

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω Δ διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K και έστω $x, y \in \Delta$. Τα x, y λέγονται ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ αν και μόνο αν $\langle x, y \rangle = 0$.

Παράδειγμα

Έστω $n_1, n_2, \dots, n_r$ μημηδενικά διανύσματα που είναι ορθογώνια μεταξύ τους ανά δύο. Τότε τα $n_1, n_2, \dots, n_r$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη

Έστω $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \dots + \lambda_r n_r = \mathbf{0}$ με $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ σταθερές. Παίρνω το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle \underbrace{\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \dots + \lambda_r n_r}_{\mathbf{0}}, n_k \rangle = 0, \quad k=1, 2, \dots, r$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \langle n_1, n_k \rangle + \lambda_2 \langle n_2, n_k \rangle + \dots + \underbrace{\lambda_k \langle n_k, n_k \rangle}_{\text{μη } 0} + \dots + \lambda_r \langle n_r, n_k \rangle = 0$$

$n_1, \dots, n_r$ ανά δύο ορθογώνια.

$$\Rightarrow \lambda_k \langle n_k, n_k \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_k \|n_k\|^2 = 0 \xRightarrow{\|n_k\| \neq 0} \lambda_k = 0$$

$k=1, 2, \dots, r$. Τα $n_1, n_2, \dots, n_r$ είναι γρ. ανεξ.

ΟΡΙΣΜΟΣ (ορθοκανονική βάση)

Έστω Δ ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K , έστω επίσης $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ για βάση του διανυσματικού χώρου Δ . Με την προϋπόθεση ότι στον Δ έχει οριστεί εσωτερικό γινόμενο και $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ λέγονται ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΒΑΣΗ

του Δ αν και μόνο αν:

- i) είναι ανά δύο ορθογώνια μεταξύ τους
- και ii) $\|e_i\| = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Παράδειγμα: Δ των $\mathbb{R}^3$ τα διανύσματα $e_1 = (1, 0, 0)$
 $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ αποτελούν
ορθοκανονική βάση.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt)

Αν τα διανύσματα $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ είναι για βάση του διανυσματικού χώρου Δ με εσωτερικό γινόμενο, τα διανύσματα:

$$\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}, \dots, \frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \quad \text{όπου:}$$

$$\xi_1 = \eta_1$$

$$\xi_2 = \eta_2 - \frac{\langle \eta_2, \xi_1 \rangle}{\|\xi_1\|^2} \xi_1$$

$$\xi_3 = \eta_3 - \frac{\langle \eta_3, \xi_1 \rangle}{\|\xi_1\|^2} \xi_1 - \frac{\langle \eta_3, \xi_2 \rangle}{\|\xi_2\|^2} \xi_2$$

$$\vdots$$

$$\xi_n = \eta_n - \frac{\langle \eta_n, \xi_1 \rangle}{\|\xi_1\|^2} \xi_1 - \frac{\langle \eta_n, \xi_2 \rangle}{\|\xi_2\|^2} \xi_2 - \dots - \frac{\langle \eta_n, \xi_{n-1} \rangle}{\|\xi_{n-1}\|^2} \xi_{n-1}$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του Δ .

Παράδειγμα: Έστω τα διανύσματα

$$\eta_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \eta_2 = (0, 1, 1, 1)^T$$

$\eta_3 = (0, 0, 1, 1)^T$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\Delta \subseteq \mathbb{R}^4$. Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του Δ .

Λύση: $\xi_1 = \eta_1 \Rightarrow \xi_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \|\xi_1\|^2 = 4$

Άρα: $\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$

$$\xi_2 = \eta_2 - \frac{\langle \eta_2, \xi_1 \rangle}{\|\xi_1\|^2} \xi_1 = (0, 1, 1, 1)^T - \frac{3}{4} (1, 1, 1, 1)^T$$

$$\Rightarrow \xi_2 = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^T \quad \|\xi_2\|^2 = \frac{9}{16} + 3 \frac{1}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$\xi_3 = \eta_3 - \frac{\langle \eta_3, \xi_1 \rangle}{\|\xi_1\|^2} \xi_1 - \frac{\langle \eta_3, \xi_2 \rangle}{\|\xi_2\|^2} \xi_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi_3 = (0, 0, 1, 1) - \frac{2}{4} (1, 1, 1, 1) - \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \xi_3 = (0, 0, 1, 1) - \frac{2}{4} (1, 1, 1, 1) - \frac{2}{3} \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(0, -\frac{2}{4} - \frac{2}{12}, 1 - \frac{2}{4} - \frac{2}{12}, 1 - \frac{2}{4} - \frac{2}{12}\right) =$$

$$\Rightarrow \xi_3 = \left(0, -\frac{8}{12}, \frac{4}{12}, \frac{4}{12}\right) \quad \|\xi_3\|^2 = \frac{64}{144} + \frac{16}{144} + \frac{16}{144} = \frac{96}{144}$$

Τα διανύσματα $\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}, \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}$ είναι η ζητούμενη ορθοκανονική βάση του Δ .

