

Παράδειγμα 1

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιάνυσμα του A

Λύση: Λαμβάνουμε την χαρακτηριστική
εξίσωση $\det(A - \lambda I) = 0 \iff$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff 3\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \iff \lambda^2(3-\lambda) = 0$$

$$\iff \boxed{\lambda_1 = 0 \text{ διπλή} \quad \lambda_2 = 3}$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$.

$$A\vec{u} = \lambda_1 \vec{u} \quad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \stackrel{\lambda_1=0}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 - u_3 = 0 \\ -u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ -u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 - u_2 - u_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3) = (u_2 + u_3, u_2, u_3) \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u_2, u_2, 0) + (u_3, 0, u_3) \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow u_2 (1, 1, 0) + u_3 (1, 0, 1) \quad u_2, u_3 \in \mathbb{R}$$

Για ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $(1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ έχουμε:

$$A\vec{u} = \lambda_2 \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 - u_3 = 3u_1 \\ -u_1 + u_2 + u_3 = 3u_2 \\ -u_1 + u_2 + u_3 = 3u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2u_1 - u_2 - u_3 = 0 \\ -u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \\ -u_1 + u_2 - 2u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -u_3 \\ u_2 = u_3 \end{cases}$$

$$(u_1, u_2, u_3) = (-u_3, u_3, u_3) = u_3(-1, 1, 1), u_3 \in \mathbb{R}$$

Δευτ. ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $(-1, 1, 1)^T$.

Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 2.

Άρα ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Δαν άκονδι βρείτε τον διαγωνια μορφή του.

Παρίδειμα 2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Να βρείτε ιδιοτιμές και ιδιοδιάνυσμα του A και να δείξετε ότι $A^{101} + A^{51} - 2A = \mathbf{0}$

ΛΥΣΗ

Δημιατίζουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda(1+\lambda)(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+1)(\lambda-1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Gamma_K \quad \lambda_1 = 0$$

$$A\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}$$

$$u = (u_1, u_2, u_3)^T$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \stackrel{\lambda_1=0}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ -u_1 = 0 \\ -u_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3) = (0, u_2, 0)$$

$$\Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3) = u_2(0, 1, 0), \quad u_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Gamma_K \quad \lambda_2 = -1 \quad \text{Εχουμε:}$$

$$A\vec{u} = \lambda_2 \vec{u}, \quad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} u_1 = -u_1 \\ -u_1 = -u_2 \\ -u_3 = u_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3) = (0, 0, u_3) \quad u_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 1) u_3 \quad u_3 \in \mathbb{R}.$$

Για $\lambda_3 = 1$ έχουμε:

$$A\vec{u} = \lambda_3 \vec{u} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} u_1 + u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$(u_1, u_2, u_3) = (u_1, -u_1, 0)$$

$$\Leftrightarrow u_1(1, -1, 0) \quad u_1 \in \mathbb{R}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Είναι διαγωνοποιήσιμος
ιδιοδιάνυσμα λ_3

και αν $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$A = U \cdot D \cdot U^{-1}, \text{ όπου}$$

$$D = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Θα δείξουμε ότι $A^{101} + A^{51} - 2A = \mathbf{0}$

$$A^K = U D U^{-1} \Rightarrow A^K = U D^K U^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^K = U \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^K & 0 \\ 0 & 0 & 1^K \end{bmatrix} U^{-1}$$

Αν K - περιττός

$$A^K = U \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} U^{-1} = A$$

Τελικά

$$A^{101} = A$$

$$A^{51} = A$$

$$A^{101} + A^{51} - 2A = A + A - 2A = 0$$

Παράδειγμα 3: Έστω για ένα πίνακα A το χαρακτηριστικό του πολωνύμιο είναι το:
 $x^4 - 2x^3 + x + 4$. Να υπολογίσετε:

- τη διάσταση του πίνακα A
- τον A^{-1} ως γραμμικό συνδυασμό δυνάμεων του A .

ΛΥΣΗ:

α) ο βαθμός του πολωνύμιου = διάσταση του πίνακα A
 Άρα ο A είναι 4×4 πίνακας.

