

ΘΕΩΡΗΜΑ Τα διανύσματα $x_1, x_2, \dots, x_r$ (τύπου $n \times 1$) είναι γραμμικά εξαρτημένα ακριβώς όταν η ορίζουσα κάθε υποπίνακα τάξης r του $n \times r$ πίνακα είναι ίση με μηδέν

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{r1} \\ x_{12} & x_{22} & & x_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & & x_{rn} \end{bmatrix}_{n \times r}$$

Παρατηρήσεις:

- 1). Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι βαθμού r τότε υπάρχουν r - γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Οποιοδήποτε όμως $r+1$ στήλες είναι γραμμικά εξαρτημένες.
- 2) Το ίδιο ισχύει και για τις γραμμές του πίνακα A .
- 3) Ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν οι γραμμές και οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.
- 4) Για να εξετάσουμε αν τα διανύσματα $x_1, x_2, \dots, x_r$ είναι γραμμικά εξαρτημένα ή ανεξάρτητα χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες διαδικασίες:

1ος Τρόπος: Διευρύνουμε τον πίνακα A με στήλες (ή γραμμές) τα διανύσματα $x_1, x_2, \dots, x_r$ και προσπαθούμε να βρούμε το βαθμό ($\text{rank}(A)$) του πίνακα A .

Αν $\text{rank}(A) = r (\leq k)$, r διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τα υπόλοιπα $k-r$ διανύσματα είναι γραμμικός συνδυασμός των r γρ. ανεξάρτητων διανυσμάτων.

2ος ΤΡΟΠΟΣ

Δημιουργούμε τη διανυσματική εξίσωση

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = 0$$

Αυτή μας οδηγεί σ' ένα ομογενές σύστημα.

Αν το ομογενές σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση τα διανύσματα είναι γρ. ανεξάρτητα.

Αν η λύση εξαρτάται από s το πλήθος παραμέτρους

Τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων είναι $k-s$.

Παράδειγμα: Έστω $\eta_1 = [1 \ 0 \ 1 \ 2]^T$, $\eta_2 = [0 \ 1 \ 1 \ 2]^T$
και $\eta_3 = [1 \ 1 \ 1 \ 3]^T$. Εξετάστε αν τα διανύσματα είναι γρ. ανεξάρτητα ή γρ. εξαρτημένα.

ΛΥΣΗ:

Δημιουργούμε το σύστημα: $\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \lambda_3 \eta_3 = 0$

Ισοδύναμα έχω:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (\Sigma)$$

Το σύστημα (Σ) έχει μόνο τη μηδενική λύση (επιβεβαιώστε),
άρα τα διανύσματα η_1, η_2, η_3 είναι γραμ. ανεξάρτητα.

$$A = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Είναι

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \eta \quad \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

άρα η_1, η_2, η_3 γραμ. ανεξάρτητα.

Παράδειγμα: Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα
πολυώνυμα $x+3, 2x+\lambda^2+3$ του χώρου Π_1 είναι
γραμμικώς εξαρτημένα;

ΛΥΣΗ:

Η εξίσωση $\mu_1(x+3) + \mu_2(2x+\lambda^2+3) = 0 \quad (1)$

μ_1 μ_2
 $\underbrace{\quad}_{\text{διάνυσμα}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{διάνυσμα}}$
 $\swarrow \quad \searrow$
 $\text{σταθερά} \quad \text{σταθερά}$

με αγνώστους τα $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ πρέπει να έχει λύση διαφορετική των μηδενός $\forall x \in \mathbb{R}$ (καθώς ζητάμε να διανύσματα να είναι γρ. εξαρτημένα).

$$(1) \Leftrightarrow \underline{\mu_1 x + 3\mu_1} + \underline{2\mu_2 x + \lambda^2 \mu_2 + 3\mu_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mu_1 + 2\mu_2)x + (3\mu_1 + (\lambda^2 + 3)\mu_2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 + 2\mu_2 = 0 \\ 3\mu_1 + (\lambda^2 + 3)\mu_2 = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda^2 + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3 - 6 = \lambda^2 - 3$$

Για να υπάρχει λύση διάφορη στο μηδενικό πρέπει $D \neq 0$. Ισοδύναμα $\lambda^2 - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{3}$.

Παράδειγμα: $\eta_1 = [1 \ -2 \ -3]^T, \eta_2 = [-3 \ 5 \ 7]^T$

και $\eta_3 = [-4 \ 5 \ 6]^T$. Εξετάστε αν τα

η_1, η_2, η_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

ΛΥΣΗ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -2 & 5 & 5 \\ -3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 - 3\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 + 7\lambda_2 + 6\lambda_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (\Sigma)$$

$\det(A) = 0 \Rightarrow$ το (Σ) έχει λύσεις
μη μηδενικές $\Rightarrow \eta_1, \eta_2, \eta_3$ είναι χρ. εξαρτ.

Μάλιστα $\boxed{\eta_3 = 5\eta_1 + 3\eta_2}$ Για να το βρούμε

αυτό δίνουμε το σύστημα. $k\eta_1 + \lambda\eta_2 = \eta_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} k - 3\lambda = -4 \\ -2k + 5\lambda = 5 \\ -3k + 7\lambda = 6 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} k=5, \lambda=3. \end{cases}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ (βάση διανυσματικού χώρου).