ΟΡΙΣΜΟΣ (Ορθογώνιο συμπλήρωμα).

Έστω διανυσματικός χώρος Δ με εσωτερικό γινόμενο και E ένας υπόχωρος του Δ . Το σύνολο

$$E^\perp = \{y \in \Delta : \langle y, x \rangle = 0, \forall x \in E\}$$

ονομάζεται ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ του υπόχωρου E .

Παρατήρηση: Από των παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι:

$$(E^\perp)^\perp = E.$$

Επιπλέον αν $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ είναι μια ορθογώνια βάση του E και $x \in \Delta$ τότε το διάνυσμα:

$$\hat{x} = \frac{\langle x, \xi_1 \rangle}{\|\xi_1\|^2} \cdot \xi_1 + \frac{\langle x, \xi_2 \rangle}{\|\xi_2\|^2} \xi_2 + \dots + \frac{\langle x, \xi_k \rangle}{\|\xi_k\|^2} \xi_k$$

είναι η ζητούμενη ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΡΟΒΟΛΗ του διανύσματος x επί του υπόχωρου E . Το δε διάνυσμα $(x - \hat{x}) \in E^\perp$

Η απόσταση του διανύσματος x από τον υπόχωρο E

ισούται με $\|x - \hat{x}\|$

Παράδειγμα: Έστω $\xi_1 = (2 \ 5 \ -1)^T$, $\xi_2 = (-2 \ 1 \ 1)^T$

Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του διανύσματος $x = (1 \ 2 \ 3)^T$ στον χώρο $\text{span}\{\xi_1, \xi_2\}$.

Άσκηση: Έστω Δ διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και E ένας υπόχωρος του Δ . Να δείξετε ότι ο $E^\perp$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του Δ .

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ QR

Έστω A πίνακας $n \times n$ με τα διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ να είναι οι στήλες του A . Αν τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (ισοδύναμα υπάρχει μη μηδενική υπορίζουσα $n \times n$ του πίνακα A) τότε από το θεώρημα Gram-Schmidt έχουμε:

$$\xi_1 = \alpha_1$$

$$\xi_2 = \alpha_2 - a_{12} \xi_1$$

$$\xi_3 = \alpha_3 - a_{13} \xi_1 - a_{23} \xi_2$$

$$\vdots$$

$$\xi_n = \alpha_n - a_{1n} \xi_1 - a_{2n} \xi_2 - \dots - a_{n-1,n} \xi_{n-1}$$

$$a_{ij} = \frac{\langle \alpha_j, \xi_i \rangle}{\|\xi_i\|^2}$$

$$A = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n] =$$

$$= [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \dots \quad \xi_n] \cdot \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$= QR$$

onou: $Q = \left[\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} \quad \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} \quad \dots \quad \frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \right]$

$$R = \text{diag}[\|\xi_1\| \quad \|\xi_2\| \quad \dots \quad \|\xi_n\|] \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & 1 & \dots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \frac{\langle \alpha_j, \xi_i \rangle}{\|\xi_i\|^2}$$

Παράδειγμα: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$ Να βρωμεν η

παράγοντες QR του A.

Λύση: $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (3, 1, 1, 3)^T$
 $\alpha_3 = (5, 0, 2, 3)^T$

Τα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ είναι γρ. ανεξάρτητα διότι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\tilde{f}_1 = \alpha_1 \quad \|\tilde{f}_1\|^2 = 4$$

$$\tilde{f}_2 = \alpha_2 - \lambda_{12} \tilde{f}_1 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \tilde{f}_1 \rangle}{\|\tilde{f}_1\|^2} \tilde{f}_1 = \alpha_2 - 2 \tilde{f}_1 = (1, -1, -1, 1)^T$$

$$\boxed{\lambda_{12} = 2}$$

$$\tilde{f}_3 = \alpha_3 - \lambda_{13} \tilde{f}_1 - \lambda_{23} \tilde{f}_2 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \tilde{f}_1 \rangle}{\|\tilde{f}_1\|^2} \tilde{f}_1 - \frac{\langle \alpha_3, \tilde{f}_2 \rangle}{\|\tilde{f}_2\|^2} \tilde{f}_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{f}_3 &= \alpha_3 - \frac{10}{4} \tilde{f}_1 - \frac{6}{4} \tilde{f}_2 \\ &= \alpha_3 - \frac{5}{2} \tilde{f}_1 - \frac{3}{2} \tilde{f}_2 \\ &= (1, -1, 1, -1)^T \end{aligned}$$

$\lambda_{13} = 5/2$
$\lambda_{23} = 3/2$

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{matrix}} \end{bmatrix}}^Q \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}^R$$

$\downarrow$
 $\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}$

$\downarrow$
 $\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}$

$\downarrow$
 $\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}} \lambda_{23}$$

$$Q \cdot Q^T = I \quad !$$