

Άσκηση 1: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$. Με χρήση
του θ. Cayley-Hamilton να βρεθεί ο A^{-1} .

Λύση Διηγείσονται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του
πίνακα A , $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 3 & -4 & -3-\lambda \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = -(\lambda-1) [\lambda(\lambda+3)+4] + 2 [\lambda+3-3] + 2 [3\lambda+4] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 7\lambda + 12 = -(\lambda+3)(\lambda^2 - \lambda - 4) =$$
$$= -(\lambda+3) \left(\lambda - \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right) \left(\lambda - \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right)$$

$$\boxed{\det(A) = P_A(0) = 12 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}}.$$

Από θ. Cayley-Hamilton:

$$-A^3 - 2A^2 + 7A + 12I = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow 12I = A^3 + 2A^2 - 7A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12A^{-1} \cdot I = A^{-1}(A^3 + 2A^2 - 7A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 \cdot A^{-1} = A^2 + 2A - 7I \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{12}A^2 + \frac{1}{6}A - \frac{7}{12}I}$$

Άσκηση 2: Να ελεγχθεί αν ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος

Λύση: Διηλεκτίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A , $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 2-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) + i^2 = (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = \left(\lambda - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$$Ax = \lambda_1 x \Leftrightarrow (A - \lambda_1 I)x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & i \\ -i & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} x_1 + i x_2 = 0 \\ -i x_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \frac{1-\sqrt{5}}{2i} x_2 + i x_2 = 0 \\ x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2i} x_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{-(-1)} = -i$$

$$\begin{aligned} 2 - \lambda_1 &= 2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \\ &= \frac{4 - 3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \hline 1 - \lambda_1 &= 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \\ &= \frac{2 - 3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{4}(-i)x_2 + i x_2 = 0 \\ x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}(-i)x_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(1-\sqrt{5})^2}{4} i x_2 + i x_2 = 0 \\ x_1 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} i x_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -i x_2 + i x_2 = 0 \\ x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} i x_2 \end{cases}$$

Λύσεις της μορφής $(x_1, x_2)^T = \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2} i, 1\right)^T x_2$
 όπου $x_2 \in \mathbb{R}$. Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
 αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} i, 1\right)^T$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$$Ax = \lambda_2 x \Leftrightarrow (A - \lambda_2 I)x = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} & i \\ -i & 2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & i \\ -i & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} x_1 + i x_2 = 0 \\ -i x_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2i} x_2 + i x_2 = 0 \\ x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2i} x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(\sqrt{5})^2 - 1}{4i} x_2 + i x_2 = 0 \\ x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2i} x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{i} x_2 + i x_2 = 0 \\ x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2i} x_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{i} = -i \Leftrightarrow \begin{cases} -i x_2 + i x_2 = 0 \\ x_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} i x_2 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2)^T = \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2} i, 1 \right)^T x_2 \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

Άρα έχω ιδιοτιμή $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ αντιστοιχεί το
ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} i, 1 \end{pmatrix}^T$

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \mapsto \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}i, 1 \right)^T$$

$$\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \mapsto \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}i, 1 \right)^T$$

Ο πίνακας A διαγωνοποιείται, δηλαδή υπάρχει
πίνακας U τέτοιος ώστε: $A = U \cdot D \cdot U^{-1}$,

όπου $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ και

$$U = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}i & \frac{-1-\sqrt{5}}{2}i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det U = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}i + \frac{1+\sqrt{5}}{2}i = \sqrt{5}i \neq 0$$

$$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}i} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2}i \\ -1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2}i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2}i + \frac{1+\sqrt{5}}{2}i &= i \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right] \\ &= i \frac{-1+\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}{2} = i \frac{2\sqrt{5}}{2} = i\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -ix_2 + ix_2 = 0 \\ x_1 = \frac{x_2}{i} = -ix_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2)^T = (-i, 1)^T x_2 \quad x \in \mathbb{R}.$$

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $(-i, 1)^T$

Για $\lambda_2 = 2$.

$$Ax = \lambda_2 x \Leftrightarrow (A - \lambda_2 I)x = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-2 & i \\ -i & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + ix_2 = 0 \\ -ix_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x_1 + ix_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = ix_2 \quad \text{Άρα } (x_1, x_2)^T = (i, 1)^T x_2$$

Στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $(i, 1)^T$ $x_2 \in \mathbb{R}$.

Επίκτ: $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

$\neq 0$

Άσκηση 3 $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ είναι διαγωνιστική?

Λύση $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (1-\lambda)^2 + i^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$$

$$SP(A) = \{0, 2\} \quad \det A = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$$

Για $\lambda_1 = 0$

$$Ax = \lambda_1 x \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + ix_2 = 0 \\ -ix_1 + x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$U = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(U) = -i - i = -2i \neq 0$$

$$U^{-1} = \frac{1}{-2i} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} i \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = U \cdot D \cdot U^{-1}.$$

$$x, y \text{ ορθογώνια} \xLeftrightarrow{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}} \langle x, y \rangle = 0$$

$$x, \text{ κανονικό} \xLeftrightarrow{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}} \|x\| = 1$$

Παράδειγμα ορθοκανονικής βάσης

Τα $e_1 = (1, 0, 0)$
 $e_2 = (0, 1, 0)$
 $e_3 = (0, 0, 1)$

αποτελούν ορθοκανονική
 βάση του $\mathbb{R}^3$