευθείαν ότι η συνολική διάρκεια του έργου θα μειωθεί επίσης κατά 3 εβδομάδες. Πρέπει να επιλυθεί ξανά το δίκτυο, λαμβάνοντας υπόψιν ότι η νέα διάρκεια της δραστηριότητας 4 είναι 6-3=3 εβδομάδες.

$$\begin{aligned}
 EST_1 &= 0 \text{ (assuming we start at time zero)} \\
 EST_2 &= 0 \text{ (assuming we start at time zero)} \\
 EST_3 &= EST_1 + T_1 = 0 + 1 = 1 \\
 EST_4 &= EST_2 + T_2 = 0 + 4 = 4 \\
 EST_5 &= \max[EST_3 + T_3, EST_2 + T_2] = \max[1 + 2, 0 + 4] = 4 \\
 EST_6 &= \max[EST_3 + T_3, EST_2 + T_2] = \max[1 + 2, 0 + 4] = 4 \\
 EST_7 &= EST_4 + T_3 = 4 + 3 = 7 \\
 EST_8 &= EST_5 + T_5 = 4 + 2 = 6 \\
 EST_9 &= \max[EST_6 + T_6, EST_7 + T_7] = \max[4 + 5, 7 + 3] = 10 \quad EST_{10} \\
 &= \max[EST_8 + T_8, EST_9 + T_9] = \max[6 + 6, 10 + 1] = 12
 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η μείωση 3 εβδομάδων στην διάρκεια της δραστηριότητας 4, επέφερε μείωση στην συνολική διάρκεια του έργου κατά 2 εβδομάδες και άλλαξε το κρίσιμο μονοπάτι του δικτύου.



6. Σχολιάστε την πρόοδο υλοποίησης του έργου αν στο τέλος των 8 εβδομάδων η κατάσταση των δραστηριοτήτων έχει ως εξής:

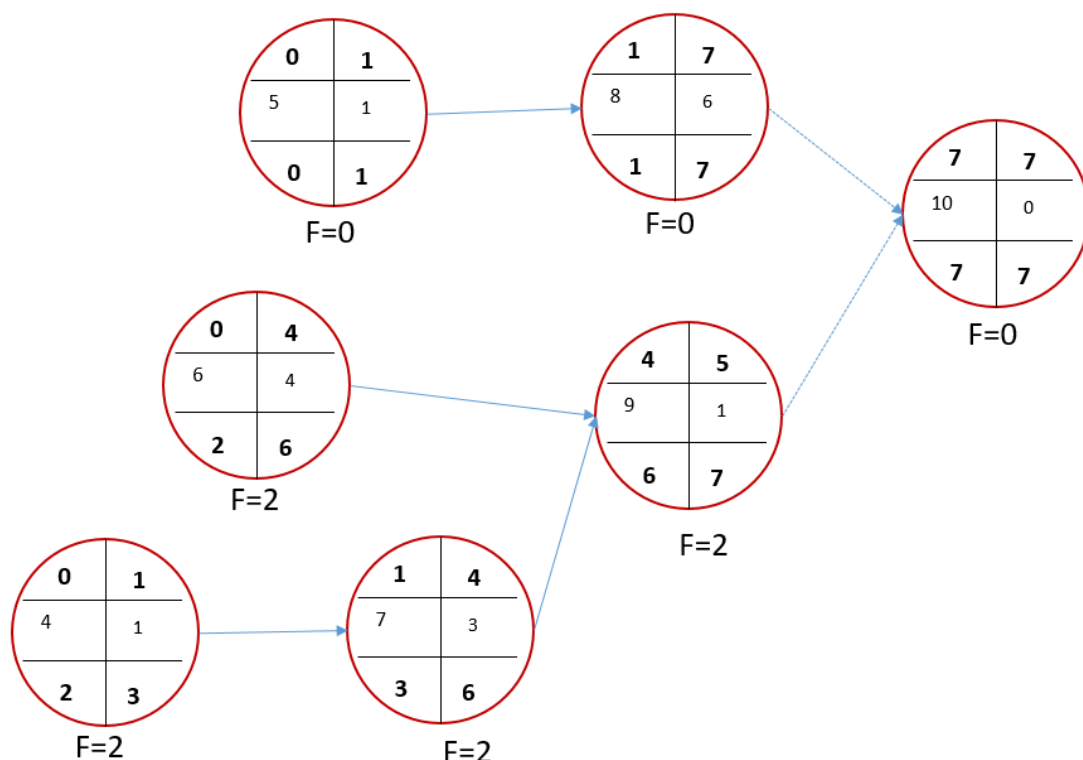
- ✓ Έχουν ολοκληρωθεί οι 1,2,3
- ✓ Είναι υπό εξέλιξη η 4 (1 εβδομάδα για να ολοκληρωθεί)
- ✓ Είναι υπό εξέλιξη η 5 (1 εβδομάδα για να ολοκληρωθεί)
- ✓ Είναι υπό εξέλιξη η 6 (4 εβδομάδες για να ολοκληρωθεί)

Λαμβάνοντας υπόψιν την νέα κατάσταση των δραστηριοτήτων για την δεδομένη χρονική στιγμή, το διάγραμμα του δικτύου θα πρέπει να επανασχεδιασθεί:

- Αφαιρώντας από το δίκτυο όλες τις υλοποιημένες εργασίες και τις αντίστοιχες σχέσεις προτεραιοτήτων
- Επαναπροσδιορίζοντας τους χρόνους των δραστηριοτήτων

Το αποτέλεσμα των υπολογισμών μας δίνει η νέα συνολική διάρκεια του έργου είναι 7 εβδομάδες, ενώ οι κρίσιμες δραστηριότητες είναι οι 5 και 8.

Το νέο διάγραμμα δικτύου του έργου έχει ως εξής:



Λαμβάνοντας υπόψιν ότι έχουν ήδη περάσει 8 εβδομάδες από την έναρξη του έργου, η συνολική διάρκεια του έργου ανέρχεται σε $8+7=15$ εβδομάδες. Είναι προφανές ότι έχουμε 1 εβδομάδα καθυστέρησης στην υλοποίηση του έργου.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να θέσουμε σαν $E\bar{X}E=8$ για τις δραστηριότητες 4,5,6.

