

**ΛΥΣΕΙΣ ΤΕΛΙΚΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ Β' ΠΕΡΙΟΔΟΥ****ΘΕΜΑ 1ο:** Στην πρώτη γραμμή προσθέτουμε την δεύτερη, τρίτη και τέταρτη γραμμή, ήτοι:

$$\begin{vmatrix} x & x & -2 & 1 \\ x & -2 & 1 & x \\ -2 & 1 & x & x \\ 1 & x & x & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x-1 & 2x-1 & 2x-1 & 2x-1 \\ x & -2 & 1 & x \\ -2 & 1 & x & x \\ 1 & x & x & -2 \end{vmatrix} = (2x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -2 & 1 & x \\ -2 & 1 & x & x \\ 1 & x & x & -2 \end{vmatrix} =$$

Στο επόμενο βήμα από την δεύτερη, τρίτη και τέταρτη στήλη αφαιρούμε την πρώτη, άρα:

$$(2x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -2 & 1 & x \\ -2 & 1 & x & x \\ 1 & x & x & -2 \end{vmatrix} = (2x-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -2-x & 1-x & 0 \\ -2 & 3 & x+2 & x+2 \\ 1 & x-1 & x-1 & -3 \end{vmatrix} = (2x-1) \begin{vmatrix} -2-x & 1-x & 0 \\ 3 & x+2 & x+2 \\ x-1 & x-1 & -3 \end{vmatrix} =$$

Στο επόμενο βήμα στην τρίτη γραμμή προσθέτουμε την πρώτη και, άρα:

$$= (2x-1) \begin{vmatrix} -2-x & 1-x & 0 \\ 3 & x+2 & x+2 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (2x-1)(-3) \begin{vmatrix} -2-x & 1-x & 0 \\ 3 & x+2 & x+2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

μετά αφαιρούμε από την τρίτη στήλη την πρώτη, άρα:

$$= (2x-1)(-3) \begin{vmatrix} -2-x & 1-x & 2+x \\ 3 & x+2 & x-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (2x-1)(-3)(1) \begin{vmatrix} 1-x & 2+x \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -3(2x-1)[-(x-1)^2 - (x+2)^2]$$

$$= -3(2x-1)[-x^2 + 2x - 1 - x^2 - 4x - 4] = -3(2x-1)(-2x^2 - 2x - 5) = 3(2x-1)(2x^2 + 2x + 5)$$

Τελικά:

$$\begin{vmatrix} x & x & -2 & 1 \\ x & -2 & 1 & x \\ -2 & 1 & x & x \\ 1 & x & x & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(2x-1)(2x^2 + 2x + 5) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}, x = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right), x = \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)}$$

ΘΕΜΑ 2ο:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 8 & 6 & -4 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_4 - 4\Gamma_1]{\begin{matrix} \Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_3 + \Gamma_1 \end{matrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_4 + 2\Gamma_2]{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_4 - 2\Gamma_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Έτσι το δοσμένο σύστημα γίνεται ισοδύναμο:

$$(\Sigma) \begin{cases} 2x_3 + 5x_4 = 1 \\ -2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{1-5x_4}{2} \\ x_2 = \frac{x_4-1}{4} \\ x_1 = \frac{17x_4+7}{4} \end{cases}, x_4 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{4} + \frac{17}{4}x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_4 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Το οποίο έχει άπειρες λύσεις για $x_4 \in \mathbb{R}$.

**ΘΕΜΑ 3ο:**

α) Αρκεί να δείξουμε ότι: $A(AB) = \mathbb{I} = (AB)A$.

Έχουμε:

$$A(AB) = (AA)B = A^2B = A^2(A^2)^{-1} = \mathbb{I}.$$

Επίσης:

$$(AB)A = A(A^2)^{-1}A = A(A^2)^{-1}A\mathbb{I} = A(A^2)^{-1}AA(AB) = A(A^2)^{-1}A^2(AB) = A\mathbb{I}(AB) = A(AB) = \mathbb{I}.$$

Άρα: $A^{-1} = AB$.