Κάθε συλλογή χρ. ανεξαρτήτων διανυσμάτων

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$$

τα οποία παράγουν το διανυσματικό χώρο Δ

$$\left(\forall \delta \in \Delta \quad \exists \underset{\text{βασίς}}{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} : \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \dots + \lambda_n\eta_n = \delta \right)$$

ονομάζεται βάση του διανυσματικού χώρου Δ .

Το πλήθος n των διανυσμάτων της βάσης ονομάζεται διάσταση του διανυσματικού χώρου Δ , συμβολίζεται δε με $\dim \Delta$.

Παρατηρήσεις:

- 1) Για τον τετριμμένο διανυσματικό χώρο $\Delta_0 = \{\mathbf{0}\}$ ορίζουμε $\dim \Delta_0 = 0$. Αφού δεν υπάρχει κανένα χρ. ανεξάρτητο διάνυσμα.
- 2) Τα διανύσματα $\vec{e}_1 = (1, 0)$ και $\vec{e}_2 = (0, 1)$ είναι για κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, γιατί κάθε διάνυσμα $\vec{x} = (x_1, x_2)$ που ανήκει στο $\mathbb{R}^2$ γράφεται ως:

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2.$$

Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ τα διανύσματα $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$, ..., $\vec{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)^T$ αποτελούν μια κανονική βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω Δ διανυσματικός χώρος και $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ μια βάση του Δ . (θυμίζει ότι $e_1, e_2, \dots, e_n$ ηρ. ανεξάρτητα και παράσχουν το χώρο δηλαδή $\Delta = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$).

Τότε αν $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ είναι r γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του Δ , αυτά μπορούν να αντικαταστήσουν r κατάλληλα διανύσματα από τα $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ώστε το νέο σύνολο που θα προκύψει να είναι βάση του διανυσματικού χώρου Δ .

Παράδειγμα: Εξετάστε πότε τα διανύσματα:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}^T, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{bmatrix}^T, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma \\ \gamma^2 \end{bmatrix}^T$$

είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

ΛΥΣΗ: Χάτ' αρχάς πρέπει τα e_1, e_2, e_3 να είναι ηρ. ανεξάρτητα. Για να συμβαίνει αυτό η ορίζουσα

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & \gamma \\ a^2 & b^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Vandermonde}} (\gamma-b)(\gamma-a)(b-a) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (\gamma-b \neq 0 \wedge \gamma-a \neq 0 \wedge b-a \neq 0) \Leftrightarrow a \neq b \neq \gamma.$$

Είναι εύκολο να δείξετε ότι τα e_1, e_2, e_3 παράσχουν τον $\mathbb{R}^3$.

ΟΡΙΣΜΟΣ (Εσωτερικό Γινόμενο).

Έστω Δ διανυσματικός χώρος κι έστω συνάρτηση: $\langle \cdot, \cdot \rangle$
 $\Delta \times \Delta \rightarrow \mathbb{C} (\mathbb{R})$. Η συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ονομάζεται
εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν $\forall x, y, z \in \Delta$ ισχύουν
τα ακόλουθα:

$$\text{I. } \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad (\text{για } \mathbb{R} \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle) \\ (\text{αντισυμμετρικότητα})$$

$$\text{II. } \langle (kx + \lambda y), z \rangle = k \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle \\ (\text{επιμεριστικότητα})$$

$$\text{III. } \langle x, x \rangle \geq 0 \quad (\text{θετικά ορισμένο})$$

$$\text{IV. } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \mathbf{0}$$

Παράδειγμα: Στο χώρο $\mathbb{R}^3$ το εσωτερικό γινόμενο

δίνει: $x = (x_1, x_2, x_3) \quad y = (y_1, y_2, y_3)$

$$\langle x, y \rangle \stackrel{\text{ορίσ.}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$\langle y, x \rangle = y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

Παρόμοια ελέγχεται ότι ικανοποιούνται οι αξιώματα II-IV
του ορίσμου.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΠΙΝΟΜΕΝΟΥ.

1. $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
2. $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \Delta \Rightarrow x = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ (Μέτρο Διανύβματος).

Έστω Δ διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο. Έστω $x \in \Delta$ το μέτρο του διανύβματος x , συμβ. $\|x\|$ ορίζεται να είναι η ποσότητα

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Παράδειγμα: στον $\mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 0)^T$, $e_2 = (0, 1)^T$
 $x = (2, 3)^T$. Τότε $\|e_1\| = 1 = \|e_2\|$

και $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΡΟΥ

1. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

2. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα)

Παράδειγμα: Στο διανυσματικό χώρο των 2×2 πινάκων
η σχέση $\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$

όπου $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ ορίζεται ένα

Εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση: Επαληθεύουμε τα αξιώματα I-IV του
ορισμού του εσωτ. γινομένου.

I.) $\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} = \langle B, A \rangle$

II.) $\langle \kappa A + \lambda B, \Gamma \rangle = \dots = \kappa \langle A, \Gamma \rangle + \lambda \langle B, \Gamma \rangle$

III.) $\langle A, A \rangle = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \geq 0$.

IV.) $\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A = \mathbf{0}$.