β) $\left[\begin{array}{l} \text{Ο } A \text{ είναι ανειστρέψιμος αν και μόνο αν} \\ \text{ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού} \\ \text{πολωνύμιου του πίνακα είναι μη } \underline{\text{μηδενικός}} \end{array} \right.$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι
 $x^4 - 2x^3 + x + 4$

ο σταθερός όρος είναι $4 \neq 0$ άρα υπάρχει
ο A^{-1} .

Από το Cayley-Hamilton ο πίνακας A ικανοποιεί
το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο δηλαδή:

$$A^4 - 2A^3 + A + 4I = 0$$

$$\Leftrightarrow A^4 - 2A^3 + A = -4I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(-A^3 + 2A^2 - I) = 4I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{4}A^3 + \frac{2}{4}A^2 - \frac{1}{4}I \right)}_{A^{-1}} = I$$

δηλαδή $A^{-1} = -\frac{1}{4}A^3 + \frac{2}{4}A^2 - \frac{1}{4}I$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω A πραγματικός συμμετρικός πίνακας τάξης n (ήχη δίκτυο). Η τετραγωνική μορφή $x^T A x$ είναι:

- 1) Θετικά Ορισμένη (δηλαδή $x^T A x > 0$) όταν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές.
- 2) Θετικά Ημιορισμένη (δηλαδή $x^T A x \geq 0$) όταν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μη αρνητικές.
- 3) Αόριστη ακριβώς όταν ο πίνακας A έχει θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές.

ΟΡΙΣΜΟΣ Ορίζεται ως φάσμα ενός τετραγωνικού πίνακα $n \times n$ και συμβολίζεται με $Sp(A)$ (spectrum) το σύνολο των ιδιοτιμών του, δηλαδή

$$Sp(A) = \{\lambda_i : \det(A - \lambda_i I) = 0 \quad i=1, 2, \dots, n\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η φασματική ακτίνα του $n \times n$ πίνακα A συμβολίζεται με $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$
με $\lambda_i \in Sp(A) \quad i=1, 2, \dots, n$.

Παρατήρηση: Οι ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα,
το φάσμα και η φασματική ακτίνα λέγονται
χαρακτηριστικά μεγέθη του πίνακα A .

Παράδειγμα 4. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \text{ σταθερά.}$$

Βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες ο πίνακας
 A είναι θετικά ορισμένος.

Λύση: Θετικά ορισμένος θα πει

$$x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff$$

$$\iff \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3(1-\alpha^2)\lambda - 1 + 3\alpha^2 - 2\alpha^3 = 0$$

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού
πολυωνύμου θα να είναι θετικές (και άρα ο
 A να είναι θετικά ορισμένος πρέπει:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 > 0 \quad (1)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = 3(1 - \alpha^2) > 0 \quad (2)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1 + 3\alpha^2 - 2\alpha^3 > 0 \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow -1 < \alpha < 1$$

$$(3) \Rightarrow 1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3 = (\alpha - 1)^2 (2\alpha + 1) > 0 \Rightarrow 2\alpha + 1 > 0$$

$$\Rightarrow \alpha > -\frac{1}{2}$$

$\forall \alpha \in (-\frac{1}{2}, 1)$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι θετικές και ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.

Παράδειγμα 5: Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$, ($i^2 = -1$)
 φανταστική μονάδα

Βρείτε τον A^{2016} .

Λύση: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & i \\ -i & 1 - \lambda \end{vmatrix} =$

$$= (1 - \lambda)^2 + 1^2 = (1 - \lambda)^2 - 1$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$$

Από το Cayley-Hamilton έχουμε ότι:

$$A^2 - 2A = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = 2A$$

$$\Rightarrow A^3 = 2A^2 = 2 \cdot (2A) = 4A$$

Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι: $A^k = 2^{k-1} A$
 $k=2, \dots$

$$\text{Έστω ότι } A^k = 2^{k-1} A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot A^k = A \cdot 2^{k-1} A = 2^{k-1} A^2$$

$$\Rightarrow A^{k+1} = 2^{k-1} \cdot (2A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{k+1} = 2^k \cdot A \quad \text{αποδείχθηκε}$$

$$\text{Άρα } A^{2016} = 2^{2015} \cdot A.$$