β) Από υπόθεση έχουμε: $\left. \begin{matrix} A = A^{-1} \\ AA^{-1} = \mathbb{I}_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow A^2 = \mathbb{I}_2 \text{ (1)}. \text{ Έστω ότι: } A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \text{ με } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}. \text{ Η σχέση (1) δίνει:}$

$$A^2 = \mathbb{I}_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & (\alpha + \delta)\beta \\ (\alpha + \delta)\gamma & \delta^2 + \beta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (\varepsilon 1): (\alpha + \delta)\beta = 0 \Leftrightarrow \{\beta = 0 \text{ ή } \delta = -\alpha\} \\ (\varepsilon 2): (\alpha + \delta)\gamma = 0 \Leftrightarrow \{\gamma = 0 \text{ ή } \delta = -\alpha\} \\ (\varepsilon 3): \alpha^2 + \beta\gamma = 1 \\ (\varepsilon 4): \delta^2 + \beta\gamma = 1 \end{cases}$$

Αν $\delta = -\alpha$, τότε οι εξισώσεις (ε3) και (ε4) είναι ίδιες οπότε έχουμε: $\alpha = \pm\sqrt{1 - \beta\gamma}$, για $\beta\gamma \leq 1$.

$$\text{Άρα } A = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \beta\gamma} & \beta \\ \gamma & -\sqrt{1 - \beta\gamma} \end{bmatrix} \text{ ή } A = \begin{bmatrix} -\sqrt{1 - \beta\gamma} & \beta \\ \gamma & \sqrt{1 - \beta\gamma} \end{bmatrix}, \forall \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ με } \beta\gamma \leq 1.$$

Αν $\beta = 0$ ή $\gamma = 0$, τότε οι εξισώσεις (ε3) και (ε4) δίνουν: $\alpha^2 = 1 = \delta^2 \Leftrightarrow \delta = -\alpha = \pm 1$ λόγω της υπόθεσης

$A \neq \mathbb{I}$ και $A \neq -\mathbb{I}$.

ΘΕΜΑ 4ο:

α) Αφού η $\lambda_1 = 2 - 3i$ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα A και το $p_A(\lambda)$ έχει πραγματικούς συντελεστές τότε $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 2 + 3i$ είναι επίσης ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και συνεπώς ιδιοτιμή του πίνακα A . Έστω λ_3 και λ_4 οι άλλες ιδιοτιμές του A . Γνωρίζουμε ότι:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = -13$$

και

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4$$

Ισοδύναμα λοιπόν έχουμε:

$$(2 - 3i) \cdot (2 + 3i) \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = -13 \Leftrightarrow 13 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = -13 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_3 \cdot \lambda_4 = -1}$$

και

$$(2 - 3i) + (2 + 3i) + \lambda_3 + \lambda_4 = 4 \Leftrightarrow 4 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_3 + \lambda_4 = 0}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι λ_3 και λ_4 είναι ρίζες του τριωνύμου: $x^2 - 1 = 0$. Συνεπώς $\lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1$ (ή $\lambda_3 = -1, \lambda_4 = 1$).

β) Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι n ιδιοτιμές του πίνακα A . Τότε το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο μπορεί να γραφεί ως:

$$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

Για $\lambda = 0$ έχουμε $p_A(0) = \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$.



ΘΕΜΑ 5ο:

α) Σχηματίζουμε την ορίζουσα με στήλες τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 . Είναι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

άρα τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εφόσον τρία διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε παράγουν τον χώρο δηλαδή αποτελούν βάση του.

β) Από το θεώρημα ορθοκανονικοποίησης των *Gram-Schmidt* κι αφού $\{v_1, v_2, v_3\}$ δείξαμε ότι είναι βάση του $\mathbb{R}^3$ έχουμε:

$$w_1 = v_1 \Rightarrow \boxed{w_1 = (1, 0, 1)}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (2, 1, -3) - \frac{-1}{2} (1, 0, 1) = \left(\frac{5}{2}, 1 - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \boxed{w_2 = \left(\frac{5}{2}, 1 - \frac{5}{2}\right)}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = (-1, 1, 0) - \frac{-1}{2} (1, 0, 1) - \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{27}{2}} \left(\frac{5}{2}, 1 - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_3 = (-1, 1, 0) + \frac{1}{2} (1, 0, 1) + \frac{1}{9} \left(\frac{5}{2}, 1 - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \boxed{w_3 = \left(-\frac{2}{9}, \frac{10}{9}, \frac{2}{9}\right)}$$

Οπότε η ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ που προέρχεται από την $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι η $\mathcal{B} = \left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right\}$.

Είναι: $\|w_1\| = \sqrt{2}$, $\|w_2\| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\|w_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, οπότε:

$$\boxed{\frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1, 0, 1), \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\sqrt{3}}{9} (5, 2, -5), \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{\sqrt{3}}{9} (-1, 5, 1)}.$$